# Bevezetés a számításelméletbe I.

4. gyakorlat, 2006. október 4.

Salamon Gábor <gsala@cs.bme.hu>

# Determinánsok

24. Határozzuk meg a következő permutációkban az inverziók számát!
    (a) $5, 2, 4, 1, 6, 3$
    (b) $100, 99, \ldots, 1$
    (c) $2, 3, \ldots, 100, 1$
25. Mi a kapcsolat egy permutációnak és az inverzének az inverziószáma között?
26. Hogyan változik egy $n \times n$-es mátrix determinánsa, ha
    (a) a mátrixot transzponáljuk (a főátlóra tükrözzük);
    (b) a mátrix minden sorában az elemeket fordított sorrendben írjuk fel;
    (c) a mátrixot a mellékátlóra tükrözzük;
    (d) a mátrix minden elemét ellentettjére változtatjuk?
27. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét!

$$\begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

28. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát. A mátrix $n * n$-esek, a nem jelzett elemek értéke pedig 0.
    (a) $a[i, i] = 1$
    (b) $a[i, i] = A$
    (c) $a[i, i] = a[i, i+1] = a[n, 1] = 1, \quad n = 2k$
    (d) $a[i, j] = i + j - 1$
    (e) $a[i, j] = (i + j - 1)^2$
    (f) $a[i, j] = \min(i, j)$
    (g) $a[i, j] = \binom{i+j-1}{i-1}$
    (h) $a[i, i] = 2, \quad a[i, j] = 1$
    (i) $a[i, i] = A, \quad a[i, j] = B$
    (j) $a[i, j] = |i - j|$
    (k) $a[i, j : i + j \leqslant n + 1] = a[n, n] = 1$
    (l) $a[i, i-1] = a[i, i+1] = 1, \quad a[i, i] = 2$
    (m) $a[i, i-1] = a[i, i+1] = -1, \quad a[i, i] = 1$

29. Megválasztható-e $c$ értéke úgy, hogy az alábbi mátrix determinánsa ne nulla legyen?

$$\begin{pmatrix} c & c+1 & c+2 \\ c+3 & c+4 & c+5 \\ c+6 & c+7 & c+8 \end{pmatrix}$$

30. Van egy $nxn$-es mátrixunk, melynek az elemei egy kivételével rögzítettek. Igaz-e, hogy az utolsó elem mindig megválasztható úgy, hogy az így kitöltött mátrix determinánsa 0 legyen?

31. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

    (a) Ha egy $n \times n$-es mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a mátrix determinánsa 0.

    (b) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul a 0 elem.

    (c) Ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $k \times l$-es csupa 0 téglalap, és $k + l > n$, akkor a mátrix determinánsa 0.

    (d) Bármelyik $100 \times 100$-as mátrixban mindig van olyan elem, melynek megváltoztatásával elérhetjük, hogy a determináns értéke 0 legyen.

32. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n$ sorból és $n$ oszlopból álló mátrix, a $k$-adik sorának $j$-edik elemét jelölje $a_{kj}$. Legyen $\mathbf{B}$ az az $n \times n$-es mátrix, amelyben a $k$-adik sor $j$-edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j} a_{kj}$ $(1 \leq k, j \leq n)$. Mennyi $\mathbf{B}$ determinánsa, ha tudjuk, hogy $\mathbf{A}$ determinánsa 1?

33. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme egyjegyű, így sorai $n$-jegyű pozitív számként is olvashatóak. Mi több, az így kapott számok mindegyike osztható 2003-mal. Igaz-e, hogy a determináns is?

34. Egy $n * n$-es mátrix $(n \geqslant 2)$ minden eleme $\pm 1$. Igazoljuk, hogy determinánsa osztható $2^{n-1}$-nel.

35. Legyen $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy oszlopai, (mint n magas oszlopvektorok) akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha $det\mathbf{A} \neq 0$