Bevezetés a számításelméletbe I.

3. gyakorlat, 2006. szeptember 27.

Salamon Gábor <gsala@cs.bme.hu>

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss elimináció

12. Oldjuk meg a valós számok körében az alábbi egyenletrendszereket! Használjuk a Gauss-elimináció módszerét!

(a)
$$\begin{aligned} 2x+4y+6z&=8\\ x+2y+5z&=1\\ x+4y+7z&=2\\ 4x-5y+2z&=5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x+3y+2z&=2\\ 2x+5y+4z&=3\\ 3x+7y+6z&=4 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x+3y+2z&=2\\ 2x+5y+4z&=3\\ 3x+7y+6z&=5 \end{aligned}$$

13. Adjunk példát olyan 3 ismeretlenes és 5 egyenletből álló egyenletrendszerre, melynek

    (a) nincs megoldása;
    (b) egyértelmű megoldása van;
    (c) végtelen sok megoldása van.

    Oldjuk meg a feladatot 5 ismertetlenes és 3 egyenletből álló egyenletrendszerekkel is!

14. Oldjuk meg a Gauss-féle elimináció módszerével a következő homogén lineáris egyenletrendszereket:

(a)
$$\begin{aligned} x+2y-2z-u&=0\\ 3x-y+2z-6u&=0\\ -3x+8y-10z+9u&=0\\ 2x+11y-12z+u&=0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x-y+3z+5u&=0\\ -4x+2y+5z+3u&=0\\ z+7u&=0 \end{aligned}$$

15. Oldjuk meg a Gauss-féle elimináció módszerével a következő lineáris egyenletrendszereket:

(a)
$$\begin{aligned} x+2y-z-u+v&=-1\\ x+2y-z+v&=1\\ -x-y+z+3u-2v&=2\\ 2x+2y-2z-5u+4v&=-2\\ 3x+7y-3z+u+2v&=2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x+y+2z-u+3v&=0\\ x+2y+z+3u-2v&=0\\ 3x+3y-z+2u+v&=0\\ -x+y+2z+3u-2v&=0\\ 2x-y+3z-2u+v&=0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x+9y+2z-5u-3v&=9\\ 2y+3u&=5\\ -2x-4z+u+6v&=3\\ 3x+5y+6z+6u-9v&=8\\ 8y-6u&=8 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x+2y-3z+3u+v&=42\\ 2x+y+2z+u+2v&=-42\\ -x+3y+z+2u+v&=-42\\ 3x+z-u+3v&=84\\ x+2y-z+u-2v&=-84 \end{aligned}$$

16. Határozzuk meg a p paraméter függvényében az alábbi egyenletrendszer megoldásait!

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+px_3&=4\\ 3x_1+x_2-2x_3&=-1\\ x_1-x_2+2x_3&=5 \end{aligned}$$

17. Határozzuk meg az a és b paraméterek függvényében az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát!

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 6 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ 4x - 3y + az &= b \end{aligned}$$

18. Hány közös pontja van az alábbi síkoknak?

(a) $$\begin{aligned} \text{x+y+z} &= 6 \\ \text{2x+3y-z} &= 4 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 4 \\ -3x - 4,5y + 3z &= -2 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ -x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

19. (a) Adjuk meg p és q értékét úgy, hogy az alábbi síkok egy egyenesre illeszkedjenek! (A megoldáshoz használható a 17. feladat eredménye.)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 6 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ 4x - 3y + pz &= q \end{aligned}$$

(b) Most úgy válasszuk meg p és q értékét, hogy a síkoknak ne legyen közös pontjuk!

(c) Milyen eset van még?

20. Létezik-e olyan egyenes, amely az adott 3 sík mindegyikével párhuzamos? Ha igen, akkor adjuk meg közülük az origón átmenőt!

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 1 \\ x + 7y + 4z &= 3 \\ 3x - 5y - z &= 2 \end{aligned}$$

21. Határozzuk meg az $x + y + z = 5$ egyenletű sík és a $2x - y - 2z = 3$ egyenletű sík metszésvonalának azt a pontját, amelyik az (x, y)-síkba (vagyis az x és az y tengely által meghatározott síkba) esik!

22. Generátorrendszert alkotnak-e az $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 0, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$ vektorok? Ha igen, válasszunk ki egy bázist belőle!

23. Egészítsük ki az $(1, 2, 3, 4), (0, 1, 2, 5), (2, 5, 8, 10)$ vektorrendszert $\mathbf{R}^4$ egy bázisává!