Differenciálegyenletek

Ebben a részben I legyen mindig pozitív hosszúságú intervallum

Definíció: differenciálegyenlet

Ha $D \subset R^{n+1}$ nyílt halmaz, $f:D \rightarrow R$ folytonos függvény, akkor az

$$y^{(n)}(x) = f\,(\,x\,,\,y(x)\,,\,y'(x)\,,\,\ldots\,,\,y^{(n-1)}(x)\,)$$

egyenletet n-edrendű közönséges explicit differenciál-egyenletnek nevezzük.

Megjegyzés:

Mivel a továbbiakban csak közönséges explicit differenciál-egyenletekkel foglalkozunk, ezért e két jelzőt a továbbiakban nem fogjuk kiírni.

Elsőrendű differenciálegyenlet

Az elsőrendű (közönséges explicit) differenciálegyenletek általános alakja:

$$\boxed{y'(x) = f\,(\,x\,,\,y(x)\,)}$$

Másodrendű differenciálegyenlet:

A másodrendű (közönséges explicit) differenciálegyenletek általános alakja:

$$\boxed{y''(x) = f\,(\,x\,,\,y(x)\,,\,y'(x)\,)}$$

Példa: Newton II. törvénye

$$m \cdot a(t) = F(t, s(t), v(t))$$

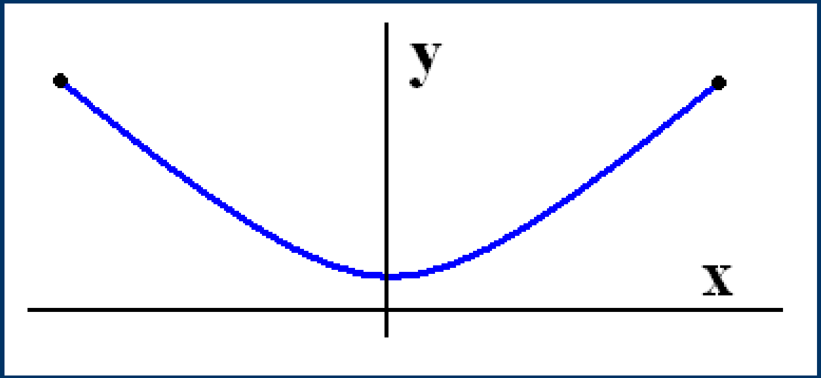
Mivel a sebesség-idő függvény az út-idő függvény első deriváltja ($v(t)=s'(t)$), a gyorsulás-idő függvény pedig a második deriváltja ($a(t)=s''(t)$), Newton II. törvénye az út-idő függvényre egy másodrendű differenciálegyenlet:

$$s''(t) = \frac{1}{m} F(t, s(t), s'(t)) = f(t, s(t), s'(t))$$

Példa: felfüggesztett kötél

Két végén felfüggesztett, hajlékony, nyújthatatlan kőtél alakját leíró függvény (y(x)) a következő differenciál-egyenletnek tesz eleget:

$$y''(x) = k \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$$



Definíció: differenciálegyenlet megoldása

A $\varphi : I \to \mathbf{R}$ függvény megoldása az

$$y^{(n)}(x) = f\,(\,x\,,\,y(x)\,,\,y'(x)\,,\,\dots\,,\,y^{(n-1)}(x)\,)$$

n-edrendű differenciálegyenletnek, ha

- **φ n-szer differenciálható az I-n**
- **$(\,x\,,\,\varphi(x)\,,\,\varphi'(x)\,,\,\dots\,,\,\varphi^{(n-1)}(x)\,) \in D_f$, ha $x \in I$**
- **$\varphi^{(n)}(x) = f\,(\,x\,,\,\varphi(x)\,,\,\varphi'(x)\,,\,\dots\,,\,\varphi^{(n-1)}(x)\,)$, ha $x \in I$.**

Definíció: kezdeti érték probléma

Legyen $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in D$. Az

$$y^{(n)}(x) = f\,(\,x\,,\,y(x)\,,\,y'(x)\,,\,\ldots\,,\,y^{(n-1)}(x)\,)$$

d.e.-re vonatkozó kezdeti érték problémán azt a feladatot értjük, amikor az egyenletnek azokat a $\varphi : I \to \mathbb{R}$ megoldásait keressük, melyekre:

- $x_0 \in I$
- $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, $\varphi''(x_0) = y_2$, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Megjegyzés

A feltételek száma azonos a d.e. rendjével.

Tétel

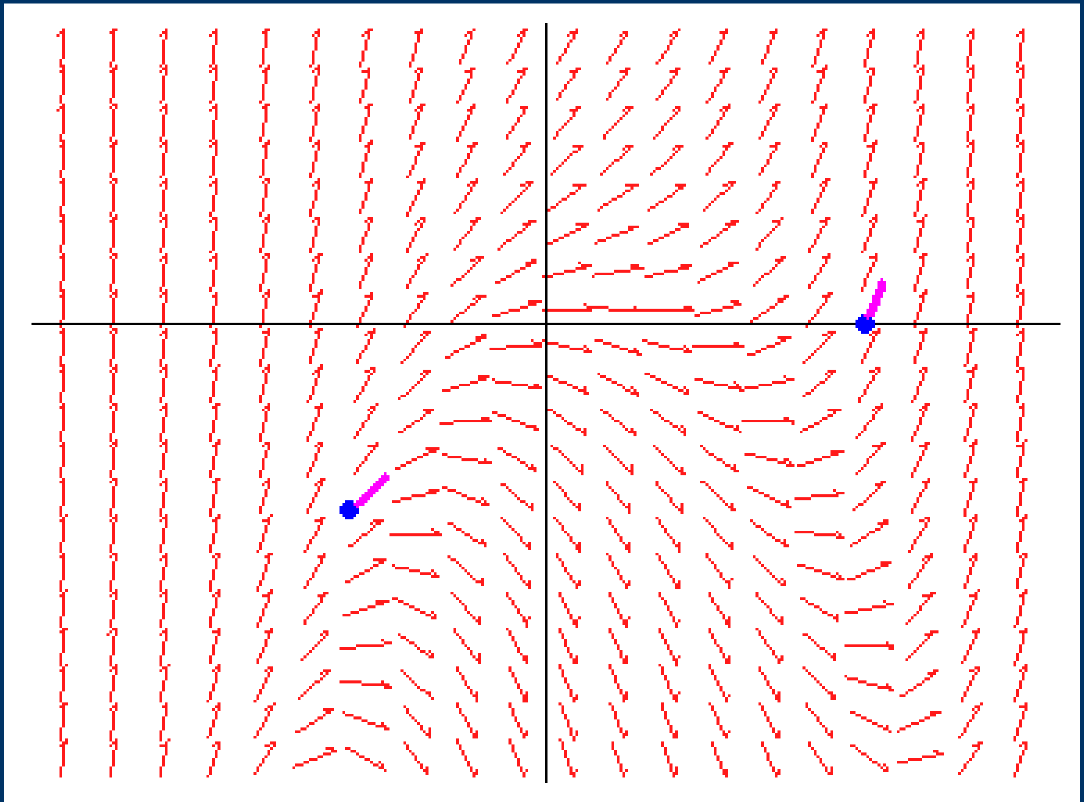
Ha a differenciálegyenletben szereplő f függvény folytonos, akkor az k.é.p.-nak van megoldása.

Tétel

Ha a differenciálegyenletben szereplő f függvény folytonosan differenciálható (azaz az f összes elsőrendű parciális derivált függvénye folytonos), akkor a k.é.p.-nak pontosan egy megoldása van.

Iránymező

$$y'(x) = y(x) + x^2 - x$$



$P_1=(-1,-1)$

$x= -1,\ y= -1 \Rightarrow y' = 1$

$P_2=(2,0)$

$x= 2,\ y= 0 \Rightarrow y' = 2$

A megoldásfüggvények:

$$y(x) = c \cdot e^x - x^2 - x - 1, \quad c \in \mathbb{R}$$

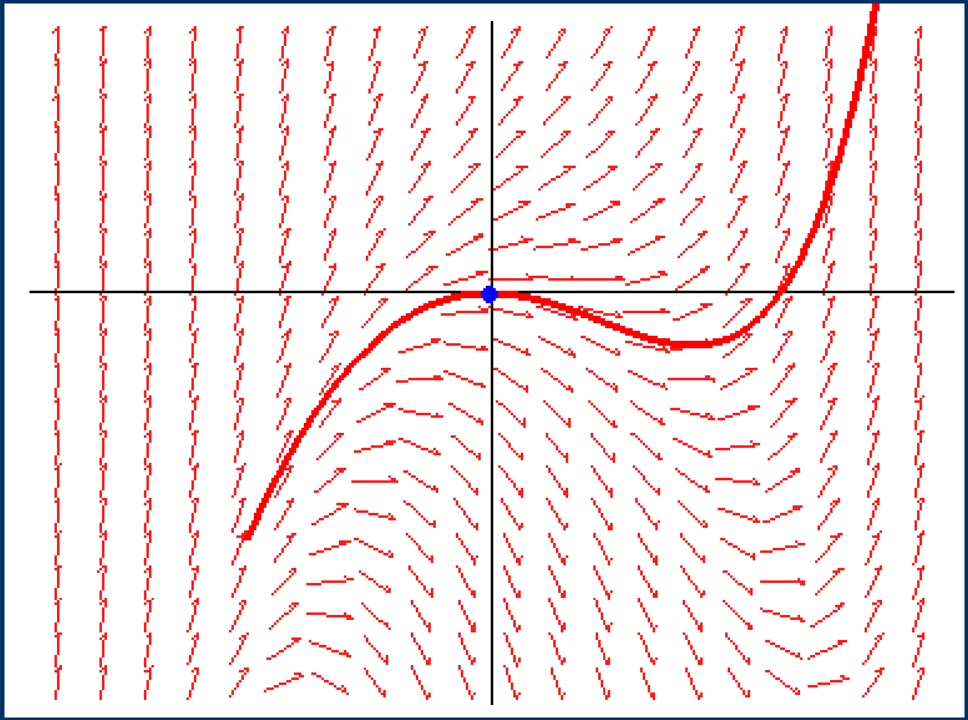
$$y(x) = c \cdot e^{x} - x^{2} - x - 1, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Az y(0)=0 kezdeti értéknek megfelelő megoldásfüggvény:

$$c \cdot e^{0} - 0^{2} - 0 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow c = 1$$

$$y(x) = e^{x} - x^{2} - x - 1$$



Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Ha a $g:]a,b[\to \mathbf{R}$ és a $h:]c,d[\to \mathbf{R}$ függvények folytonosak, akkor az

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

típusú elsőrendű differenciálegyenleteket szétválasztható változójú (vagy szeparábilis) differenciálegyenleteknek nevezzük.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldásának formális lépései

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)\, dx$$

Példa:

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int x\, dx$$

Példa:

$$y'(x) = x \cdot y^2(x) + x \quad , \qquad y(0) = 1.$$

$$y'(x) = x \cdot (y^2(x) + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y^2 + 1)$$

$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int x \, dx$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

A k.é.p. megoldása:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} c = 1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Megjegyzések

1. **A fenti módszerrel általában csak implicit alakban kaphatók meg a megoldásfüggvények.**

2. **A differenciálegyenlet formális megoldása után meg kell vizsgálni, hogy a kapott függvény hol értelmezhető, és mely intervallumokon lesz ténylegesen megoldása az egyenletnek. Az előző példában kapott függvény megoldása a d.e.-nek minden olyan intervallumon, melyet az**

$$\left\{ x \in R \,\middle|\, \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \right\}$$

halmaz tartalmaz.

Megjegyzés

Az y'(x) = f (x,y(x)) típusú differenciálegyenletek között speciális esetként szerepelnek a legegyszerűbb elsőrendű egyenletek az

$$y'(x) = f(x)$$

típusú differenciálegyenletek.

Itt a megoldásfüggvények az ∫f határozatlan integrál függvényei.

Példa

$$y'(x) = x^2 - x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \int (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$$

Példa

120 °C-os test hőmérséklete 30 °C-os környezeti hőmérséklet mellett 10 perc alatt 60 °C-ra csökkent. Mennyi idő alatt csökken a test hőmérséklete 40 °C-ra ?

A kérdés megválaszolásához meg kell határozni a hűlést jellemző hőmérséklet-idő függvényt.

Jelölje T a hőmérsékletet, t az időt!

Azzal a legegyszerűbb feltevéssel élve, hogy a hűlés sebessége csak a kenyér és a környezet hőmérsékletkülönbségétől függ, mégpedig azzal egyenesen arányos azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = -k \cdot (T(t) - 30)$$

ahol k az anyagra jellemző állandó.

A $\Delta t \to 0$ határértéket véve:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(-k \cdot (T(t) - 30)\right)$$

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - 30)$$

vagyis a T(t) függvényre egy elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk. Ennek megoldása:

$$\int \frac{1}{T-30} dT = -k \cdot \int 1 dt$$

$$\ln(T-30) = -kt + c$$

$$T(t) = e^{-kt+c} + 30$$

A k és a c konstansok értéke a feladatban közölt információk alapján meghatározható. A T(0)=120 és a T(10)=60 feltételekből a következő egyenletrendszer adódik:

$$
\begin{array}{lll}
T(0) = 120 & \Rightarrow & \text{I.} \quad 60 = e^{-10k+c} + 30 \\
T(10) = 60 & \Rightarrow & \text{II.} \quad 120 = e^{c} + 30
\end{array}
$$

$$\Rightarrow c = \ln 90\,,\ \ k = (\ln 3)/10$$

Így a feladat megoldása:

$$T(t) = e^{-\frac{\ln 3}{10}t + \ln 90} + 30$$

$$T(t) = e^{-\frac{\ln 3}{10}t + \ln 90} + 30$$

A feladat jellegéből adódóan $t \in [0,+\infty)$. Mennyi idő alatt csökken a test hőmérséklete (a kezdeti 120 °C –ról) 40 °C -ra ?

$$40 = e^{-\frac{\ln 3}{10}t + \ln 90} + 30$$

$\Rightarrow$ t = 20 (perc).

Lineáris differenciálegyenletek

Definíció

Ha a g_0, g_1, … , g_{n-1}, h : I → R függvények folytonosak, akkor az

$$y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + g_2(x)\cdot y''(x) +$$
$$+ g_1(x)\cdot y'(x) + g_0(x)\cdot y(x) = h(x)$$

d.e.-et n-edrendű lineáris differenciálegyenleteknek nevezzük.

Definíció

Ha h(x) = 0, akkor homogén, különben inhomogén lineáris egyenletről beszélünk.

Megjegyzések

1. Ha egy inhomogén egyenletben a h függvény helyébe a konstans 0 függvényt írjuk, akkor inhomogén egyenlet homogén megfelelőjét kapjuk. A későbbiekben látni fogjuk, hogy az inhomogén egyenletek megoldásai szoros kapcsolatban állnak a homogén megfelelő megoldásaival.

2. Az alkalmazások szempontjából a lineáris differenciálegyenletek a legfontosabbak közé tartoznak.

Példák lineáris differenciálegyenletre

1. NEWTON II. EGYENLET - CSILLAPÍTOTT REZGÉS

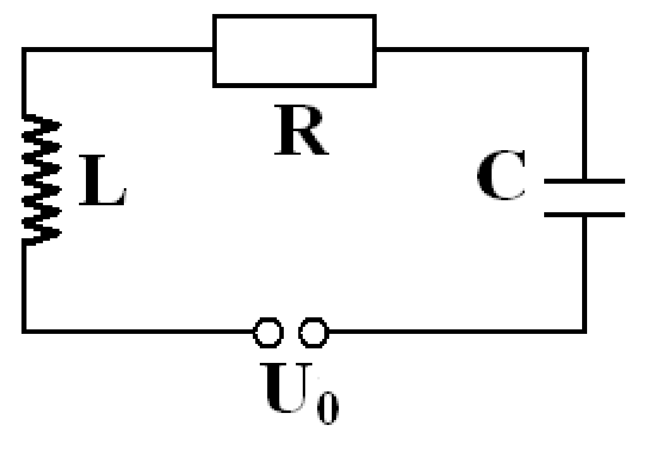
Egy D rugóállandójú rugóhoz rögzített m tömegű test rezgésének kitérés-idő függvénye (y(t)), a sebességgel arányos közegellenállás esetén (arányossági tényező: f) a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$y''(t) + \frac{f}{m} y'(t) + \frac{D}{m} y(t) = 0$$

Példák lineáris differenciálegyenletre

2. SOROS R-L-C KÖR

Konstans U_0 feszültség rákapcsolásával a körben kialakuló áramerősség függvény (i(t)) a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:



$$i''(t) + \frac{R}{L} \cdot i'(t) + \frac{1}{CL} \cdot i(t) = 0$$

A lineáris differenciálegyenletek megoldásairól

Definíció: lineárisan független függvényrendszer

A $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ függvényrendszert lineárisan függetlennek nevezünk, ha a rendszer egyik elemét sem lehet a többi elem lineáris kombinációjaként előállítani.

Tétel: homogén lineáris differenciálegyenlet alaprendszere

Minden n-edrendű a lineáris homogén differenciál-egyenletek létezik n darab olyan megoldásfüggvénye, melyek lineárisan független rendszert alkotnak.

Egy ilyen $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ függvényrendszert a lineáris homogén differenciálegyenlet alaprendszerének nevezzük.

Definíció: a homogén egyenlet általános megoldása

Ha a $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$ függvényrendszer egy lineáris homogén differenciálegyenlet alaprendszere, akkor e függvények bármely

$$c_1\cdot \varphi_1+c_2\cdot \varphi_2+\ldots+c_n\cdot \varphi_n$$

lineáris kombinációja szintén megoldása az egyenletnek.

E függvények összességét (ami végtelen sok függvényt tartalmaz) nevezzük a lineáris homogén differenciálegyenlet általános megoldásának:

$$y_H = c_1\cdot \varphi_1+c_2\cdot \varphi_2+\ldots+c_n\cdot \varphi_n, \qquad c_1, c_2, \ldots c_n \in \mathbf{R}$$

Definíció: az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása

Egy lineáris inhomogén differenciálegyenlet egy konkrét megoldásfüggvényét partikuláris megoldásnak nevezzük.

Tétel: az inhomogén egyenlet általános megoldása

Ha y_H egy lineáris inhomogén differenciálegyenlet homogén megfelelőjének általános megoldása, y_p pedig az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, akkor az inhomogén egyenlet megoldásai éppen az

$$y_{IH} = y_H + y_p$$

alakú függvények. E függvények összességét a lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldásának nevezzük.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása

Ha a h:I→R és a g:I→R függvények folytonosak, akkor az

$$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$$

egyenletet elsőrendű lineáris inhomogén d.e.-nek, az

$$y'(x) + g(x) \cdot y(x) = 0$$

egyenletet elsőrendű lineáris homogén d.e.-nek nevezzük.

A homogén egyenlet megoldása

Tétel:

Az $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = 0$ homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\int g(x)\,dx}, \quad c \in R$$

Példa:

$$\mathbf{y'(x) - x \cdot y(x) = 0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g(x) = -x}$$

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\int g(x)\,dx} = c \cdot e^{\int x\,dx} = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

A lineáris differenciálegyenletek általános tárgyalásakor korábban megfogalmazottak szerint:

Az y'(x) + g(x) · y(x) = h(x) differenciálegyenletet egy konkrét megoldását partikuláris megoldásnak nevezzük.

Az y'(x) + g(x) · y(x) = h(x) inhomogén lineáris differenciálegyenletet általános megoldása:

$$y_{IH} = y_H + y_p$$

ahol y_H az y'(x) + g(x) · y(x) = 0 egyenlet általános megoldása, y_p pedig az inhomogén egyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldása.

A partikuláris megoldás meghatározása konstansvariálással

Az inhomogén egyenlet y_p partikuláris megoldásának meghatározására több módszert ismert.

Ezek közül itt a ún. konstansvariálás módszert mutatjuk be, mely a homogén megfelelő általános megoldásának ismeretében szolgáltatja az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

A konstansvariálás lépései

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\int g(x)dx} \Rightarrow y_p(x) = k(x) \cdot e^{-\int g(x)dx}$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) + g(x) \cdot y(x) = h(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{-\int g(x)dx} + k(x) \cdot e^{-\int g(x)dx} \cdot (-g(x)) + g(x) \cdot k(x) \cdot e^{-\int g(x)dx} = h(x)$$

$$k'(x) \cdot e^{-\int g(x)dx} = h(x) \Rightarrow k'(x) = h(x) \cdot e^{\int g(x)dx}$$

$$\Rightarrow \quad k(x) = \int h(x) \cdot e^{\int g(x)dx} dx \Rightarrow \boxed{y_p}$$

Példa

IH $y'(x) - x \cdot y(x) = x^3 \quad , \quad y(0) = 1$

H $y'(x) - x \cdot y(x) = 0$

$\Rightarrow$ $g(x) = -x$, $h(x) = x^3$

$$y_H(x) = c \cdot e^{-\int g(x)dx}$$

$$y_H(x) = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y_p(x) = k(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \text{IH}$$

$$\Rightarrow k'(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = x^3 \Rightarrow k'(x) = x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$k(x) = \int x^3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -(x^2 + 2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y_p$$

$$y_p(x) = k(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -(x^2+2)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{\frac{x^2}{2}} = -(x^2+2)$$

$$y_{IH}(x) = y_H(x) + y_p(x) = c\cdot e^{\frac{x^2}{2}} - (x^2+2)$$

A k.é.p. megoldása:

$$y(0)=1 \Rightarrow\ c-2=1 \Rightarrow c=3$$

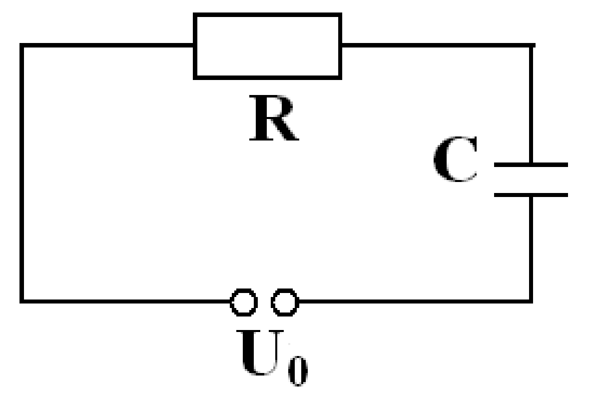
$$y(x) = 3\cdot e^{\frac{x^2}{2}} - (x^2+2)$$

Példa: soros R-C kör konstans feszültséggel

Kérdés: soros R-C körre U_0 konstans feszültséget kapcsolva a körben folyó áram erőssége hogyan függ az időtől?

Az áramerősség-idő függvény a következő elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$i'(t) + \frac{1}{RC} \cdot i(t) = 0$$



A feszültség rákapcsolásakor az áramerősség:

$$i(0) = \frac{U_0}{R}$$

Ennek általános megoldása:

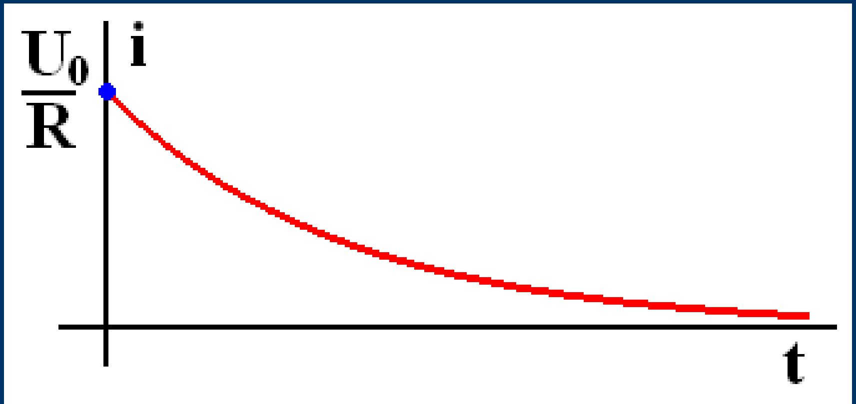
$$i(t) = i_H(t) = c \cdot e^{-\int \frac{1}{RC} dt} = c \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

A kezdeti értéket figyelembe véve:

$$i(0) = \frac{U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{U_0}{R}$$

A probléma megoldása:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

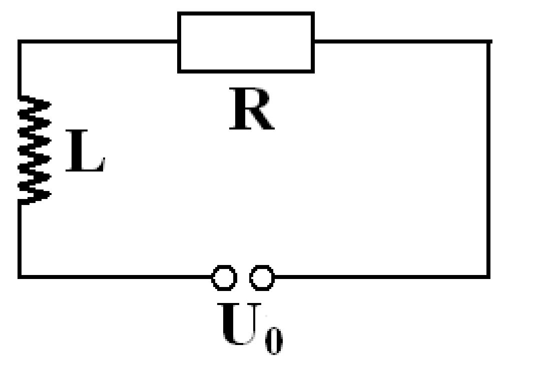


Példa: soros R-L kör konstans feszültséggel

Kérdés: soros R-L körre U_0 konstans feszültséget kapcsolva a körben folyó áram erőssége hogyan függ az időtől?

Az áramerősség-idő függvény a következő elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$i'(t) + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{U_0}{L}$$



A feszültség rákapcsolásakor az áramerősség 0. Ezt az $i(0) = 0$ kezdeti érték feltétellel lehet figyelembe venni.

Az egyenlet homogén megfelelője:

$$i'(t)+\frac{R}{L}\cdot i(t)=0$$

Ennek általános megoldása:

$$i_H(t)=c\cdot e^{-\int\frac{R}{L}dt}=c\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

Az eredeti (inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$i_p(t)=k(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

a k függvényt konstansvariálással határozzuk meg:

$$k'(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=\frac{U_0}{L} \quad\Rightarrow\quad k'(t)=\frac{U_0}{L}\cdot e^{\frac{R}{L}\cdot t} \quad\Rightarrow$$

$$k(t)=\frac{U_0}{R}\cdot\int e^{\frac{R}{L}\cdot t}dt=\frac{U_0}{R}\cdot\frac{e^{\frac{R}{L}\cdot t}}{\frac{R}{L}}=\frac{U_0}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}\cdot t}$$

Ebből a partikuláris megoldás:

$$i_p(t)=k(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=\frac{U_0}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}\cdot t}\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=\frac{U_0}{R}$$

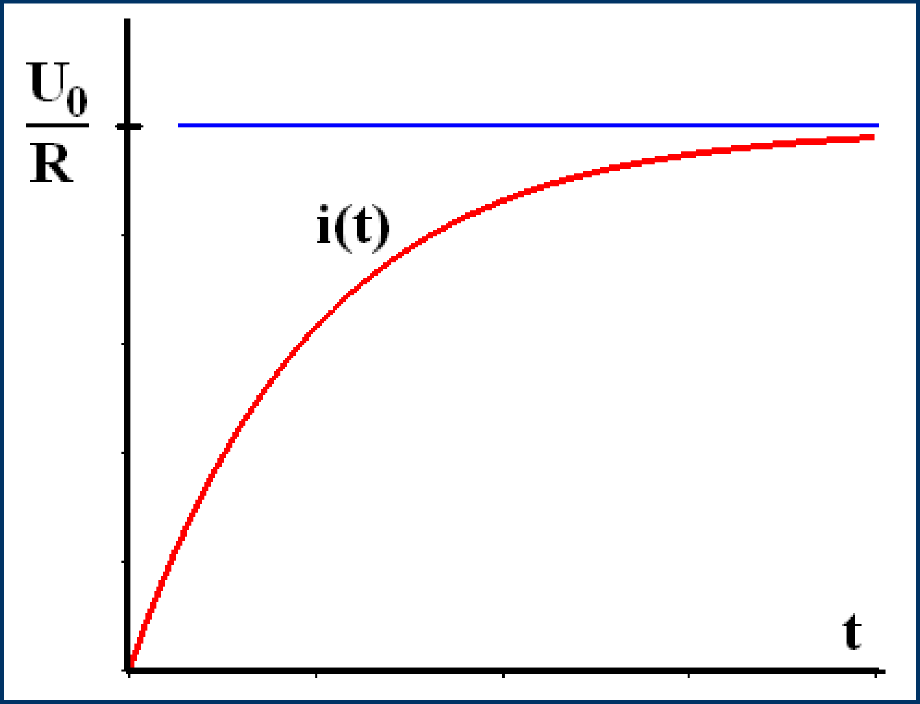
Az inhomogén egyenlet általános megoldása pedig:

$$i_{IH}(t)=i_H(t)+i_p(t)=c\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}+\frac{U_0}{R}$$

$$i_{IH}(t) = i_H(t) + i_p(t) = c \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{R}$$

i(0) = 0 $\Rightarrow$ $$0 = c + \frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow \quad c = -\frac{U_0}{R}$$



A probléma megoldása:

$$i(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

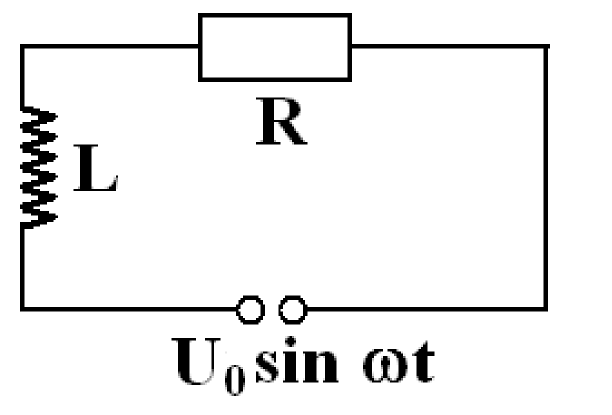
Példa: soros R-L kör váltakozó feszültséggel

A Sorosan kapcsolunk egy R ellenállást, egy L induktivitású tekercset és egy U·sin(ωt) függvény szerint időben változó feszültségforrást.

Határozzuk meg az áramerősséget az idő függvényében tudván, hogy a t=0 időpillanatban az áramerősség nulla, azaz i(0)=0.

A fizikából ismeretes, hogy a feladatban leírt esetben az áramerősség-idő függvény (i(t)) eleget tesz az

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=U\sin(\omega t)$$



d.e.-nek. Az egyenletet elosztva L-lel az

IH $$i'(t)+\frac{R}{L}i(t)=\frac{U}{L}\sin(\omega t)$$

lineáris inhomogén d.e.-hez jutunk, ahol $g(t)=\frac{R}{L}$ $h(t)=\frac{U}{L}\sin(\omega t)$

Az

H $$i'(t)+\frac{R}{L}i(t)=0$$

homogén egyenlet általános megoldása:

$$i_H(t)=c\cdot e^{-\int g(t)dt}=c\cdot e^{-\int\frac{R}{L}dt}=c\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

A konstansvariálás módszert alkalmazva az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$c(x)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

alakban keressük. Ezt a függvényt az inhomogén egyenletbe helyettesítve a c függvényre a

$$c'(t)=\frac{U}{L}\sin(\omega t)\cdot e^{\frac{R}{L}t}$$

d.e. adódik. Ebből (a parciális integrálási módszert alkalmazva):

$$c(t)=\frac{U}{L}\int\sin(\omega t)\cdot e^{\frac{R}{L}t}dt=\frac{U}{R^2-L^2\omega^2}(R\sin\omega t-L\omega\cos\omega t)\cdot e^{\frac{R}{L}t}$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása:

$$i_p(t) = c(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}T} = \frac{U}{R^2 - L^2\omega^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t)$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$i_{IH}(t) = i_H(t) + i_p(t) = c\cdot e^{-\frac{R}{L}T} + \frac{U}{R^2 - L^2\omega^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t)$$

A k.é.p. megoldása:

$$i(t) = \frac{U}{R^2 - L^2\omega^2}(L\omega e^{-\frac{R}{L}t} + R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t)$$

Bernoulli-féle differenciálegyenletek

Ha g,h:I→R folytonos függvények, $\alpha\in$R, $\alpha\neq 1$, akkor az

$$y'(x) + g(x)\cdot y(x) = h(x)\cdot y^{\alpha}(x)$$

egyenletet Bernoulli-féle d.e.-nek nevezzük.

(A függvény értelmezési problémák elkerülése végett feltételezzük, hogy az y függvény nemnegatív értékkészletű!)

A Bernoulli-féle d.e.-ek a következő eljárással visszavezethetők lineáris d.e.-ekre:

1. Szorozzuk meg az egyenletet $(1-\alpha)\cdot y(x)^{-\alpha}$-val:

$$(1-\alpha)\cdot y(x)^{-\alpha}\cdot y'(x) + g(x)\cdot(1-\alpha)\cdot y^{1-\alpha}(x) = (1-\alpha)\cdot h(x).$$

2. Észrevéve, hogy $(y^{1-\alpha})' = (1-\alpha)\cdot y^{-\alpha}\cdot y'$, alkalmazzuk a

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

helyettesítést. Így a z függvényre a

$$z'(x) + g(x)\cdot(1-\alpha)\cdot z(x) = (1-\alpha)\cdot h(x)$$

lineáris d.e.-et kapjuk. Ezt az egyenletet megoldva, a kapott z megoldásfüggvényből a keresett y függvény meghatározható.

Példa:

$$y'(x) + y(x) = -\frac{1}{y(x)}, \quad y(0) = 1$$

$(y \geq 0)$

Itt $\alpha = -1$, így az egyenletet 2y(x)-szel kell szorozni:

$$2y(x)\cdot y'(x) + 2y^2(x) = -2.$$

A $z(x) = y^2(x)$ helyettesítést alkalmazva a

$$z'(x) + 2z(x) = -2$$

inhomogén lineáris d.e.-et kapjuk. Ennek általános megoldása:

$$z(x) = c\cdot e^{-2x} - 1.$$

A z definíciója alapján ebből:

$$y^2(x) = c \cdot e^{-2x} - 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \sqrt{c \cdot e^{-2x} - 1}$$

A k.é.p. megoldása:

$$y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad 1=\sqrt{c-1}$$

$$\Rightarrow \quad y(x)=\sqrt{2e^{-2x}-1} \qquad x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\ln 2\right[$$

Néhány másodrendű differenciálegyenlet-típus megoldása

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

$y''(x) = f(x, y'(x))$ típusú differenciálegyenletek

Ha I és J intervallumok, $f: I \times J \to R$ folytonos függvény, akkor az

$$y''(x) = f(x, y'(x))$$

alakú d.e.-ek megoldása a $p(x) = y'(x)$ jelöléssel visszavezethető két elsőrendű d.e. megoldására az alábbiak szerint:

$$y''(x) = f\,(\,x\,,\,y'(x)\,)$$

$$\Downarrow \qquad y'(x) = p(x) \qquad y''(x) = p'(x)$$

I. $p'(x) = f\,(\,x\,,\,p(x)\,)$ $\Rightarrow$ $p(x)$

$$\Downarrow$$

II. $y'(x) = p(x)$ $\Rightarrow$ $y(x)$

Példa: $y''(x) = y'(x) + e^x, \quad y'(0)=1, \quad y(0)=1$

$$y''(x) = y'(x) + e^x$$

$\Downarrow$ $y'(x) = p(x)$ $\quad$ $y''(x) = p'(x)$

I. $p'(x) - p(x) = e^x$ (elsőrendű lineáris inhomogén d.e.)

$$p_H(x) = c_1 \cdot e^{\int 1dx} = c_1 \cdot e^x$$

$$p_p(x) = k(x) \cdot e^x$$

$$k'(x) \cdot e^x = e^x$$

$$k'(x) = 1 \Rightarrow k(x) = x$$

$$p_p(x) = x \cdot e^x$$

$$p(x) = c_1 e^x + x \cdot e^x$$

II. $y'(x) = c_1 \cdot e^x + x \cdot e^x$

$$y(x) = \int (x \cdot e^x + c_1 \cdot e^x)\, dx =$$
$$= \int (x+c_1) \cdot e^x\, dx = (x-1+c_1) \cdot e^x + c_2$$

A k.é.p. megoldása:

$y'(x) = (x+c_1) \cdot e^x$

$y'(0) = 1 \Rightarrow c_1=1$

$y(x) = (x-1+c_1) \cdot e^x + c_2$

$y(0) = 1 \Rightarrow c_2=1$

$$\Rightarrow \quad y(x) = x \cdot e^x + 1$$

Megjegyzés:

Az y”(x) = f (x,y’(x)) típusú differenciálegyenletek között speciális esetként szerepelnek a legegyszerűbb másodrendű egyenletek az

$$y''(x) = f(x)$$

típusú differenciálegyenletek.

A előbbiekben leírt megoldási módszert követve látható, hogy két y’(x)=f(x) típusú egyenletet kell megoldani, azaz két integrálással eredményre lehet jutni.

Példa: $y''(x)=\sqrt{x}\ ,\quad y(1)=4,\quad y'(1)=2$

$$y'(x)=\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_1=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c_1$$

$$y(x)=\int\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_1\right)dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}+c_1\cdot x+c_2=\frac{4}{15}\cdot\sqrt{x^5}+c_1\cdot x+c_2$$

$$y'(1)=2\quad\Rightarrow\quad 2=\frac{2}{3}\sqrt{1^3}+c_1\quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{4}{3}$$

$$y(1)=4\quad\Rightarrow\quad 4=\frac{4}{15}\cdot\sqrt{1^5}+\frac{4}{3}\cdot 1+c_2\quad\Rightarrow\quad c_2=\frac{36}{15}$$

Az k.é.p. megoldása: $y(x)=\frac{4}{15}\cdot\sqrt{x^5}+\frac{4}{3}\cdot x+\frac{36}{15}$

Példa: Newton II. törvénye konstans erőhatás esetén

$$m \cdot s''(t) = F_0 \Rightarrow s''(t) = \frac{F_0}{m}$$

Kezdeti értékek:

kezdeti hely: $s(0)=s_0$

kezdeti sebesség: $v(0)=v_0$

$$v(t) = s'(t) = \int \frac{F_0}{m} dt = \frac{F_0}{m} \cdot t + c_1$$

$v(0)=v_0 \Rightarrow c_1 = v_0$

$$s(t) = \int \left(\frac{F_0}{m} \cdot t + c_1 \right) dt = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 \cdot t + c_2$$

$s(0)=s_0 \Rightarrow c_2 = s_0$

Megoldás:

$$s(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0 = \frac{a_0}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Másodrendű lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletek

Ha $h: I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $b, c \in \mathbb{R}$, akkor az

$$y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = h(x)$$

egyenletet másodrendű lineáris konstansegyütthatós inhomogén d.e.-nek, az

$$y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

egyenletet másodrendű lineáris konstansegyütthatós homogén d.e.-nek nevezzük.

A lineáris differenciálegyenletek általános tárgyalásakor korábban megfogalmazottak szerint:

Ha y_1:I→R és y_2:I→R függvények az

$$y''(x) + b\cdot y'(x) + c\cdot y(x) = 0$$

egyenlet lineárisan független megoldása, akkor az $\{y_1, y_2\}$ függvényrendszert a d.e. alaprendszerének nevezzük.

Ha $\{ y_1, y_2 \}$ az

$$y''(x) + b\cdot y'(x) + c\cdot y(x) = 0$$

homogén egyenlete alaprendszere, akkor az egyenlet általános megoldása:

$$y_H = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2.$$

Homogén egyenlet alaprendszerének és általános megoldásának meghatározása

Definíció: karakterisztikus egyenlet

Az

$$y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$$

egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásainak ismeretében a homogén d.e. alaprendszere és így az általános megoldása is meghatározható a következők szerint:

Tétel:

Ha a

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenletnek két különböző megoldása van:

$$\lambda_1 \text{ és } \lambda_2 ,$$

akkor a homogén egyenlet alaprendszere:

$$\boxed{\left\{ e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \right\}}$$

általános megoldása pedig:

$$\boxed{y_H(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}} \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Példa: $y''(x) + 3\,y'(x) + 2y(x) = 0$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Gyökei: $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1$

Alaprendszer: $\{\, e^{-2x},\ e^{-x} \,\}$

Általános megoldás:

$$y_H = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Tétel:

Ha a

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenletnek egy megoldása van:

$$\lambda\ ,$$

akkor a homogén egyenlet alaprendszere:

$$\boxed{\left\{ e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x} \right\}}$$

általános megoldása pedig:

$$\boxed{y_H(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x}} \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Példa: $y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 0$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

Gyöke: $\lambda = 4$

Alaprendszer: $\{ e^{4x}, x \cdot e^{4x} \}$

Általános megoldás:

$$y_H = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot x \cdot e^{4x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Tétel:

Ha a

$$\lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

karakterisztikus egyenletnek nincs megoldása, akkor a homogén egyenlet alaprendszere:

$$\{\ e^{ux} \cdot \sin(v \cdot x)\ ,\ e^{ux} \cdot \cos(v \cdot x)\ \}$$

általános megoldása pedig:

$$y_H(x) = c_1 \cdot e^{ux} \cdot \sin(v \cdot x) + c_2 \cdot e^{ux} \cdot \cos(v \cdot x) \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

ahol $u = -\dfrac{b}{2}$ $\quad v = \dfrac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$

Példa: $y''(x) + 6y'(x) + 34y(x) = 0$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 34 = 0$$

Gyöke: nincs, $u = -3,\ v = 5$

Alaprendszer: $\{\ e^{-3x} \cdot \sin(5x)\ ,\ e^{-3x} \cdot \cos(5x)\ \}$

Általános megoldás:

$$y_H = c_1 \cdot e^{-3x} \cdot \sin(5x) + c_2 \cdot e^{-3x} \cdot \cos(5x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

A lineáris differenciálegyenletek általános tárgyalásakor korábban megfogalmazottak szerint:

Az $y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = h(x)$ másodrendű lineáris konstansegyütthatós inhomogén differenciál-egyenletet általános megoldása:

$$y_{IH} = y_H + y_p$$

ahol y_H az $y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0$ egyenlet általános megoldása, y_p pedig az inhomogén egyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldása.

Partikuláris megoldás meghatározása konstansvariálással

Az inhomogén egyenlet y_p partikuláris megoldásának meghatározására több módszert ismert.

Ezek közül itt a ún. konstansvariálás módszert mutatjuk be, mely a homogén megfelelő általános megoldásának ismeretében szolgáltatja az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

A konstansvariálás lépései

$$y_H(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$$

$$\Rightarrow \quad y_p(x) = k_1(x) \cdot y_1(x) + k_2(x) \cdot y_2(x)$$

A k_1 és a k_2 függvények meghatározása: a

I. $k_1'(x) \cdot y_1(x) + k_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$

II. $k_1'(x) \cdot y_1'(x) + k_2'(x) \cdot y_2'(x) = h(x)$

egyenletrendszerből a k_1' és a k_2' derivált függvények egyértelműen kiszámíthatók (például a Cramer szabállyal), ezekből pedig integrálással kapjuk az ismeretlen k_1 és k_2 függvényeket.

Megjegyzés

Lineáris egyenletrendszer megoldása Cramer szabállyal

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad -3x_2 &= \quad 21 \\ 5x_1 \quad +8x_2 &= -25 \end{aligned}$$

$$D = \det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = 31$$

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} 21 & -3 \\ -25 & 8 \end{pmatrix} = 93$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{93}{31} = 3$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 5 & -25 \end{pmatrix} = -155$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-155}{31} = -5$$

Megjegyzés

Lineáris egyenletrendszer megoldása Cramer szabállyal

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ -2x_1 + 2x_3 &= -18 \\ x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$D = \det\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -6$$

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -18 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -24$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -2 & -18 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} = -18$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -2 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} = 30$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-24}{-6} = 4 \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-18}{-6} = 3 \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{30}{-6} = -5$$

A Cramer-szabállyal számolva:

I. $k_1'(x)\cdot y_1(x) + k_2'(x)\cdot y_2(x) = 0$

II. $k_1'(x)\cdot y_1'(x) + k_2'(x)\cdot y_2'(x) = h(x)$

$$D(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$D_1(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ h(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$D_2(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & h(x) \end{pmatrix}$$

$$k_1'(x) = \frac{D_1(x)}{D(x)} \quad \Rightarrow \quad k_1(x) = \int \frac{D_1(x)}{D(x)}\,dx$$

$$k_2'(x) = \frac{D_2(x)}{D(x)} \quad \Rightarrow \quad k_2(x) = \int \frac{D_2(x)}{D(x)}\,dx$$

$$y_p = k_1 y_1 + k_2 y_2$$

$$y_{IH} = y_H + y_p$$

Példa:

$$y''(x) + y(x) = x^2$$ IH

$$y''(x) + y(x) = 0$$ H

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\{ e^{ux}\cdot\sin(v\cdot x) \,,\, e^{ux}\cdot\cos(v\cdot x) \}$$

$$u = -\frac{b}{2} \qquad v = \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$$

Gyöke nincs, $u = 0$, $v = 1$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = c_1\cdot\sin x + c_2\cdot\cos x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_p = k_1(x)\cdot\sin x + k_2(x)\cdot\cos x$$

I. $k_1'(x) \cdot \sin x + k_2'(x) \cdot \cos x = 0$

II. $k_1'(x) \cdot \cos x + k_2'(x) \cdot (-\sin x) = x^2$

$$D(x) = \det\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} = -1$$

$$D_1(x) = \det\begin{pmatrix} 0 & \cos x \\ x^2 & -\sin x \end{pmatrix} = -x^2 \cdot \cos x$$

$$k_1'(x) = \frac{D_1(x)}{D(x)} = x^2 \cdot \cos x$$

$$D_2(x) = \det\begin{pmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & x^2 \end{pmatrix} = x^2 \cdot \sin x$$

$$k_2'(x) = \frac{D_2(x)}{D(x)} = -x^2 \cdot \sin x$$

$$k_2'(x) = \frac{D_2(x)}{D(x)} = -x^2 \cdot \sin x$$

$$k_1'(x) = \frac{D_1(x)}{D(x)} = x^2 \cdot \cos x$$

$$k_1(x) = \int \frac{D_1(x)}{D(x)} dx = \int x^2 \cdot \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x$$

$$k_2(x) = \int \frac{D_2(x)}{D(x)} dx = -\int x^2 \cdot \sin x \, dx = -2x \sin x + (x^2 - 2) \cos x$$

$$y_p(x) = k_1(x) \cdot y_1(x) + k_2(x) \cdot y_2(x) =$$

$$= [2x \cdot \cos x + (x^2-2) \cdot \sin x] \cdot \sin x + [-2x \cdot \sin x + (x^2-2) \cdot \cos x] \cdot \cos x =$$

$$= (x^2-2)$$

$$y_{IH}(x) = y_H(x) + y_p(x) = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x + x^2 - 2 \,, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Példa: harmonikus rezgés

Határozzuk meg egy D rugóállandójú rugóhoz rögzített m tömegű test rezgésének kitérés-idő függvényét!

Jelölje y az egyensúlyi helyzettől való kitérést, t az időt!

A D rugóállandójú rugó a testre az y kitéréssel arányos húzóerőt fejt ki: $F = -D \cdot y$.

Így a Newton-egyenlet alakja:

$$y''(t) = \frac{-Dy(t)}{m} \quad \Rightarrow \quad y''(t) + \frac{D}{m} y(t) = 0$$

ami egy másodrendű lineáris konstansegyütthatós d.e.

A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + \frac{D}{m} = 0$

melynek D/m>0 miatt nincs valós gyöke.

$$u = 0,\ v = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\{\ e^{ux} \cdot \sin(v \cdot x)\ ,\ e^{ux} \cdot \cos(v \cdot x)\ \}$$

$$u = -\frac{b}{2} \qquad v = \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}$$

így az egyenlet általános megoldása:

$$y_H(t) = c_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + c_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

Ha a t=0 időpillanatbeli kitérés y_0, a sebesség v_0, azaz

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0,$$

a k.é.p. megoldása:

$$c_1 = v_0\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad c_2 = y_0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + y_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

Példa: csillapított rezgés

Határozzuk meg egy D rugóállandójú rugóhoz rögzített m tömegű test rezgésének kitérés-idő függvényét, ha a közegellenállással is számolnunk kell!

Feltételezzük, hogy a közegellenállási erő a sebességgel arányos és az arányossági tényező f. Jelölje y az egyensúlyi helyzettől való kitérést, t az időt.

A rugótól származó harmonikus erő: -D·y.

A közegellenállási erő : -f·v = -f·y'.

Így a Newton-egyenlet alakja:

$$y''(t) = \frac{-f \cdot y'(t) - D \cdot y(t)}{m} \quad \Rightarrow \quad y''(t) + \frac{f}{m} y'(t) + \frac{D}{m} y(t) = 0$$

ami egy másodrendű lineáris konstansegyütthatós d.e.

A számolás egyszerűsítése végett vezessük be a következő jelöléseket:

$$k = \frac{f}{2m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Így a megoldandó egyenlet:

$$y''(t) + 2ky'(t) + \omega^2 y(t) = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0,$$

melynek a k és az ω viszonyától függően különböző számú valós gyöke van:

1. eset: ha k>ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző gyöke van:

$$\lambda_1 = -k + \sqrt{k^2 - \omega^2} \qquad \lambda_2 = -k - \sqrt{k^2 - \omega^2}$$

így a d.e. általános megoldása:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{-k+\sqrt{k^2-\omega^2}} + c_2 \cdot e^{-k-\sqrt{k^2-\omega^2}}$$

2. eset: ha k=ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek egy gyöke van:

$$\lambda = -k$$

így a d.e. általános megoldása:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + c_2 \cdot t \cdot e^{-kt}$$

3. eset: ha k<ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke.

$$u = -k \qquad v = \sqrt{\omega^2 - k^2}$$

így a d.e. általános megoldása:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{-k\cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right) + c_2 \cdot e^{-k\cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right)$$

Példa: R-L-C kör konstans feszültséggel

Kérdés: soros R-L-C körre U_0 konstans feszültséget kapcsolva a körben folyó áram erőssége hogyan függ az időtől?

Az áramerősség-idő függvény a következő másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$i''(t) + \frac{R}{L} \cdot i'(t) + \frac{1}{CL} \cdot i(t) = 0$$

Kezdeti értékek: $$i(0) = 0, \quad i'(0) = \frac{U_0}{L}$$

A számolás egyszerűsítése végett vezessük be a következő jelöléseket:

$$k = \frac{R}{2L} \qquad \omega^2 = \frac{1}{CL}$$

Így a megoldandó egyenlet:

$$i''(t) + 2k \cdot i'(t) + \omega^2 \cdot i(t) = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0,$$

melynek a k és az ω viszonyától függően különböző számú valós gyöke van:

1. eset: NAGY CSILLAPÍTÁS

Ha k>ω, akkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző gyöke van:

$$\lambda_1 = -k + \sqrt{k^2 - \omega^2} \qquad \lambda_2 = -k - \sqrt{k^2 - \omega^2}$$

így a d.e. általános megoldása:

$$i(t) = c_1 \cdot e^{-k+\sqrt{k^2-\omega^2}} + c_2 \cdot e^{-k-\sqrt{k^2-\omega^2}}$$

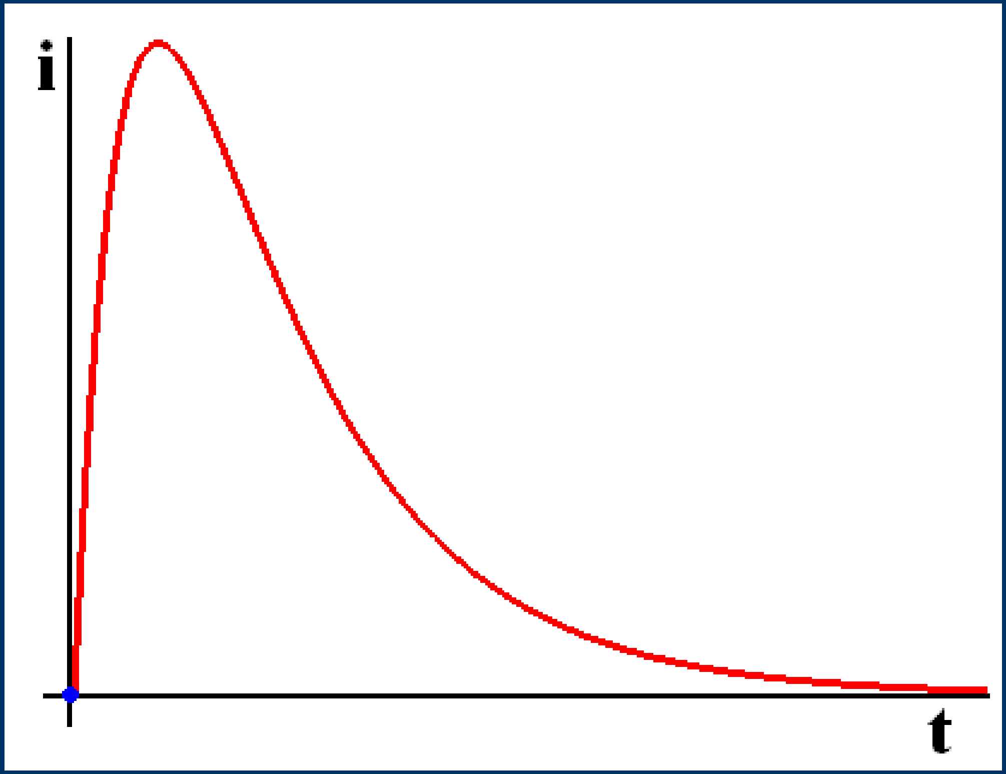
$$i(0) = 0,\ i'(0) = \frac{U_0}{L} \Rightarrow c_1 = \frac{U_0}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} \qquad c_2 = -c_1 = \frac{-U_0}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$\Rightarrow \qquad i(t) = \frac{U_0}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) =$$

$$= \frac{U_0}{L\sqrt{k^2 - \omega^2}} \cdot \frac{e^{\left(-k+\sqrt{k^2-\omega^2}\right)t} - e^{\left(-k-\sqrt{k^2-\omega^2}\right)t}}{2} =$$

$$= \frac{U_0}{L\sqrt{k^2 - \omega^2}} \cdot e^{-kt} \cdot \frac{e^{\sqrt{k^2-\omega^2}\cdot t} - e^{-\sqrt{k^2-\omega^2}\cdot t}}{2} = \qquad \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{U_0}{L\sqrt{k^2 - \omega^2}} \cdot e^{-kt} \cdot \mathrm{sh}\left(\sqrt{k^2 - \omega^2} \cdot t\right)$$



2. eset: SZINGULÁRIS ESET

Ha $k=\omega$, akkor a karakterisztikus egyenletnek egy gyöke van:

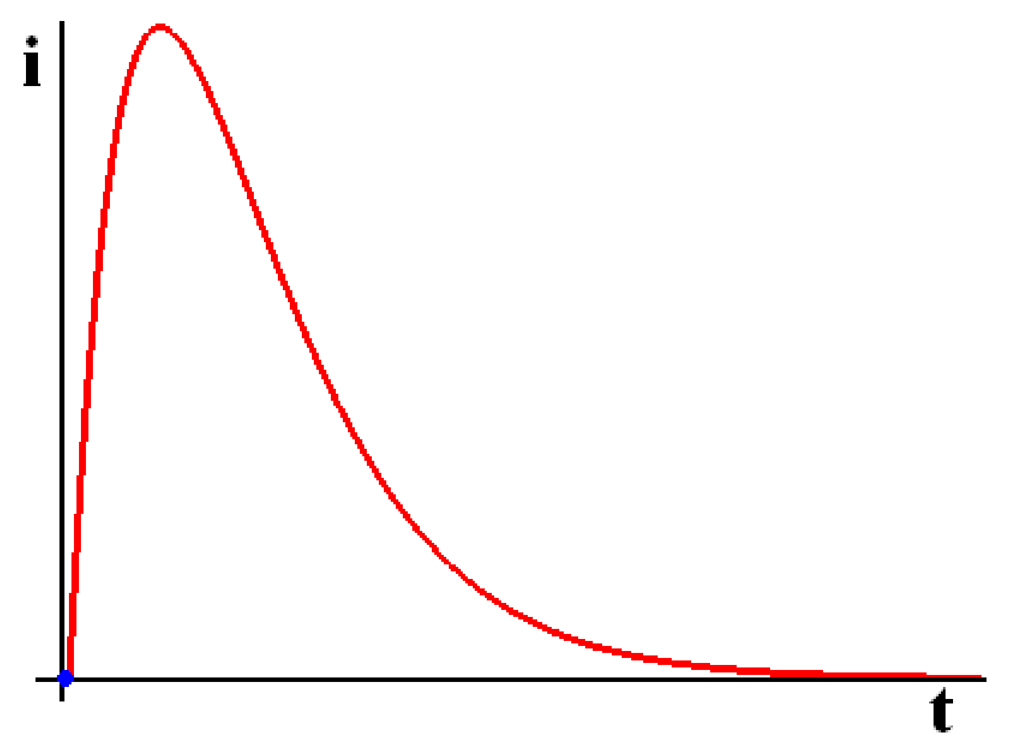
$$\lambda = -k$$

így a d.e. általános megoldása:

$$i(t) = c_1 \cdot e^{-kt} + c_2 \cdot t \cdot e^{-kt}$$

$$i(0) = 0,\ i'(0) = \frac{U_0}{L} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad c_2 = \frac{U_0}{L} \quad \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{U_0}{L} \cdot t \cdot e^{-kt}$$



3. eset: KIS CSILLAPÍTÁS

Ha $k<\omega$, akkor a karakterisztikus egyenletnek nincs valós gyöke.

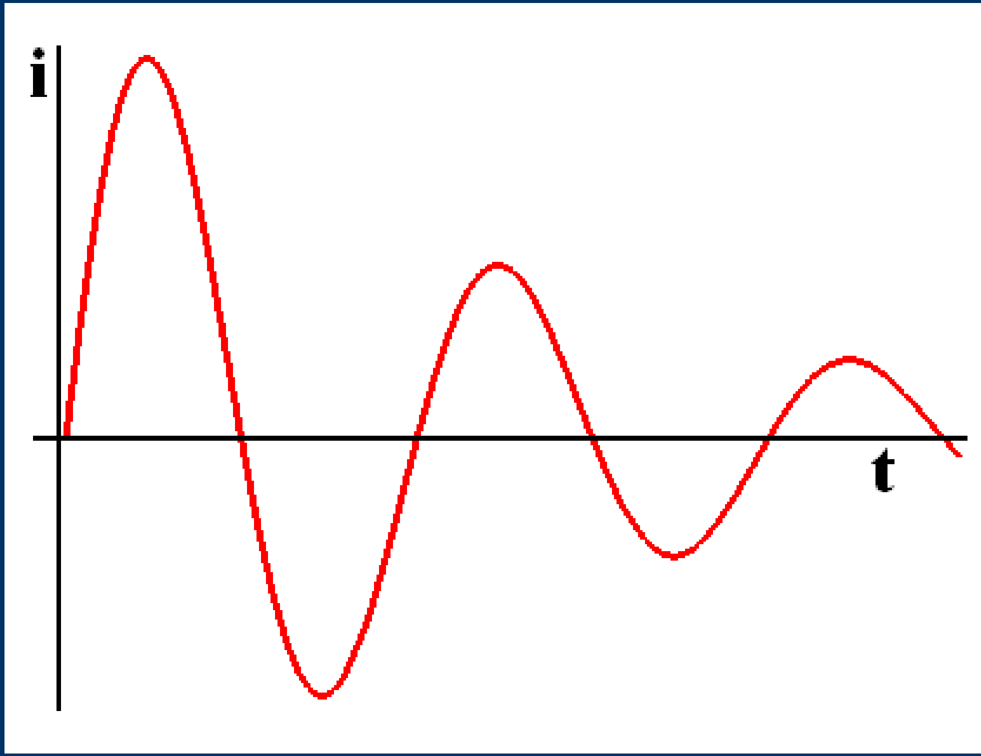
$$u = -k \qquad v = \sqrt{\omega^2 - k^2}$$

így a d.e. általános megoldása:

$$i(t) = c_1 \cdot e^{-k\cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right) + c_2 \cdot e^{-k\cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right)$$

$$i(0) = 0,\ i'(0) = \frac{U_0}{L} \Rightarrow c_2 = 0 \qquad c_1 = \frac{U_0}{L\sqrt{\omega^2 - k^2}}$$

$$i(t) = \frac{U_0}{L\sqrt{\omega^2 - k^2}} \cdot e^{-k\cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega^2 - k^2} \cdot t\right)$$



A lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletek megoldása a Laplace-transzformáció alkalmazásával

Az alábbiakban egy, a szabályozástechnikában használatos módszert mutatunk be a lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletek megoldására.

Ehhez definiálni kell a Laplace transzformált fogalmát:

Definíció: Laplace transzformált

Legyen az f:[0,+∞[→R függvény integrálható, és tegyük fel, hogy $|f(t)| \leq K \cdot e^{s \cdot t}$, valamely s konstanssal. Ekkor az

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} \cdot f(t)\, dt$$

függvényt az f Laplace transzformáltjának nevezzük.

(A formulában szereplő integrál abszolút konvergens, ha p>s.)

Jelölés: F = L [f], vagy F(p) = L [f(t)].

Néhány függvény Laplace transzformáltja

f(t)	F(p) = L[f(t)]
1	$\dfrac{1}{p}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{\pm a \cdot t}$	$\dfrac{1}{p \mp a}$
$t \cdot e^{\pm a \cdot t}$	$\dfrac{1}{(p \mp a)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Magyarázat:

Az f(t)=1 függvény esetén például

$$L[f] = F(p) = \int_0^\infty e^{-p \cdot t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-p \cdot t}\,dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\right)\left[e^{-p \cdot t}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}\right)\left[e^{-p \cdot b} - 1\right] = \frac{1}{p}$$

A Laplace transzformáció néhány tulajdonsága

Linearitás

$$L[a_1 f_1 + a_2 f_2] = a_1 L[f_1] + a_2 L[f_2]$$

Konvolúció tétel

$$L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau\right] = L[f_1]\cdot L[f_2]$$

Integrálhatósági tétel

$$L\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{p}\cdot L[f]$$

Differenciálhatósági tétel

$$L\left[f^{n}\right] = p^{n}\cdot L[f] - p^{n-1}\cdot f_0 - \ldots - p\cdot f_0^{(n-2)} - f_0^{(n-1)}, \quad \text{ahol} \quad f_0^{(k)} = \lim_{t\to+0} f^{(k)}(t)$$

Eltolási tétel

$$L\left[f(t-b)\right] = e^{-b\cdot t}\cdot L[f]$$

Hasonlósági tétel

$$L\left[f(at)\right] = \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Áthelyezési tétel

$$L\left[e^{-\lambda\cdot t}\cdot f(t)\right] = F(p+\lambda)$$

Szorzási tétel

$$L\left[t^{n}\cdot f(t)\right] = (-1)^{n} F^{n}(p)$$

Osztási tétel

$$L\left[\frac{1}{t}\cdot f(t)\right] = \int_p^\infty F(u)\,du$$

A lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletekhez tartozó k.é.p. egyféle megoldási módszerét az alapozza meg, hogy az y ismeretlen függvény és az f függvény Laplace transzformáltjai összefüggnek.

Az összefüggés alapján az f Laplace transzformáltjának ismeretében (ezt F jelöli) megadható az y ismeretlen függvény Laplace transzformáltja (ezt Y jelöli), abból pedig meghatározható az y függvény:

$$\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{y}$$

Laplace transzf.

inverz Laplace transzf.

Az Y és az F függvények közötti összefüggés:

$$Y(p) = \frac{F(p) + P(p)}{Q(p)} = F(p)\frac{1}{Q(p)} + \frac{P(p)}{Q(p)}$$

ahol P és Q polinomok, melyek a differenciálegyenlet együtthatóitól és a kezdeti értékektől függenek.

(A későbbiekben látni fogjuk a P és a Q polinomok konkrét formáját az első és a másodrendű lineáris differenciálegyenletek esetén.)

Mivel a F=L[f] függvény kiszámítása problémás lehet, gyakrabban alkalmazzák az alábbi megoldási módot: meg kell keresni azokat az y_1 és y_2 függvényeket, melyekre

$$L[y_1] = \frac{1}{Q}, \quad L[y_2] = \frac{P(p)}{Q(p)}$$

vagyis az 1/Q és a P/Q racionális törtfüggvények inverz Laplace transzformáltjait.

Az y_1 és y_2 függvények segítségével meghatározható az ismeretlen y függvény:

$$\mathbf{P, Q \rightarrow y_1, y_2 \rightarrow y}$$

inverz Laplace transzf.

Az y_1 és y_2 függvényeket ismeretében az y függvény az alábbi képletek egyikének alkalmazásával határozható meg:

$$y(t) = \int_0^t \left(f(t-\tau) \cdot y_1(\tau)\right) d\tau + y_2(t)$$

vagy

$$y(t) = \int_0^t \left(f(\tau) \cdot y_1(t-\tau)\right) d\tau + y_2(t)$$

Az Y és az F függvények kapcsolata az

$$a_0 y'(t) + a_1 y(t) = f(t), \quad y(0) = y_0$$

elsőrendű lineáris konstansegyütthatós differenciál-egyenlethez tartozó k.é.p. esetén:

$$Y(p) = \frac{F(p) + y_0 \cdot a_0}{a_0 p + a_1} = F(p)\frac{1}{a_0 p + a_1} + \frac{y_0 \cdot a_0}{a_0 p + a_1}$$

Y: az y ismeretlen függvény Laplace transzformáltja

F: az f függvény Laplace transzformáltja

Példa

$$y'(t) + 2y(t) = (t+1)e^t, \quad y(0) = 1$$

A jelöléseink szerint itt: a_0=1, a_1=2, y_0=1, így

$$Y(p) = F(p)\frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+2}$$

f(t)	F(p) = L[f(t)]
1	$\frac{1}{p}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{\pm a\cdot t}$	$\frac{1}{p \mp a}$
$t\cdot e^{\pm a\cdot t}$	$\frac{1}{(p\mp a)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

A táblázatból: $y_1(t) = y_2(t) = e^{-2t}$, tehát

$$y(t) = \int_0^t \left((\tau+1)e^{\tau} \cdot e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau + e^{-2t}$$

$$Y(p) = F(p)\frac{1}{a_0 p + a_1} + \frac{y_0 \cdot a_0}{a_0 p + a_1}$$

$$y(t) = \int_0^t \left(f(\tau)\cdot y_1(t-\tau)\right)d\tau + y_2(t)$$

$$y(t)=\int_0^t \left((\tau+1)e^{\tau}\cdot e^{-2(t-\tau)}\right)d\tau+e^{-2t}=\int_0^t \left((\tau+1)\cdot e^{-2t+3\tau}\right)d\tau+e^{-2t}=$$

$$=\left(-\frac{2}{9}e^{-2t}+\frac{1}{3}te^{t}+\frac{2}{9}e^{t}\right)+e^{-2t}=\frac{7}{9}e^{-2t}+\frac{1}{3}te^{t}+\frac{2}{9}e^{t}$$

$$y(t)=\frac{7}{9}e^{-2t}+\frac{1}{3}te^{t}+\frac{2}{9}e^{t}$$

Az Y és az F függvények kapcsolata az

$$a_0y''(t) + a_1y'(t) + a_2y(t) = f(t)$$

$$y(0) = y_0\,,\ y'(0) = y'_0$$

másodrendű lineáris konstansegyütthatós differenciál-egyenlethez tartozó k.é.p. esetén:

$$Y(p) = F(p)\cdot\frac{1}{a_0p^2 + a_1p + a_0} + \frac{y_0\cdot(a_0p + a_1) + y_0'\cdot a_0}{a_0p^2 + a_1p + a_0}$$

Y: az y ismeretlen függvény Laplace transzformáltja

F: az f függvény Laplace transzformáltja

Példa

$$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=e^{t}+1,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$$

$$Y(p)=F(p)\frac{1}{a_0p^2+a_1p+a_0}+\frac{y_0\cdot(a_0p+a_1)+y_0'\cdot a_0}{a_0p^2+a_1p+a_0}$$

A jelöléseink szerint itt: a_0=1, a_1=6, a_2=8, y_0=0, y'_0=0, így

$$Y(p)=F(p)\frac{1}{p^2+6p+8}+\frac{p+8}{p^2+6p+8}$$

Parciális törtekre bontás után:

$$Y(p)=F(p)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+4}\right)+\left(3\cdot\frac{1}{p+2}-2\cdot\frac{1}{p+4}\right)$$

$$Y(p) = F(p)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+4}\right) + \left(3\cdot\frac{1}{p+2} - 2\cdot\frac{1}{p+4}\right)$$

f(t)	F(p) = L[f(t)]
1	$\frac{1}{p}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{\pm a\cdot t}$	$\frac{1}{p\mp a}$
$t\cdot e^{\pm a\cdot t}$	$\frac{1}{(p\mp a)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

A táblázatból:

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\cdot e^{-2t} - \frac{1}{2}\cdot e^{-4t}$$

$$y_2(t) = 3\cdot e^{-2t} - 2\cdot e^{-4t}$$

így

$$y(t) = \int_0^t \left((e^{\tau}+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{2}\cdot e^{-4(t-\tau)}\right)\right) d\tau + 3\cdot e^{-2t} - 2\cdot e^{-4t}$$

$$y(t) = \int_0^t \left(f(\tau)\cdot y_1(t-\tau)\right) d\tau + y_2(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{15}\cdot e^{t} + \frac{1}{8} + \frac{31}{12}\cdot e^{-2t} - \frac{71}{40}\cdot e^{-4t}$$

(Számolás a következő oldalon.)

$$y(t)=\int_0^t\left((e^{\tau}+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-2(t-\tau)}-\frac{1}{2}\cdot e^{-4(t-\tau)}\right)\right)d\tau+3\cdot e^{-2t}-2\cdot e^{-4t}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^t\left(e^{-2t+3\tau}-e^{-4t+5\tau}+e^{-2(t-\tau)}-e^{-4(t-\tau)}\right)d\tau+3\cdot e^{-2t}-2\cdot e^{-4t}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\left[e^{-2t+3\tau}\right]_0^t-\frac{1}{10}\cdot\left[e^{-4t+5\tau}\right]_0^t\cdot e^{-4t+5\tau}+\frac{1}{4}\cdot\left[e^{-2t+2\tau}\right]_0^t-$$

$$-\frac{1}{8}\cdot\left[e^{-4t+4\tau}\right]_0^t+3\cdot e^{-2t}-2\cdot e^{-4t}=$$

$$=\frac{1}{15}\cdot e^{t}+\frac{1}{8}-\frac{5}{12}\cdot e^{-2t}+\frac{9}{40}\cdot e^{-4t}+3\cdot e^{-2t}-2\cdot e^{-4t}=$$

$$=\frac{1}{15}\cdot e^{t}+\frac{1}{8}+\frac{31}{12}\cdot e^{-2t}-\frac{71}{40}\cdot e^{-4t}$$