

# Trigonometrikus Fourier sorok

## Trigonometrikus rendszer

Definíció: **trigonometrikus rendszer**

**Az**

**$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots\}$**

**függvényekből álló (végtelen sok függvényt tartalmazó) függvényrendszer **trigonometrikus rendszernek** nevezzük.**

A műszaki tudományok és a fizika bizonyos területein fontos kérdés, hogy adott,  $2\pi$  szerint periodikus  $f$  függvényt elő lehet-e állítani a trigonometrikus rendszerbeli függvények lineáris kombinációjaként, azaz vannak-e olyan

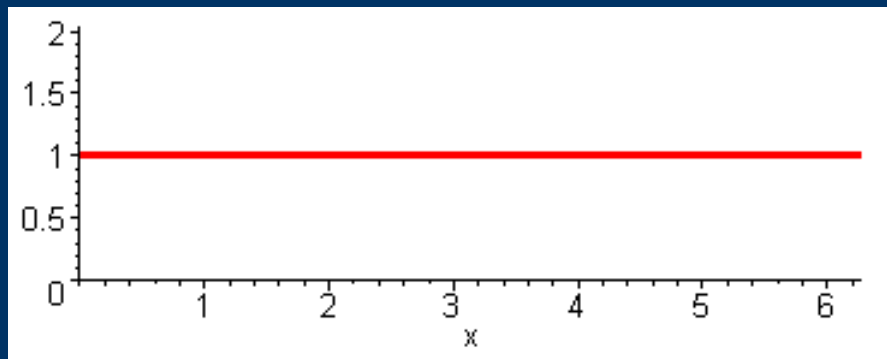
$$a_0, a_1, a_2, \dots \quad \text{és} \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

számok, hogy

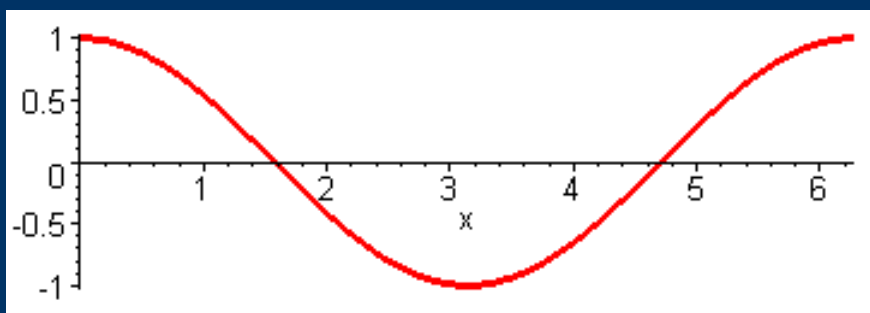
$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot x) + \dots$$

## A trigonometrikus rendszer első öt eleme

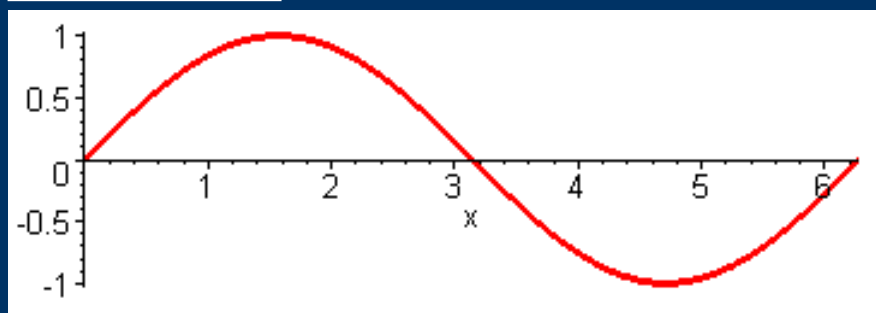
$x \rightarrow 1$



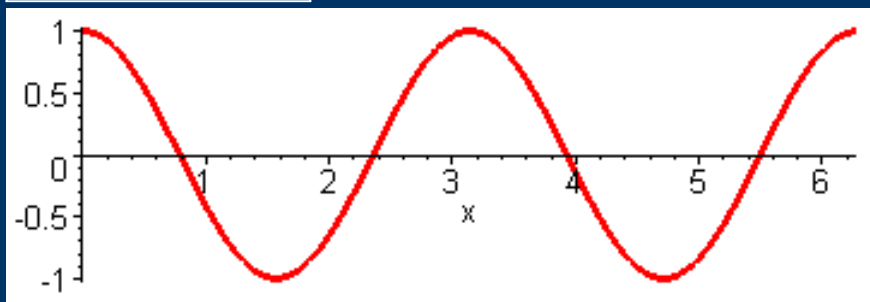
$x \rightarrow \cos x$



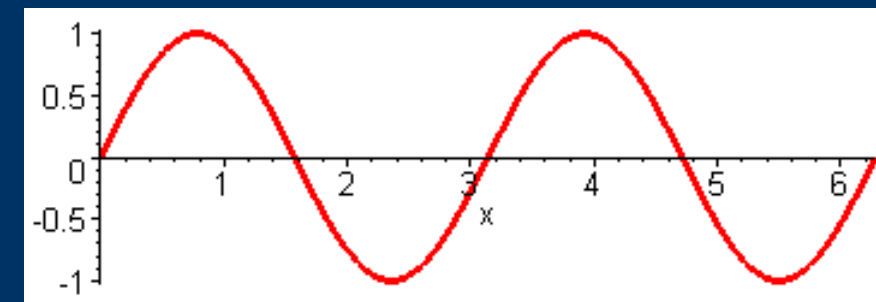
$x \rightarrow \sin x$



$x \rightarrow \cos 2x$



$x \rightarrow \sin 2x$



## Fourier együtthatók

Definíció: **Fourier együtthatók**

Az  $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$  Riemann integrálható függvény (trigonometrikus) Fourier együtthatói:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(n \cdot x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(n \cdot x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Definíció: **Fourier sor**

Ha a trigonometrikus rendszer elemeit rendre megszorozzuk egy  $2\pi$  szerint periodikus, integrálható  $f$  függvény

$$a_0, a_1, a_2, \dots, \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

Fourier együtthatóival, akkor az  $f$  függvény **Fourier sorát** kapjuk:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2 \cdot x) + \dots$$

vagy tömörebben:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x))$$

**Egy függvény Fourier sora függvénysor.**

**Fontos kérdés, hogy milyen kapcsolat van egy függvény és a Fourier sorának összegfüggvénye között?**

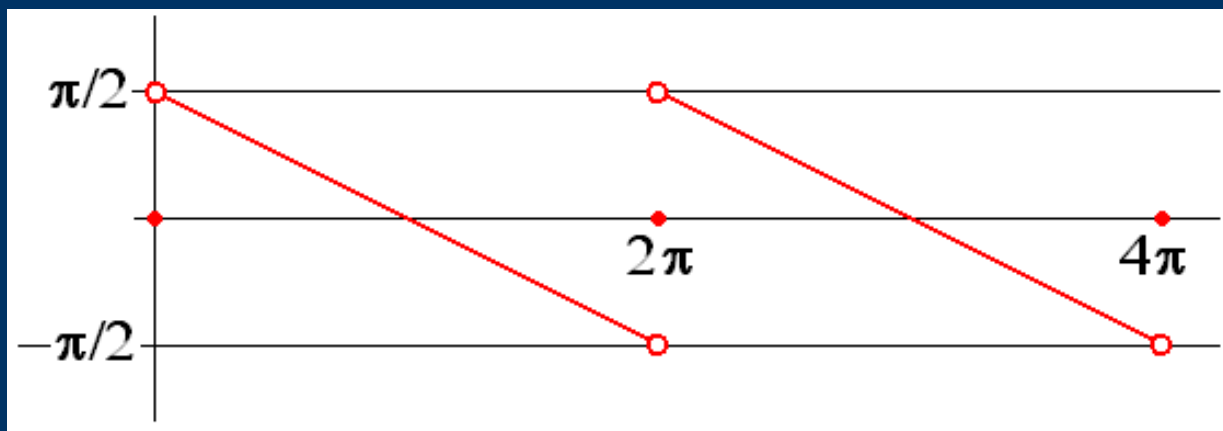
## Tétel

**Differenciálható függvény egyenlő a Fourier sorának összegfüggvényével.**

## Megjegyzés

**Azok a függvények, amelyek esetén a Fourier sorfejtés igazán érdekes, általában nem mindenhol folytonosak, így nem mindenhol differenciálhatóak.**

## Példa





**Tétel: Fourier sor pontonkénti konvergenciája**

Ha egy  $2\pi$  szerint periodikus  $f$  függvény egy  $x_0$  helyen balról és jobbról differenciálható (*ebből következik, hogy az  $x_0$ -ban  $f$ -nek létezik az  $f(x_0-0)$  bal és az  $f(x_0+0)$  jobb oldali határértéke*), akkor az  $f$  Fourier sora  $x_0$ -ban az

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

értékhez konvergál.

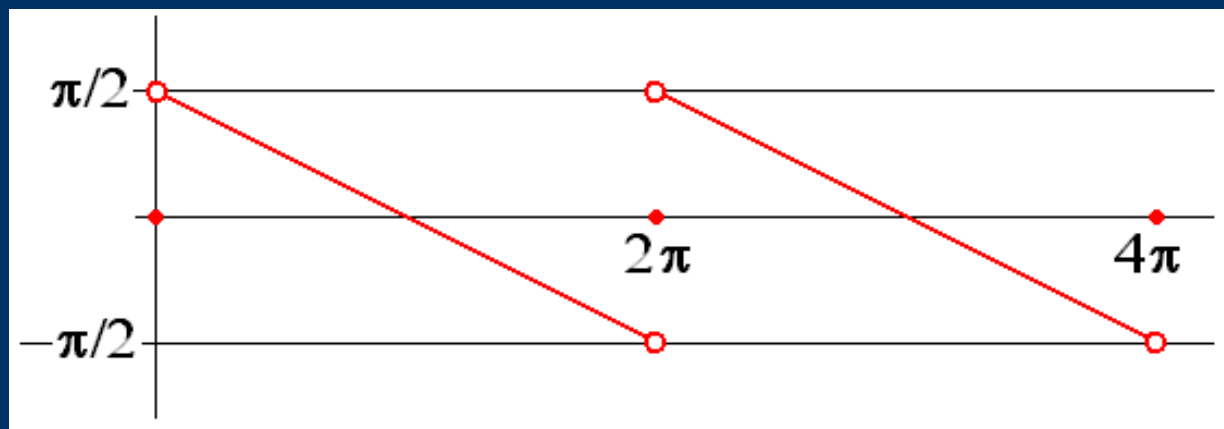
## Következmény

Ha az előző tétel feltételei mellett  $f$  még **folytonos** is  $x_0$ -ban, akkor az  $f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0)$  egyenlőségek miatt  $f$  Fourier sora  $x_0$ -ban  $f(x_0)$ -hoz konvergál.

Példa:

**Meghatározzuk az  $f$  függvény Fourier sorát!**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x \in ]0, 2\pi[ \end{cases}$$



Az  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , ... együtthatók meghatározása

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) dx = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos x dx = 0$$

Mivel  $f$  páratlan függvény, könnyen belátható, hogy:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$$

## A $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ , ... együtthatók meghatározása

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin x \, dx = 1$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}$$

**Belátható, hogy:**

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Az  $f$  függvény Fourier sora tehát

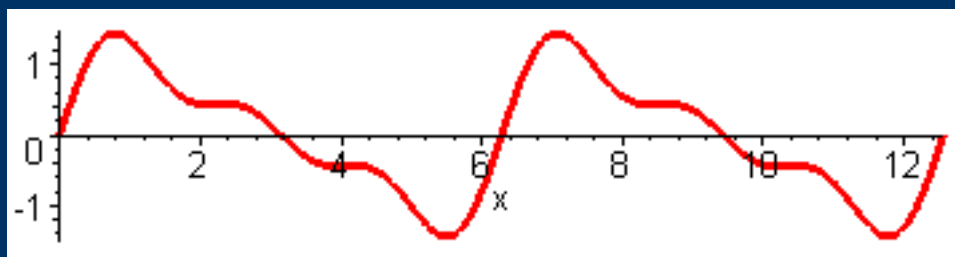
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

A korábbi tételeink szerint ez a függvénysor a folytonossági helyeken előállítja az  $f$  függvényt, a szakadási helyeken pedig a bal és a jobb oldali határértékek számtani közepét adja.

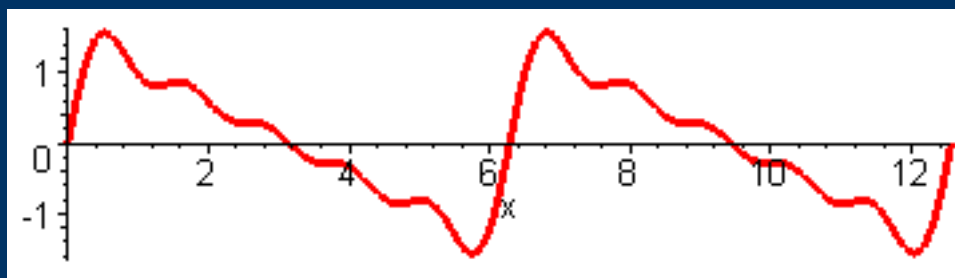
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

A 3., az 5. és a 7. részletösszeg:

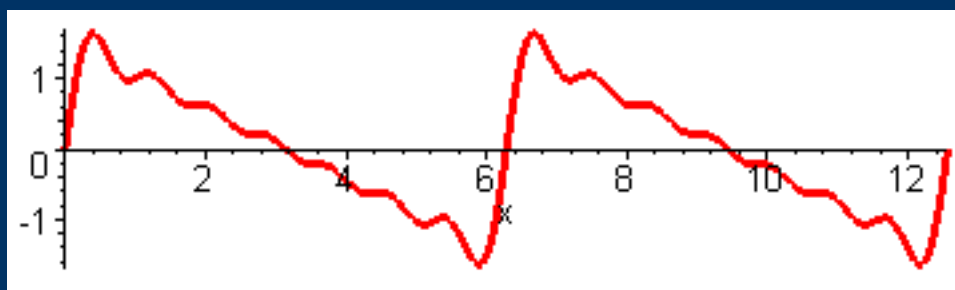
$n = 1, \dots, 3$



$n = 1, \dots, 5$



$n = 1, \dots, 7$



Megjegyzés:

**Páratlan függvény Fourier sorában csak szinuszos tagok szerepelnek, mivel**

$$\mathbf{a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0}$$

**Páros függvény Fourier sorában (az  $a_0/2$  konstans tag mellett) csak koszinuszos tagok szerepelnek, mivel**

$$\mathbf{b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 0}$$



**Tétel: Parseval formula**

Ha az  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , ill. a  $b_1, b_2, b_3, \dots$  számok az  $f$   $2\pi$  szerint periodikus, Riemann integrálható függvény Fourier együtthatói, akkor fennáll a következő egyenlőség, melyet (trigonometrikus) **Parseval formulának** nevezünk:

$$\int_0^{2\pi} f^2 = \pi \cdot \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

Parseval formulával bizonyos számsorok összege meghatározható.

Példa:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x \in ]0, 2\pi[ \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n}$$

$$a_n = 0, \quad n=0,1,\dots$$

$$b_n = 1/n, \quad n=1,2,\dots$$

$$\int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right)^2 dx = \pi \cdot \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right] = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right)^2 dx = \frac{\pi^3}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$