ANALIZIS ALAPOZÓ FELADATOK (I)

Numerikus sorok és sorozatok
Egyváltozós függvények folytonossága
Egyváltozós függvények differenciál és integrálszámítása

Összeállította: Fritz Józsefné és Kónya Ilona

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

Készült a VIK Műszaki Informatika szakos hallgatói részére
1997/98

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

SZÁMSOROZATOK

(1) Legyen $\varepsilon = 10^{-4}$. Határozzon meg egy küszöbszámot, amelyre igaz, hogy ennél nagyobb n-ekre az

$$a_n = \frac{2+n^2}{5+2n^2}$$

eltérése az $1/2$ -től már ε -nál kisebb lesz!

(2)

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-2n}{5n} = -\dfrac{2}{5}$

$b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{2n+3} = \dfrac{3}{2}$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+8}{n^2+2} = 2$

$d)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-3n}{n^2+2} = 0$

$e)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-n^2}{5+2n^2} = -\dfrac{1}{2}$

$f)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2+3} = \infty$

$g)$ $\lim\limits_{n\to\infty} 4n - n^2 = -\infty$

$h)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{n-4} = \infty$

(3) A határérték definiciója alapján mutassa meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad (N(\varepsilon) = ?)$$

$a)$ $a_n = \dfrac{5n^2+12}{n^2+3}$

$b)$ $a_n = \dfrac{1}{2n^2+3}$

$c)$ $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-2}$

(4) Vizsgálja meg a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!

$a)$ $a_n = \dfrac{n+3}{n}$

$b)$ $a_n = \dfrac{n+1}{n+3}$

$c)$ $a_n = \dfrac{n^2+3}{n\,(n+2)}$

$d)$ $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+2}$

$e)$ $a_n = \dfrac{2^n}{2^{2n}+3}$

$f)$ $a_n = \dfrac{3^{2n}}{4^n-3}$

(5) A határérték-tételek felhasználásával keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$a)\ a_n = \dfrac{n^3+3}{3n^3+2n^2-4}$

$b)\ a_n = \dfrac{2n^2+5}{n+4}$

$c)\ a_n = \dfrac{n-1}{3n^2+6n+2}$

$d)\ a_n = \dfrac{n^2-2}{4-n\sqrt{n}+3n^2}$

$e)\ a_n = \dfrac{n^2-1}{2n+3} - \dfrac{2n^2-1}{4n}$

$f)\ a_n = (\dfrac{1-2n}{4n+8})^3$

$g)\ a_n = \dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$

$h)\ a_n = \dfrac{n-2}{\sqrt{n^3+3}}$

$i)\ a_n = \dfrac{5!\,n}{(n+1)!}$

$j)\ a_n = -n^7+2n^5+3$

$k)\ a_n = \dfrac{n+\sqrt{n^4-3}}{2n^2+5}$

$l)\ a_n = \dfrac{\sqrt[5]{n^4+2n^2}}{2n+3}$

$m)\ a_n = \dfrac{\sqrt{n^6+3n-2}}{n^3-\sqrt{n+1}}$

$n)\ a_n = \log_2\sqrt{n+4} - \log_4 n$

$o)\ a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}$

$p)\ a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$

$q)\ a_n = \dfrac{3^n-3^{-n}}{3^n+3^{-n}}$

$r)\ a_n = \dfrac{4^{n+1}+3}{1+4^n}$

$s)\ a_n = \dfrac{4^{n+3}+2\cdot 3^n}{3^{2n+1}+1}$

$t)\ a_n = \dfrac{5^n+(-1)^n\,2^{2n+1}}{3\cdot 2^{2n}}$

$u)\ a_n = 3+(-1)^n\,\dfrac{2^n+3^n}{5^n+3}$

$v)\ a_n = \dfrac{7^{n+2}+(-1)^n\,3^{n-2}}{7^{n+1}+1}$

(6) Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$a)\ a_n = (1+\dfrac{1}{2n})^{2n+1}$

$b)\ a_n = (1-\dfrac{2}{n})^{n+2}$

$c)\ a_n = (\dfrac{n+3}{n+1})^{100}$

$d)\ a_n = (\dfrac{n+3}{n+1})^{n+3}$

$e)\ a_n = \left(\dfrac{7n+2}{7n+3}\right)^n$

$f)\ a_n = \left(\dfrac{3n+8}{3n+7}\right)^n$

$g)\ a_n = \left(\dfrac{5n+9}{5n+10}\right)^{(n+2)}$

$h)\ a_n = \left(\dfrac{n^3-3}{n^3+2}\right)^{n^3}$

(7)

$$\limsup a_n = ? \qquad \liminf a_n = ?\,,\ \text{ha}$$

$$a)\ a_n = \cos(\frac{n\pi}{2})\ \frac{5n^2}{9+n^2}$$

$$b)\ a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})\ \frac{7n^3}{12+n^3}$$

$$c)\ a_n = \frac{5+(-1)^n\,3n^3}{1+n+n^3}$$

(8) Keresse meg az alábbi sorozatok összes torlódási pontját!

a) $a_n = (-1)^n \dfrac{4n^2 + 3}{2n^2 - 1}$

b) $a_n = 1 + \sin n\dfrac{\pi}{2}$

c) $a_n = \dfrac{n + 2}{2n} \cos n\pi$

d) $a_n = \dfrac{3^n + (-4)^n}{2^{2n} + 1}$

e) $a_n = \dfrac{(-3)^n + 4^n}{2^{2n} + 1}$

f) $a_n = \sqrt{n^2 + (-1)^n n^2}$

g) $a_n = (-1)^n (1 + \dfrac{1}{n})$

h) $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{n + 2}{n + 1}$

NUMERIKUS SOROK

(1) Határozza meg az alábbi végtelen összegek értékét, amennyiben azok léteznek:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\cdot 2^n - 4^{n-1}}{6^{n+1}} = ?$$

$$b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = ?$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(n+1)}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = ?$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} + (-2)^n}{2\cdot 6^{n+2}} = ?$$

$$e)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = ?$$

(2) Mutassa meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, közelítse a sorösszegeket a negyedik részletösszegükkel, majd becsülje meg a közelítések hibáit:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n - 1}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 5^n + n - 2}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n + 1}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + 1}$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 6^n + n}$$

(3) Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!} \qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n^2}{n^2}$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-2n^2} \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{e^{3n}}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{1+n^2} \qquad i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{n^3}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{(n-1)}}{(n+1)!} \qquad j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^{3n}} \qquad k)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos n}$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{n/2}} \qquad l)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\arctan n)^n}$$

(4) $a)$ $$a_n = \frac{3\ 4^n + n^3\, 4^n}{6\, n^3\, 4^n + 3^n\, n^3} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = ?$$

b) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n$ sor ?

(5) Vizsgálja meg, hogy abszolut konvergensek-e, vagy feltételesen konvergensek az alábbi sorok:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (1-\frac{2}{n})^n$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{n^2+3}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+5}$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, (n-2)}{4n^3+5}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

(1) A kétoldali határérték kiszámításával állapítsa meg, hogy hol, milyen szakadása van az alábbi függvénynek:

a) $\dfrac{x^3-8x^2}{|x|\,(x^2-64)}$

b) $\dfrac{x(x-\pi/2)}{\sin 2x}$, $\quad x \in (-\pi/2,\ 3\pi/2)$

c) $\dfrac{\sin(2x-6)}{|x-3|}$, $\quad x \in [0,\ \pi]$

d) $\dfrac{2x+1}{x|x+5|}$

e) $f(x) = \arctan \dfrac{4}{x-11}$

(2) Hol folytonos az f függvény? Milyen jellegű szakadásai vannak:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & \text{ha } x<1 \\ 0, & \text{ha } x=1 \\ \frac{\sin 3(x-1)}{x-1}, & \text{ha } x>1 \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{2x}, & \text{ha } x<0 \\ 1, & \text{ha } x=0 \\ 3^{\frac{-1}{x}}, & \text{ha } x>0 \end{cases}$$

(3) Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \frac{(x^2+3x+2)\quad \sin|\,2-x\,|}{x^2-4}$$

függvénynek?

(4) Adja meg az m paraméter értékét úgy, hogy az alábbi függvények az $x=0$ pontban folytonosak legyenek:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{\tan x}, & \text{ha } -\pi/2 < x < 0 \\ m + \arccos x, & \text{ha } 1 > x \ge 0 \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin 3x}{x}, & \text{ha } -1/3 < x < 0 \\ m + \arccos x, & \text{ha } 1 > x \ge 0 \end{cases}$$

(5) Hol folytonosak és hol differenciálhatók az alábbi függvények:

$$a)\ f(x) = (x+12)\,|x^2+x-4|$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} x-\frac{1}{2}, & \text{ha } -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{ha } 1 \le x \le 3 \\ 3^x, & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMITÁSA

(1)

$$f'(x) = ? \qquad D_{f'} = ? \ (\text{ hol differenciálható az } f\,?), \quad \text{ahol :}$$

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & \text{ha } x < 1 \\ -1, & \text{ha } x = 1 \\ \frac{\sin 3(x-1)}{x-1}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{2x}, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ 3^{\frac{-1}{x}}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

(2) Irja fel az alábbi paraméteres megadású görbék érintő egyeneseinek egyenletét az adott t_0 paraméterű pontban:

$$a)\ x = t + \sin 8t, \quad y = 6(\cos t)^2, \quad t_0 = \pi/4$$
$$b)\ x = 6t + \cos 3t, \quad y = 24(\sin t)^2, \quad t_0 = \pi/3$$

(3) Az $y(x)$ függvény az $x_0 = e$ pont környezetében differenciálható és kielégíti az

$$2x \ln y + 3y \ln x = 3$$

implicit függvénykapcsolatot. Határozza meg ezen függvény $(e, 1)$ pontjabeli érintő egyenesének egyenletét!

(4) Irja fel az

$$x \cos y^2 + \frac{2y}{x+2} + y = 2x \quad ; \qquad x_0 = 0\,; \quad y_0 = 0$$

implicit módon megadott $y(x)$ függvény adott pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

(5) Vannak-e az $y = 2x^3 + 1$ egyenlettel adott görbének olyan érintői, amelyek párhuzamosak az $x - 18y + 1 = 0$ egyenessel?

(6) Vannak-e az

$$y = \arctan \frac{1}{x+2}$$

egyenlettel adott görbének olyan érintői, amelyek merőlegesek az $y + 4x = 0$ egyenesre?

(7)

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - 2x^3}$$

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, melyeken a függvény monoton!

(8) Legyen

$$f(x) = \frac{13x}{1 + \frac{x^2}{9}}.$$

Határozza meg azokat az intervallumokat, ahol a függvény növekedő illetve ahol csökkenő! Keresse meg a lokális szélsőérték helyeket és állapítsa meg azok jellegét!

(9) Legyen

$$f(x) = \arccos\frac{2}{x}, \qquad x \in [2,4]$$

a) Mutassa meg, hogy f szigorúan monoton és határozza meg az értékkészletét!
b) Határozza meg f inverzét,

$$f^{-1}(x) = ? \quad D_{f^{-1}} = ? \quad R_{f^{-1}} = ?$$

(10) Az $y = f(x)$ függvény az $x_0 = 3$ pont környezetében differenciálható és kielégíti az

$$(x^2 + y^3)^2 + 5x + 6y \; = \; 4$$

implicit függvénykapcsolatot és grafikonja átmegy a P(3,-2) ponton. Igaz-e, hogy a függvény az adott pontban lokálisan nővő illetve, hogy ott a függvénynek lokális szélsőértéke van?

(11) Hol konvexek, illetve hol konkávak az alábbi függvények? Van-e inflexiós pontjuk?

$$a) \;\; f(x) \; = \; \ln(12 + 5x^2)$$
$$b) \;\; f(x) \; = \; \frac{1}{9 - x^2}$$

(12)

$$a) \;\; \left((\ln(\cosh x))^x \right)' = ?$$
$$b) \;\; \left((1 + 2x^4)^{\sin\, 3x} \right)' = ?$$
$$c) \;\; \left(\sinh\, 3x \; + \; x^{x^2} \right)' = ?$$

(13)

$$a) \;\; \lim_{x \to 0+} \left(\frac{3}{x} \right)^{2x} = ?$$
$$b) \;\; \lim_{x \to 0} \left(\frac{2\, \cosh\, 2x \; - \; 2}{3\, x^2} \right) = ?$$
$$c) \;\; \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos(5x)}{2x - \pi} = ?$$

(14) Határozza meg az f függvény aszimptota egyenesének az egyenletét az $x \to \infty$ és $x \to -\infty$ esetén:

$$a)\ \ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$$

$$b)\ \ f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 1}$$

$$c)\ \ f(x) = 3x + \sqrt{x^2 - x}$$

$$d)\ \ f(x) = 2x + \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x}$$

(15) Vizsgálja meg és vázolja a következő függvényeket:

$$a)\ \ f(x) = (x+2)^2(9 - x^2)$$

$$b)\ \ f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$c)\ \ f(x) = 3e^{-2x^2}$$

$$d)\ \ f(x) = xe^{-3x}$$

EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMITÁSA

(1)

$$a) \int \frac{1}{121x^3 + x}\, dx = ?$$

$$b) \int \frac{e^{3x}}{1 + e^{6x}}\, dx = ?$$

$$c) \int \frac{e^{4x}}{1 + e^{4x}}\, dx = ?$$

$$d) \int \frac{x^3}{x^2 + 5}\, dx = ?$$

$$e) \int \frac{e^x}{2e^x - e^{-x}}\, dx = ? \quad \text{ha } x > 0$$

$$f) \int \frac{1}{(\sin 5x)^2} + \cos x \sin 2x\, dx = ?$$

$$g) \int (\tan(4x))^2\, dx = ?$$

$$h) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8x}}\, dx = ?$$

$$i) \int \frac{4x^2 - 4x + 9}{(x^2 + 3)(x - 4)}\, dx = ?$$

$$j) \int \ln(2x + 3)\, dx = ?$$

(2)

$$a) \int_0^{2\ln 3} xe^{-2x}\, dx = ?$$

$$b) \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(2x+1)}\, dx$$

$$c) \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\, dx = ?$$

(3) Számítsa ki a görbe alatti területet az adott intervallumon:

$$a) \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 + 5x}}, \quad x \in [0, 1]$$

$$b) \ f(x) = \ln x^3, \quad x \in [1, e^2]$$

(4) Számítsa ki az adott görbék által határolt korlátos síkrészek területeit:

$$a) \ y = \frac{63}{64}x^3 + 1, \ x = 0, \ y = x^3$$

$$b) \ y = e^{3x}, \ y = e^{-x}, \ x = \ln 3$$

(5) Számítsa ki az alábbi szektorterületeket:

$$a)\ r = \sqrt{\cos 6\varphi}, \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$$
$$b)\ r = 2e^{3\varphi}, \quad \varphi \in [0, \ln 2]$$

(6) Számítsa ki az alábbi függvények grafikonjainak az x tengely körüli forgatásaival keletkezett testek térfogatait:

$$a)\ f(x) = \sqrt{2 + \ln x^2}\ , \quad x \in [1, 2]$$
$$b)\ f(x) = \sqrt{1 + e^{-x}}\ , \quad x \in [0, \ln 2]$$

$$V = \left(\pi \int_a^b f^2(x)\, dx\right)$$

(7) Az improprius integrál megfelelő definiciója alapján vizsgálja meg, hogy konvergensek-e az alábbi integrálok:

$$a)\ \int_{-\infty}^{0} 3xe^{-x^2}\, dx$$
$$b)\ \int_{0}^{\infty} x^2e^{-x^3}\, dx$$
$$c)\ \int_{0}^{\infty} \frac{3}{4x^2+1}\, dx$$
$$d)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$
$$e)\ \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)(2+x)}\, dx$$
$$f)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+6x+25}\, dx$$
$$g)\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x+6}\, dx$$
$$h)\ \int_{-5/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{(2x+5)^3}}\, dx$$