Bevezetés a számításelméletbe I.

2. gyakorlat, 2006. szeptember 6.

Salamon Gábor <gsala@cs.bme.hu>

Vektorterek

1. Igazak-e az alábbi állítások? Hs igen, igazoljuk őket, ha nem, adjunk ellenpéldát!

   (a) Egy lineárisan független vektorrendszer tetszőleges részhalmaza is lineárisan független.

   (b) Egy lineárisan független vektorrendszerhez néhány vektort hozzávéve továbbra is lineárisan független rendszert kapunk.

   (c) Egy lineárisan összefüggő vektorrendszer tetszőleges részhalmaza is lineárisan összefüggő.

   (d) Egy lineárisan összefüggő vektorrendszerhez néhány vektort hozzávéve továbbra is lineárisan összefüggő rendszert kapunk.

2. Egy n-dimenziós vektortérben melyek igazak az alábbi állítások közül?

   (a) Minden n-nél kevesebb vektorból álló vektorrendszer lineárisan független.

   (b) Minden n-nél több vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő.

   (c) Minden generátorrendszer legalább n vektorból áll.

   (d) Minden legalább n vektorból álló vektorrendszer a tér generátorrendszere.

   (e) Minden n elemű generátorrendszer a tér bázisa.

   (f) Minden n elemű lineárisan független vektorrendszer a tér bázisa.

3. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e $\mathbf{R}^3$-ben!

   (a) $(1,1,1) \in \langle (1,1,0),(1,0,1),(0,1,1) \rangle$

   (b) Az $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ vektorok lineárisan függetlenek.

   (c) Az $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ vektorok generátorrendszert alkotnak.

   (d) A $\{(2,2,0),(2,0,2),(2,1,1),(2,2,2)\}$ vektorok lineárisan függetlenek.

   (e) A $\{(2,2,0),(2,0,2),(2,1,1),(2,2,2)\}$ vektorok generátorrendszert alkotnak.

4. Az alábbi vektorok halmazának mely részhalmazai lineárisan függetlenek?

   $$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

   Ki lehet választani közülük bázist?

5. Tekintsük a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomokat (azaz az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b, c, d \in \mathbf{R}$). Ezeket értelemszeruen össze tudjuk adni, vagy meg tudjuk szorozni egy valós számmal. Így egy V vektorteret kapunk (Ellenorizd!). Lineárisan függetlenek-e a következo polinomok? Milyen alterét generálják V-nek?

   (a) $1, x, x^2, x^3$

   (b) $2x^3 + 2x, 2x^3 + 2, 2x^3 + x + 1, 2x^3 + 2x + 2$

   (c) $x - 1, (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3)$

6. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   (a) Ha $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_{100}\}$, illetve $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{100}\}$ is lineárisan független, akkor $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_{100}, \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_{100}\}$ is lineárisan független.

   (b) Ha $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_{100}, v_1 \ldots \mathbf{v}_{100}\}$ lineárisan független, akkor $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_{100}\}$ is és $\{\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{100}\}$ is lineárisan független.

   (c) Ha $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_{100}\}$ közül bármely 99 vektor lineárisan független,akkor $\{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u}_{100}\}$ is lineárisan független.

7. Kifejezhető-e $\mathbf{R}^4$-ben a $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ az $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorok segítségével?

8. Kifejezhető-e a $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^4$ a 7. feladatban definiált $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok segítségével?

9. Tudjuk, hogy az $\{\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}, 4\mathbf{a}+5\mathbf{b}+6\mathbf{c}, 7\mathbf{a}+8\mathbf{b}+9\mathbf{c}\}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok is azok?

10. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, és $\underline{c}$ vektorok elemei, V pedig altere egy vektortérnek, továbbá $\underline{a} + \underline{b} \in V$, $\underline{c} + 3\underline{a} \in V$, de nem igaz, hogy $\underline{b} + 2\underline{c} \in V$. Mutassuk meg, hogy $6\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c} \in V$, de nem igaz, hogy $5\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c} \in V$.

11. (a) Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$?

    (b) Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{b} + \underline{c}$, $\underline{c} + \underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?