

# Bevezető, Számsorozatok

## I. rész, Bevezető

### 1. A valós számok ( $\mathfrak{R}$ ) axiómái

1.1. Algebrai axiómák .....	1
1.2. Rendezési axiómák (10-13.).....	2
1.3. Archimédész-féle axióma (14.).....	2
1.4. Cantor-féle axióma.....	2
2. A rendezési axiómákból levezethető.....	3
3. Néhány fogalom .....	3

## II. rész, Számsorozatok.....4

Számsorozat konvergenciája .....	5
Számsorozat divergenciája .....	6
A konvergencia szükséges feltétele.....	8
Műveletek konvergens számsorozatokkal.....	8
A limesz monoton .....	15
Rendőrelv .....	16
Speciális rendőrelv .....	16
Elégséges tétel ( $a_n$ ) konvergenciájára.....	20
Példák rekurzív sorozatokra .....	21
Egy kitüntetett számsorozat .....	24
Néhány $e$ -vel kapcsolatos példa .....	25
Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel.....	29
Szükséges és elégséges tétel számsorozat konvergenciájához.....	29
Egy fontos példa.....	30
Torlódási pont .....	31

# Numerikus sorok

<b>1. Numerikus sorok konvergenciája</b> .....	<b>1</b>
1.1. A konvergencia szükséges feltétele .....	5
<b>2. Pozitív tagú sorok</b> .....	<b>7</b>
<b>3. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok</b> .....	<b>9</b>
3.1. Majoráns kritérium .....	9
3.2. Minoráns kritérium .....	9
3.3. Hányados kritérium .....	10
3.3.1. Feladatok .....	12
3.4. Gyökkritérium .....	13
3.5. Integrálkritérium .....	14
3.6. Hibabecslés pozitív tagú sorösszegek közelítése esetén .....	15
<b>4. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok</b> .....	<b>16</b>
4.1. Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz .....	17
<b>5. Műveletek konvergens sorokkal</b> .....	<b>17</b>
5.1. Végtelen sorok természetes szorzata .....	18
5.2. Végtelen sorok Cauchy-szorzata .....	19
5.3. Zárójelek elhelyezése illetve elhagyása végtelen sor esetén .....	20
5.4. Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése) .....	21
<b>6. Feladatok sorokhoz</b> .....	<b>22</b>
<b>7. Számsorozatok nagyságrendje</b> .....	<b>25</b>
7.1. Műveletek $\Theta$ -val .....	25
7.2. $a_n \sim b_n$ .....	26
Feladatok .....	30

# Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása

<b>1. Függvény határértéke</b> .....	<b>1</b>
1.1. Szükséges és elégséges tétel határérték létezésére (Átviteli elv) .....	3
1.2. Végesben vett határértékek .....	4
1.3. Végtelenben vett határértékek .....	5
1.4. Feladatok .....	6
1.5. Műveletek függvények körében .....	7
A határértékre vonatkozó tételek .....	7
1.6. Folytonosság .....	9
1.7. Szakadási helyek osztályozása .....	9
Feladatok .....	11
1.8. Egy nevezetes határérték $:(\sin x)/x$ .....	12
Feladatok .....	13
<b>2. Folytonos függvények tulajdonságai</b> .....	<b>14</b>
Bolzano-tétel .....	15
2.1. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai .....	17
Weierstrass I. tétele .....	17
Weierstrass II. tétele .....	17
2.2. Egyenletes folytonosság .....	18
Feladatok .....	20
<b>3. Differenciálszámítás</b> .....	<b>21</b>
3.1. Differenciál, érintő egyenes .....	23
3.2. Differenciálási szabályok .....	24
3.3. Inverz.....	27
<b>4. Elemi függvények</b> .....	<b>27</b>
4.1. Példák .....	29
<b>5. A differenciálszámítás középértéktételei (Rolle, Lagrangae, Cauchy)</b> .....	<b>32</b>
5.1. Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére .....	32
5.2. A differenciálszámítás középértéktételei .....	33
5.3. Feladatok .....	35
<b>6. L'Hospital szabály</b> .....	<b>36</b>
<b>7. Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai</b> .....	<b>39</b>
Példák .....	42
<b>8. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai</b> .....	<b>43</b>
Példák .....	45
<b>9. Egyenes aszimptota <math>\pm \infty</math>-ben</b> .....	<b>47</b>
<b>10. Függvényvizsgálat</b> .....	<b>48</b>
10.1. Folytonos függvények zárt intervallumbeli szélsőértékei (abszolút szélsőértékek) ...	48
Példák .....	49
<b>11. Feladatok</b> .....	<b>51</b>
<b>12. Néhány kidolgozott feladat</b> .....	<b>57</b>

# Integrálszámítás

<b>1. Primitív függvény, határozatlan integrál</b> .....	<b>1</b>
A határozatlan integrál néhány tulajdonsága .....	2
1.1. Példák .....	2
<b>2. Határozott integrál</b> .....	<b>5</b>
2.1. Jelölések, definíciók .....	5
Az alsó és felső összeg tulajdonságai .....	6
A határozott integrál definíciója .....	7
<b>3. A Reimann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei</b> .....	<b>8</b>
<b>4. Elégséges tételek Reimann-integrálhatóságra</b> .....	<b>10</b>
<b>5. Newton-Leibniz-tétel</b> .....	<b>12</b>
<b>6. A Reimann-integrál tulajdonságai</b> .....	<b>13</b>
<b>7. Az integrálszámítás középértéktétele</b> .....	<b>15</b>
7.1. Feladatok .....	17
<b>8. Integrálfüggvény (Az integrálszámítás II. alaptétele)</b> .....	<b>18</b>
8.1. Példák .....	20
8.2. Feladatok .....	22
<b>9. Integrálás helyettesítéssel</b> .....	<b>23</b>
<b>10. Integrálási módszerek</b> .....	<b>24</b>
10.1. ....	24
10.2. sin és cos páratlan kitevőjű hatványai .....	24
10.3. sin és cos páros kitevőjű hatványai .....	25
10.4. ....	25
10.5. Parciális integrálás.....	26
10.6. Racionális törtfüggvények integrálása .....	28
10.7. Integrálás helyettesítéssel .....	30
Racionális törtfüggvények integráljára vezető helyettesítések .....	31
Feladatok .....	32
<b>11. Impropius integrál</b> .....	<b>35</b>
11.1. Definíciók .....	35
11.1.1. Ha az intervallum nem korlátos .....	35
11.1.2. Egy fontos megjegyzés.....	36
11.1.3. Ha függvény nem korlátos .....	37
11.2. Fontos példák .....	38
11.3. Az impropius integrálok néhány tulajdonsága.....	39
11.3.1. Majoráns kritérium.....	40
11.3.2. Minoráns kritérium.....	41
11.4. Feladatok .....	41
<b>12. Az integrálszámítás alkalmazása</b> .....	<b>43</b>
12.1. Terület .....	43
12.2. Szektorterület .....	43
12.3. Forgástest térfogata .....	43
12.4. Ívhosszúság .....	44