Bevezetés a számításelméletbe I.

6. gyakorlat, 2006. október 18.

Salamon Gábor <gsala@cs.bme.hu>

Az oktober 25-i gyakorlat 16:00-kor kezdodik.

Mátrix rangja, inverze

45. Számítsd ki az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét!

46. Határozd meg az alábbi egyenletből az ismertelen $\mathbf{X}$ mátrixot!
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}$

47. Határozd meg a következő mátrixok rangját!
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$

48. Legyen $\mathbf{A}$ egy 6×5-ös mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
    (a) Ha az első 3 sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldeterminéns 0.
    (b) Ha a bal felső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első 3 sor lineárisan összefüggő.
    (c) Ha az első 3 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 3 oszlop is lineárisan összefüggő, akkor $r(\mathbf{A}) \leq 3$.
    (d) Ha az első 2 oszlop lineárisan összefüggő, és az utolsó 2 oszlop is lineárisan összefüggő, akkor $r(\mathbf{A}) \leq 3$.

49. Határozzuk meg x minden értékére az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}$ mátrix rangját!

50. Egy 100×100-as R feletti mátrix rangja 50. Elérhető-e mindig egy alkalmas elem megváltoztatásával, hogy a rang 49-re, illetve 51-re változzon?

51. Legyenek A és B $n \times n$-es mátrixok. Tudjuk, hogy $detB \neq 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor $r(AB) = r(A)$!

52. Az $n \times n$-es A mátrixra teljesül, hogy $A^2 + A + E = 0$. Igazoljuk, hogy az A mátrixnak létezik inverze!

53. Legyenek A és B $n \times n$-es mátrixok. Tudjuk, hogy $AB = A$ és $BA = B$. Mutassuk meg, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$!

54. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrix minden eleme 0, 1, vagy -1, és minden sorban ugyanannyi 1 van, mint ahány -1, akkor A nem invertálható!