



ÁVF/Levelező tagozat
Analízis és algebra 1. házfeladat
Határidő: 2006. november 11.

Analízis

I. Számsorozatok:

1.) Írja fel az első öt tagját!

$$a_n = (-1)^n \frac{3}{n+1}, b_n = \frac{5n}{n^3+1}, c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, d_n = 3^n$$

$$f_0 = 2, f_{n+1} = \sqrt{f_n + 6}$$

2.) Adja meg a sorozat n -dik tagját!

a.) $-2, -4, -6, -8, -10, -12, \dots$

b.) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$

c.) $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \dots$

3.) Az 1.) és 2.) feladatokban szereplő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgálja meg!

4.) Határozza meg az alábbi határértékeket!

a.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 + 3n^2 - 100}{(n+1)^3 + 2n + 1}$

b.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2} + n \sqrt[3]{n}}{2n^{\frac{4}{3}} + 5\sqrt{n}}$

c.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n-2} - \sqrt{n}}$

d.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} \left(\sqrt{\frac{n}{3} + 1} - \sqrt{\frac{n}{3} - 1} \right)$

e.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n + 3^{2n-2} + 2^{2n+1}}$

f.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n-1}$

II. Végtelen sorok:

1.) Számítsa ki az alábbi sorok összegét!

a.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{\frac{n}{2}+1}}{6^{n-2}}$ b.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{2 \cdot 36^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{2n}}$ c.) $\sum_{n=1}^{\infty} 8^{\frac{n}{3}+1} \cdot 4^{2-2n}$

d.) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$ e.) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 3$

III.) Differenciaegyenletek (DaE):

1.) Ábrázolja az alábbi DaE $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ tagjait az (n, y_n) koordináta-rendszerben, határozza meg y_n -t és $\lim y_n$ -t, ha létezik.

- a.) $y_0 = 1, y_{n+1} = 1, 5y_n + 1$ b.) $y_0 = 4, y_{n+1} = 1, 2y_n - 1$
c.) $y_0 = 3, y_{n+1} = 0, 5y_n + 1$ d.) $y_0 = -4, y_{n+1} = 0, 25y_n + 3$
e.) $y_0 = 6, y_{n+1} = -0, 5y_n + 6$ f.) $y_0 = 3, y_{n+1} = -y_n + 4$
g.) $y_0 = 4, y_{n+1} = -2y_n + 6$ h.) $y_0 = 1, y_{n+1} = y_n + 2$

2.) Oldja meg az alábbi másodrendű DaE-t:

- a.) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 4, y_0 = 1, y_1 = 2$
b.) $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = 8$
c.) $y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = 30, y_0 = -1, y_1 = 3$

IV.) Függvény határérték, folytonosság, aszimptota:

1.) $\lim_1 \frac{x^3-1}{x-1} = ?, \lim_{-3+} \frac{|x+3|}{x+3} = ?, \lim_{-3-} \frac{|x+3|}{x+3} = ?, \lim_{2+} 2^{\frac{1}{2-x}} = ?, \lim_{2-} 2^{\frac{1}{2-x}} = ?$

2.) Határozza meg az alábbi függvény aszimptotáit!

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-9}, g(x) = \frac{x(x+2)}{x-1}$$

3.) Adja meg a szakadási helyeket és azok fajtáit!

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4), g(x) = \frac{1}{x-1}, h(x) = \frac{x^3-x}{x(x+1)}$$

4.) Tegye folytonossá az alábbi függvényeket!

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{2x} & , x \leq 0 \\ a - x^3 & , x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} |x - 2| & , x \geq 2 \\ b + \frac{1}{2}x & , x < 2 \end{cases}$$

5.) $f(x) = x^4 - x^2 - 9$

Az f -nek $(1, 2)$ -ben van gyöke. Az intervallum-felezés módszerével közelítse meg ezt a gyököt $\frac{7}{100}$ pontossággal!

V. Differenciálszámítás:

1.) Deriválja az alábbi függvényeket!

a.) $f(x) = 3x^8 - 4x^5 + 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

b.) $f(x) = (4 + 3x)^8 + e^{3x} \cdot x^2$

c.) $f(x) = \frac{2x^3-x^2}{x^4+x}$ d.) $f(x) = \frac{x \ln(x^2+1)}{\sin 2x}$ e.) $f(x) = e^{x^2} + 5^x + x^x$

2.) Írja fel az f függvény x_0 -beli érintőegyenletét, majd ennek segítségével adjon közelítést $f(\bar{x})$ -re!

a.) $f(x) = xe^{-x^2}, x_0 = 0, \bar{x} = -0,01$

b.) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-x}}{x+1}, x_0 = 3, \bar{x} = 3,02$

VI. Teljes függvényvizsgálat:

1.) Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényekre!

a.) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ b.) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^3}$
c.) $f(x) = -4x^5 + 15x^3$ d.) $f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$

VII. Integrálszámítás:

- 1.) $\int (\sqrt{x}x^3 + 2^x + \sin 3x + \frac{1}{x}) dx = ?$
- 2.) $\int xe^{2x} dx = ?$, $\int x \sin 3x dx = ?$, $\int x \ln x dx = ?$
- 3.) $\int \frac{3}{x(x+1)} dx = ?$, $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} dx = ?$
- 4.) $\int_1^2 (2x+1)^{10} dx = ?$, $\int_{-3}^{-1} \frac{4x+1}{x^3} dx = ?$, $\int_1^4 \left(3x^4 - 2x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = ?$
- 5.) Határozza meg azon korlátos tartomány területét, amely az alábbi függvények gráfjai közé esik! Készítsen ábrát!
 - a.) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5, y = 0$
 - b.) $f(x) = 4x, g(x) = x^2 + 2x - 3$
 - c.) $f(x) = e^x, x = 0, x = 1$

VIII. Differenciálegyenletek:

- 1.) Oldja meg az alábbi elsőrendű differenciálegyenleteket!
 - a.) $y' = x + xy^2, y(0) = 0$
 - b.) $y' - \frac{2y}{x} + \frac{2}{x} = -2, x(0) = 1$
 - c.) $y' = e^{x+2y}, y(0) = 2$
 - d.) $y' + 2y = x, y(0) = \frac{3}{4}$
 - e.) $y' = \frac{xe^{-x}}{y^3 + \sin 2y}$
 - f.) $y'x - y = 3x^4 - x^2, y(1) = 2$
- 2.) Oldja meg az alábbi lineáris, állandó együtthatós másodrendű differenciálegyenletet!
 - a.) $y'' - 6y' + 5y = 2x^2$
 - b.) $y'' - 7y' + 6y = \cos 2x$
 - c.) $y'' - 3y' - 10y = 3e^{4x}$

