

Bevezetés a számításelméletbe I.

5. gyakorlat, 2006. október 11.

Salamon Gábor <gsala@cs.bme.hu>

Mátrixműveletek

31. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- (a) Ha egy $n \times n$ -es mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a mátrix determinánsa 0.
- (b) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul a 0 elem.
- (c) Ha egy $n \times n$ -es mátrixban van egy $k \times l$ -es csupa 0 téglalap, és $k + l > n$, akkor a mátrix determinánsa 0.
- (d) Bármelyik 100×100 -as mátrixban mindig van olyan elem, melynek megváltoztatásával elérhetjük, hogy a determináns értéke 0 legyen.

36. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 13 & 24 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Végezd el a kijelölt mátrixműveletek közül azokat, amelyek értelmezve vannak: \mathbf{AB} , \mathbf{BA} , \mathbf{AC} , \mathbf{A}^2 , \mathbf{BD} , \mathbf{CD} , \mathbf{DC} , \mathbf{DE} , \mathbf{ED} , \mathbf{E}^{2002} , $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} + \mathbf{C}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $3\mathbf{D}$, \mathbf{EA} , \mathbf{EB} .

37. Igazak-e minden $n \times n$ -es \mathbf{A} , \mathbf{B} és \mathbf{C} mátrixokra az alábbiak?

- (a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$;
- (b) $(\mathbf{A} + \mathbf{E}_n) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{E}_n) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{E}_n^2$;
- (c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2$;
- (d) $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ és $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$;
- (e) $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det\mathbf{A} + \det\mathbf{B}$;

38. Az \mathbf{A} és \mathbf{B} $n \times n$ -es mátrixokról tudjuk, hogy $\det\mathbf{A} \neq 0$, valamint $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ (a csupa 0 mátrix). Határozzuk meg a \mathbf{B} mátrix értékét!

39. Legyen \mathbf{A} egy olyan mátrix, amelynek minden sorában és oszlopában az elemek összege 0, \mathbf{B} pedig egy olyan mátrix, amelynek minden eleme egyenlő. Mi lesz az \mathbf{AB} illetve a \mathbf{BA} szorzat, ha a szorzás elvégezhető?

40. Adjuk meg azokat a másodrendű valós mátrixokat, amelyek négyzete a nullmátrix.

41. Mutassuk meg, hogy tetszőleges szigorú felső háromszögmátrixnak valamelyik pozitív egész kitevős hatványa nullmátrix.

42. Határozd meg az alábbi egyenletekből az ismertelen \mathbf{X} és \mathbf{Y} mátrixokat!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 17 & 24 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 10 & 10 & 16 \\ 1 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

43. Legyen $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (2, 5, 7)$ és $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$. Számítsd ki az

- (a) \mathbf{ab} skalárszorzatot!

(b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzatot!

(c) $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ vegyesszorzatot!

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ determinánst!

44. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az alábbi három pontra: $P = (-1, 8, 0)$, $Q = (3, 4, 7)$,
 $R = (5, -2, 3)$.