Bevezetés a számításelméletbe I.

7. gyakorlat, 2003. október 25.

Salamon Gábor <gsala@cs.bme.hu>

Lineáris leképezések

55. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Írd fel az alábbi $\varphi : V \to V$ lineáris leképezések mátrixát a szokásos $\{(1,0),(0,1)\}$ bázisban!
    (a) az y tengelyre való tükrözés;
    (b) az origó körüli $+60°$–os forgatás;
    (c) előbb egy y tengelyre való tükrözés, majd egy origó körüli $+60°$–os forgatás.

56. Az 55. feladatbeli transzformációk esetén írd fel a mátrixot az $\mathbf{i}, \mathbf{e}$ bázisban, ahol $\mathbf{e}$ egységvektor $120°$-os szöget zár be $\mathbf{i}$-vel.

57. Mik azok a geometriai transzformációk, melyeknek mátrixa az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban:
    (a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

58. Legyen V a síkbeli vektorok szokásos vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi V-ből V-be menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a mátrixukat az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisokban, add meg kép- és magterüket és ezek dimenzióját!

    Minden $\mathbf{v} \in V$ vektornak feleltessük meg:
    (a) az x-tengelyre vett tükörképét;
    (b) azt az x-tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája $\mathbf{v}$ koordinátái közül a nagyobb;
    (c) azt az x-tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája $\mathbf{v}$ koordinátáinak az összege;
    (d) az $y = x$ egyenesre való vetületét.

59. Legyen P_5 a legfeljebb ötödfokú valós együtthatós polinomok tere. Vegyük azt az $f : P_5 \to P_5$ leképezést, melynél $f(p(x)) = \alpha \cdot p'(x) + \beta$ valamely rögzített α, β valós számokra. Határozzuk meg az összes olyan α, β párt, amelyre az f leképezés lineáris lesz. Ha f lineáris leképezés, adjuk meg egy mátrixát is.

60. Mi a képtere, magtere a szokásos háromdimenziós tér alábbi lineáris transzformációinak?
    (a) Az identitás-transzformáció.
    (b) A zérus-transzformáció.
    (c) Az x-tengelyre való vetítés.
    (d) Az y-z síkra való vetítés.

61. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ről V_2-be. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
    (a) Ha $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\{\mathcal{A}\mathbf{v}_1, \mathcal{A}\mathbf{v}_2, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{v}_k\}$ is generátorrendszer V_2-ben;
    (b) Ha $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\{\mathcal{A}\mathbf{v}_1, \mathcal{A}\mathbf{v}_2, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{v}_k\}$ is generátorrendszer $\mathrm{Im}\mathcal{A}$-ban;
    (c) Ha $\{\mathcal{A}\mathbf{v}_1, \mathcal{A}\mathbf{v}_2, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{v}_k\}$ generátorrendszer $\mathrm{Im}\mathcal{A}$-ban, akkor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ generátorrendszer V_1-ben;
    (d) Ha $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineárisan független V_1-ben, akkor $\{\mathcal{A}\mathbf{v}_1, \mathcal{A}\mathbf{v}_2, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{v}_k\}$ is lineárisan független V_2-ben;

(e) Ha $\{\mathcal{A}\mathbf{v}_1, \mathcal{A}\mathbf{v}_2, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{v}_k\}$ lineárisan független V_2-ben, akkor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ is lineárisan független V_1-ben;

62. Igazoljuk, hogy bármely A lineáris leképezés esetén tetszőleges $\underline{u}, \underline{v}$ vektorokra $A(\underline{u}) = A(\underline{v})$ akkor és csak akkor igaz, ha $\underline{u} - \underline{v} \in KerA$.

63. Tudjuk, hogy egy A lineáris transzformáció magtere csak a nullvektorból áll. Igazoljuk az alábbi állításokat:

    (a) Tetszőleges nemnulla vektor képe nem nullvektor.

    (b) Bármely két vektor képe különböző.

    (c) A képtér dimenziója megegyezik a kiindulási vektortér dimenziójával.

64. Legyen az A mátrix által a V vektortéren megvalósított lineáris transzformáció olyan, hogy $KerA$ tartalmazza ImA-t. Mutassuk meg, hogy ekkor $A^2 = 0$.