Bevezetés a számításelméletbe I.

8. gyakorlat, 2006. november 8.

Salamon Gábor <gsala@cs.bme.hu>

Sajátérték, sajátvektor

65. Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, -vektorait és -altereit.

 (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

 (b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

 (c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

66. Tekintsük a legfeljebb hatodfokú $p(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinomok vektorterét. Határozzuk meg az ebben a vektortérben értelmezett következő lineáris transzformációk sajátdolgait.

 (a) $p(x) \to 0$

 (b) $p(x) \to a_6x^6 + a_5x^5$

 (c) $p(x) \to p'(x)$

67. Mik egy A mátrixszal adott vetítés lehetséges sajátértékei? (Egy transzformáció vetítés, ha A mátrixára $A^2 = A$).

68. Adjuk meg annak a lineáris transzformációnak a sajátértékeit és a hozzá tartozó sajátvektorokat, amely az x és y tengelyeket felcseréli, a z tengely irányában pedig mindent a kétszeresére nyújt.

69. Tekintsük azt a lineáris transzformációt, amely a négydimenziós tér bázisvektorait ciklikusan egymásba viszi át. Mik ennek a transzformációnak a sajátdolgai?

70. Tudjuk, hogy az A mátrixnak sajátértéke λ. Igazoljuk, hogy a $B = A^2 + 2E$ mátrixnak sajátértéke a $\lambda^2 + 2$.

71. Bizonyítsuk be, hogy ha az A invertálható mátrixnak sajátértéke a $\lambda \neq 0$ szám, akkor A^{-1}-nek sajátértéke $\frac{1}{\lambda}$.

72. Mutassuk meg, hogy az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & 2p \end{pmatrix}$ mátrixszal adott lineáris transzformációnak bármely p esetén 3 különböző valós sajátértéke van. $p = 2$ esetén határozzuk meg a sajátvektorokat is.