Bevezetés a számításelméletbe I.
2006. szeptember 19-20.
2. gyakorlat: Vektorterek 2.

1. (a) Kifejezhető-e a $(2,1,0)$ vektor az $(1,1,1)$ és az $(1,2,3)$ vektor lineáris kombinációjaként? Írjuk fel a két vektor által generált, origón átmenő sík egyenletét!
   (b) Oldjuk meg a következő egyenletet x, y valós ismeretlenekre:
   $$x + 3xa + 5xa^2 + 2y + 7ya - ya^2 = 1 + 4a - 6a^2$$
   (c) Léteznek-e olyan α, β valós számok, melyekre a következő lineáris kombináció fennáll:
   $$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$
2. (a) Lineárisan összefüggők-e az $(1,3,2)$, $(2,0,1)$ és $(5,6,5)$ vektorok?
   (b) Van-e az alábbi három síknak az origón kívül közös pontja? (1) $x + 2y + 4z = 0$, (2) $3x + 6z = 0$ és (3) $2x + y + 5z = 0$
   (c) Lineárisan összefüggő-e a következő 3 kód a moduló 2 test felett? $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ és $(0,1,1)$
3. Generátorrendszert alkotnak-e az $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(2,3,4,1)$, $(3,0,1,2)$, $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$ vektorok? Ha igen, válassz ki egy bázist belőle!
4. Az alábbi halmazok vektorteret adnak a valós test felett. Keressünk bennük minél több vektorból álló lineárisan független rendszert és minél kevesebb vektorból álló generátorrendszert!
   (a) Az összes térvektor.
   (b) Az összes legfeljebb n-edfokú egyváltozós polinom.
   (c) Az összes $n \times n$-es valós elemű mátrix.
5. Tudjuk, hogy $< a, b >=< c, d, e >$. Lineárisan függetlenek-e az $\{a, c, e\}$ vektorok?
6. **ZH!** Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ (a háromdimenziós valós tér) alábbi alterének egy bázisát:
   $$\{(x, y, z) : 3x + 2y + z = 0\}$$
7. **ZH!** Egy vektortérben az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektorok is, a $b_1, b_2, \ldots, b_l$ vektorok is külön-külön lineárisan független rendszert alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy ha a két vektorhalmaz által generált alterek metszete csak a nullvektor, akkor ez a $k + l$ darab vektor együtt is lineárisan független!
8. (a) Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$?
   (b) Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?

Beadható

2./1) Az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3, b_4 vektorok generálják ugyanazt a V lineáris teret. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $a_1 + a_2, a_3 + b_1, a_3 + b_2, b_3 + b_4$.

2./2) Legyen E lineáris tér és F_1, F_2 ennek alterei. Tudjuk, hogy $\dim E = 10$, $\dim F_1 = 5$, $\dim F_2 = 6$, és azt, hogy F_1 és F_2 elemei együtt generálják a teljes E vektorteret. Mennyi az $F_1 \cap F_2$ vektortér dimenziója?