Operációkutatás 2. házi feladat megoldás, levelező tagozat

1. Oldja meg az alábbi szállítási feladatot!

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	$\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	22
R_3	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	22
	24	11	13	31	

Megoldás: A feladatban a felvevőhelyek összigénye 79, míg a raktárakban levő összmennyiség csak 66, így szükség lesz egy <u>névleges raktár</u> bevezetésére $79 - 66 = 13$ kapacitással. Eszerint a feladat táblázata:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	$\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	22
R_3	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	22
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	24	11	13	31	

Keressünk egy kezdeti megoldást a MATMIN-módszer (mátrix minimum módszer) segítségével. Haladjunk lépésenként.

Először tekintsük az egyik 0 (legkisebb) költségű cellát:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	$\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	22
R_3	$\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	~~22~~ 11
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	24	11	13	31	

Válasszunk a maradék lefedetlen 0 költségűek közül egy cellát:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	$\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	22
R_3	$\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$	~~22~~ 11
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	24	11	~~13~~ 0	31	

Még van egy 0 költségű fedetlen cellánk:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	$\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	22
R_3	$\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	~~22~~ 11
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	24	11	~~13~~ 0	~~31~~ 20	

Most a fedetlenek közül a legkisebb költség 2, ezek közül választunk cellát:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	22 $\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	22
R_3	$\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	~~22~~ 11
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	~~24~~ 2	11	~~13~~ 0	~~31~~ 20	

Most a 4 a legkisebb fedetlen költség:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	22 $\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	2 $\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	~~22~~ 20
R_3	$\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	~~22~~ 11
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	~~24~~ 2	11	~~13~~ 0	~~31~~ 20	

A legkisebb fedetlen költség az 5, eszerint:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	22 $\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	2 $\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	20 $\boxed{5}$	~~22~~ ~~20~~ 0
R_3	$\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	~~22~~ 11
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	~~24~~ 2	11	~~13~~ 0	~~31~~ 20	

Végül a maradék cellán 0-át szállítunk:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	22 $\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	2 $\boxed{4}$	$\boxed{9}$	0 $\boxed{6}$	20 $\boxed{5}$	~~22~~ ~~20~~ 0
R_3	$\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	~~22~~ 11
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	~~24~~ 2	11	~~13~~ 0	~~31~~ 20	

Eszerint a következő kezdeti szállítást találtuk:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	22 $\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	22
R_2	2 $\boxed{4}$	$\boxed{9}$	0 $\boxed{6}$	20 $\boxed{5}$	22
R_3	$\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	22
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	24	11	13	31	

Vizsgáljuk meg ennek optimalitását a potenciáltábla segítségével!

$u_i \backslash v_j$	2	3	4	3	
0	22 $\boxed{2}$	$+$ $\boxed{7}$	$+$ $\boxed{3}$	-1 $\boxed{2}$	22
2	2 $\boxed{4}$	$+$ $\boxed{9}$	0 $+$ $\boxed{6}$	20 $+$ $\boxed{5}$	22
-3	$+$ $\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	22
-4	$+$ $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{0}$	13
	24	11	13	31	

Az egyetlen negatív értéket kapott R_1F_4 utat választjuk bázisba menő cellának. Az ehhez tartozó hurok:

$u_i \backslash v_j$	2	3	4	3	
0	$22-d$ $\boxed{2}$	$+$ $\boxed{7}$	$+$ $\boxed{3}$	$+d$ -1 $\boxed{2}$	22
2	$2+d$ $\boxed{4}$	$+$ $\boxed{9}$	0 $+$ $\boxed{6}$	$20-d$ $+$ $\boxed{5}$	22
-3	$+$ $\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	22
-4	$+$ $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{0}$	13
	24	11	13	31	

A negatív sarkak közül a legkisebb érték a 20, tehát $d = 20$ és az R_2F_4 megy ki a bázisból. Az új szállítás:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	2 $\boxed{2}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	20 $\boxed{2}$	22
R_2	22 $\boxed{4}$	$\boxed{9}$	0 $\boxed{6}$	$\boxed{5}$	22
R_3	$\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	22
N	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	13
	24	11	13	31	

A potenciáltábla kitöltve:

$u_i \backslash v_j$	2	2	4	2	
0	2 $\boxed{2}$	$+$ $\boxed{7}$	-1 $\boxed{3}$	20 $\boxed{2}$	22
2	22 $\boxed{4}$	$+$ $\boxed{9}$	0 $\boxed{6}$	$+$ $\boxed{5}$	22
-2	$+$ $\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	22
-4	$+$ $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{0}$	13
	24	11	13	31	

A negatív cellának megfelelő hurok:

$u_i \backslash v_j$	2	2	4	2	
0	$2-d$ $\boxed{2}$	$+$ $\boxed{7}$	$+d$ -1 $\boxed{3}$	20 $\boxed{2}$	22
2	$22+d$ $\boxed{4}$	$+$ $\boxed{9}$	$0-d$ $\boxed{6}$	$+$ $\boxed{5}$	22
-2	$+$ $\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	22
-4	$+$ $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	$+$ $\boxed{0}$	13
	24	11	13	31	

$d = 0$, tehát csak a bázis változik. Az új bázishoz tartozó potenciáltábla:

$u_i \backslash v_j$	2	2	3	2	
0	2 $\boxed{2}$	+ $\boxed{7}$	0 $\boxed{3}$	20 $\boxed{2}$	22
2	22 $\boxed{4}$	+ $\boxed{9}$	+ $\boxed{6}$	+ $\boxed{5}$	22
-2	+ $\boxed{2}$	11 $\boxed{0}$	+ $\boxed{3}$	11 $\boxed{0}$	22
-3	+ $\boxed{0}$	+ $\boxed{0}$	13 $\boxed{0}$	+ $\boxed{0}$	13
	24	11	13	31	

Tehát a fenti szállítás optimális. A minimális szállítási költség:

$$z_{opt} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 22 \cdot 4 + 11 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 13 \cdot 0 = 132$$

2. Oldja meg az alábbi tiltótarifás szállítási feladatot!

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	$\boxed{5}$	$\boxed{M}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	26
R_2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{M}$	36
R_3	$\boxed{M}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	22
	18	18	28	14	

Megoldás: A feladatban a felvevőhelyek összigénye 78, míg a raktárakban levő összmennyiség csak 84, így szükség lesz egy névleges felvevőhely bevezetésére $84 - 78 = 6$ igénnyel. Eszerint a feladat táblázata:

	F_1	F_2	F_3	F_4	N	
R_1	$\boxed{5}$	$\boxed{M}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{0}$	26
R_2	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{M}$	$\boxed{0}$	36
R_3	$\boxed{M}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	22
	18	18	28	14	6	

A MATMIN módszerrel kapott (egyik lehetséges) kezdeti megoldás:

	F_1	F_2	F_3	F_4	N	
R_1	6 $\boxed{5}$	$\boxed{M}$	6 $\boxed{3}$	14 $\boxed{2}$	$\boxed{0}$	26
R_2	12 $\boxed{6}$	18 $\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{M}$	6 $\boxed{0}$	36
R_3	$\boxed{M}$	$\boxed{5}$	22 $\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	22
	18	18	28	14	6	

A megfelelő potenciáltábla:

$u_i \backslash v_j$	5	3	3	2	-1	
0	6 $\boxed{5}$	+ $\boxed{M}$	6 $\boxed{3}$	14 $\boxed{2}$	+ $\boxed{0}$	26
1	12 $\boxed{6}$	18 $\boxed{4}$	+ $\boxed{5}$	$\boxed{M}$	6 $\boxed{0}$	36
-1	+ $\boxed{M}$	+ $\boxed{5}$	22 $\boxed{2}$	+ $\boxed{4}$	+ $\boxed{0}$	22
	18	18	28	14	6	

Tehát a megoldás optimális, a szállítás összköltsége:

$$z_{opt} = 6 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 14 \cdot 2 + 12 \cdot 6 + 18 \cdot 4 + 6 \cdot 0 + 22 \cdot 2 = 264$$

3. Oldja meg az alábbi hozzárendelési feladatot!

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	30	31	31	21	34
E_2	20	29	26	14	25
E_3	26	17	12	22	16
E_4	25	26	33	22	28
E_5	21	24	23	30	32

Megoldás:
Sorredukció (minden sor legkisebb elemének az adott sorból való kivonása) után:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	9	10	10	0	13
E_2	6	15	12	0	11
E_3	14	5	0	10	4
E_4	3	4	11	0	6
E_5	0	3	2	9	11

Oszlopredukció (minden oszlop legkisebb elemének az adott oszlopból való kivonása) után:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	9	7	10	0	9
E_2	6	12	12	0	7
E_3	14	2	0	10	0
E_4	3	1	11	0	2
E_5	0	0	2	9	7

Keressünk független nullákat (vastagon írt) és vele egyező számú fedővonalat:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	9	7	10	0	9
E_2	6	12	12	**0**	7
~~E_3~~	~~14~~	~~2~~	~~**0**~~	~~10~~	~~0~~
E_4	3	1	11	0	2
~~E_5~~	~~0~~	~~**0**~~	~~2~~	~~9~~	~~7~~

A lefedetlen elemek minimuma 1. Így vele elvégezve az ε-transzformációt (fedetlenekből levonni, kétszer fedettekhez hozzáadni ε-t) az alábbi táblához jutunk:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	8	6	9	0	8
E_2	5	11	11	0	6
E_3	14	2	0	11	0
E_4	2	0	10	0	1
E_5	0	0	2	10	7

Most ebben keressünk független 0 rendszert illetve vele egyező számú fedővonalat:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	8	6	9	0	8
E_2	5	11	11	**0**	6
~~E_3~~	~~14~~	~~2~~	~~**0**~~	~~11~~	~~0~~
~~E_4~~	~~2~~	~~**0**~~	~~10~~	~~0~~	~~1~~
~~E_5~~	~~**0**~~	~~0~~	~~2~~	~~10~~	~~7~~

$\varepsilon = 5$-tel a transzformáció után:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	3	1	4	0	3
E_2	0	6	6	0	1
E_3	14	2	0	12	0
E_4	2	0	10	1	1
E_5	0	0	2	11	7

Ebben független 0 rendszer illetve vele egyező számú fedővonal:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	3	1	4	0	3
E_2	0	6	6	**0**	1
E_3	14	2	**0**	12	0
E_4	2	**0**	10	1	1
E_5	**0**	0	2	11	7

$\varepsilon = 1$-gyel a transzformáció után:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	3	1	3	0	2
E_2	0	6	5	0	0
E_3	15	3	0	13	0
E_4	2	0	9	1	0
E_5	0	0	1	11	6

Itt már talalunk 5 darab független nullát:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	3	1	3	**0**	2
E_2	0	6	5	0	**0**
E_3	15	3	**0**	13	0
E_4	2	**0**	9	1	0
E_5	**0**	0	1	11	6

Tehát egy optimális hozzárendelés:

$$E_1 \to M_4,\ E_2 \to M_5,\ E_3 \to M_3,\ E_4 \to M_2,\ E_5 \to M_1$$

A hozzárendelés optimális költsége:

$$21 + 25 + 12 + 26 + 21 = 105$$

4. Van-e az alábbi játéknak tiszta értéke? Ha nincs, akkor módosítsa a kifizetési mátrixot úgy, hogy legyen!

		II. játékos					
		1	2	3	4	5	6
	1	3	35	55	25	53	18
	2	70	63	33	62	59	20
I. játékos	3	2	41	11	45	22	57
	4	95	18	27	16	28	6
	5	41	72	49	62	69	10

Megoldás:

Tekintsük a sorminimuokat és oszlopmaximumokat:

		II. játékos						
		1	2	3	4	5	6	
	1	3	35	55	25	53	18	3
	2	70	63	33	62	59	20	20
I. játékos	3	2	41	11	45	22	57	2
	4	95	18	27	16	28	6	6
	5	41	72	49	62	69	10	10
		95	72	55	62	69	57	

Nezzük meg a sorminimumok maximumát illetve az oszlopmaximumok minimumát (vastaggal):

		II. játékos						
		1	2	3	4	5	6	
	1	3	35	55	25	53	18	3
	2	70	63	33	62	59	20	**20**
I. játékos	3	2	41	11	45	22	57	2
	4	95	18	27	16	28	6	6
	5	41	72	49	62	69	10	10
		95	72	**55**	62	69	57	

A két érték nem egyezik, tehát a játéknak nincs tiszta értéke.
Egy lehetséges megfelelő változtatás:

		II. játékos						
		1	2	3	4	5	6	
	1	3	35	55	25	53	18	3
	2	70	63	55	62	59	55	**55**
I. játékos	3	2	41	11	45	22	57	2
	4	95	18	27	16	28	6	6
	5	41	72	49	62	69	10	10
		95	72	**55**	62	69	57	

Látható, hogy itt van nyeregpont, a játék tiszta értéke: 55.