Egyváltozós függvények Riemann integrálja (határozott integrál)

Definíció: zárt intervallum beosztása

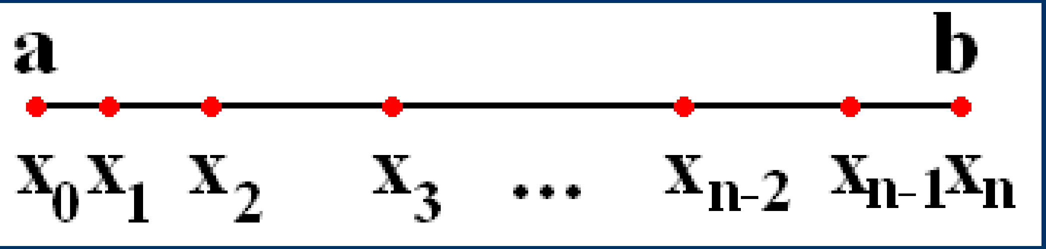
Legyen [a,b] egy pozitív hosszúságú intervallum.

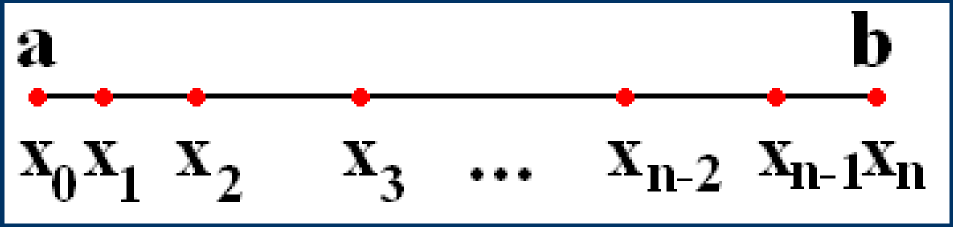
Ha $a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$, akkor a

$d = \{ [x_{i-1} , x_i] \mid i=1,\ldots,n \} =$

$$= \{ [x_0,x_1] , [x_1,x_2] , \ldots , [x_{n-1},x_n] \}$$

intervallumhalmazt az [a,b] intervallum beosztásának nevezzük.





Elnevezések

x_0 ,..., x_n: **osztópontok**

d elemei: **részintervallumok**

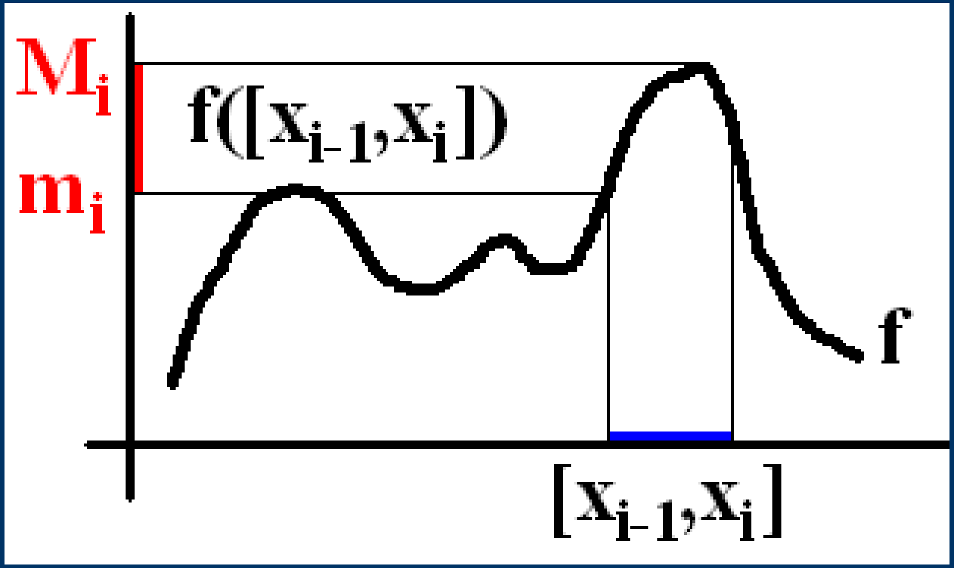
Jelölés

D[a,b]: az [a,b] beosztásainak halmaza

Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ <u>korlátos</u> függvény, $d = \{ [x_{i-1}, x_i] \mid i=1,\dots,n \}$ az $[a,b]$ intervallum egy beosztása, akkor vezessük be a következő jelöléseket ($i=1,\dots,n$) :

$$m_i = \min f([x_{i-1}, x_i])$$

$$M_i = \max f([x_{i-1}, x_i])$$



Vagyis M_i ill. m_i az i-edik részintervallum képének **legnagyobb** ill. **legkisebb** eleme ($i=1,\dots,n$).

Definíció: alsó és felső integrálközelítő összeg

Ha $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ <u>korlátos</u> függvény,

$d=\{\ [\ x_{i-1}\ ,\ x_i\ ]\ |\ i=1,\ldots,n\}$ az [a,b] egy beosztása, akkor a

$$s(f,d)=\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

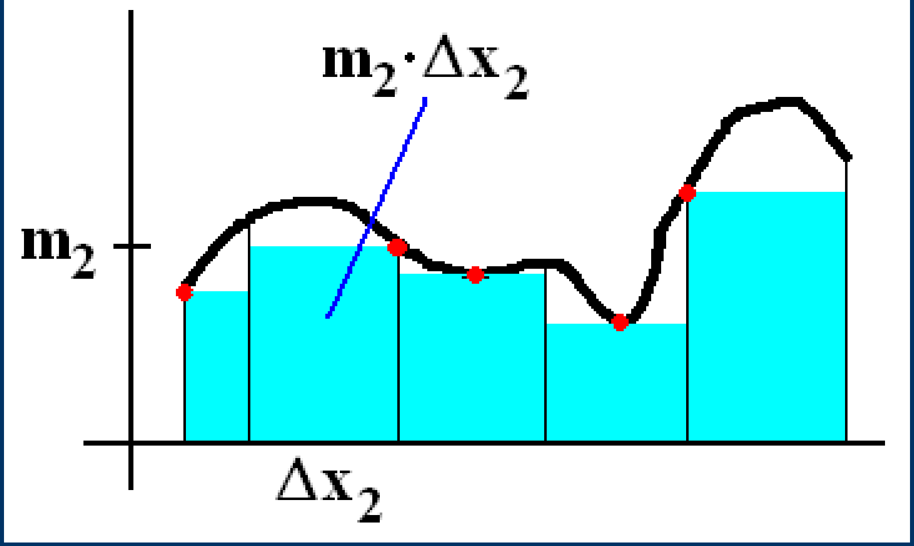
ill. a

$$S(f,d)=\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

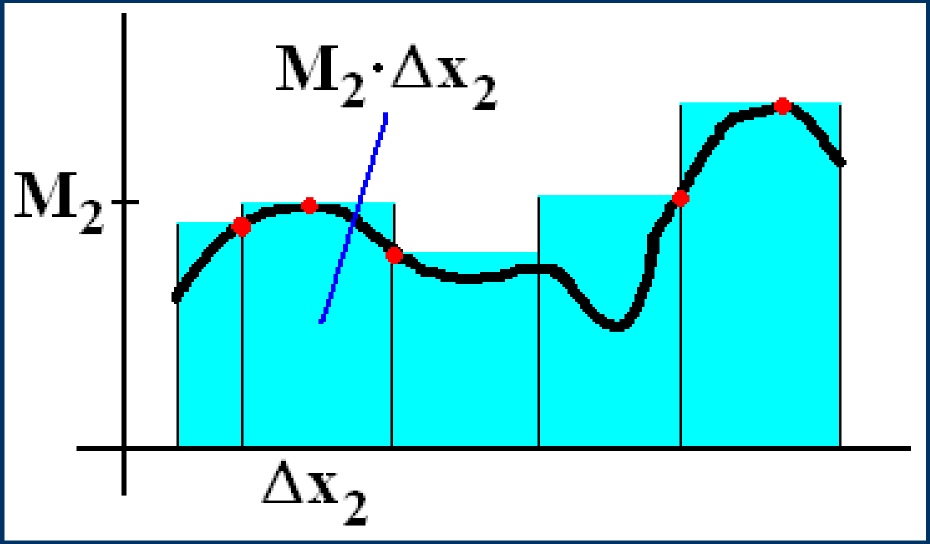
összegeket az f függvény d beosztáshoz tartozó alsó ill. felső integrálközelítő összegének nevezzük.

Az alsó és a felső integrálközelítő összegek geometriai jelentése

s(f,d)



S(f,d)



Speciálisan: egy pozitív függvény integrálközelítő összegei bizonyos téglalapok területeinek összegével egyenlők.

Az alsó és a felső integrálközelítő összegek viszonya

Ha $f:[a,b]\rightarrow \mathbf{R}$ korlátos függvény, d_1 és d_2 az $[a,b]$ intervallum két tetszőleges beosztása, akkor

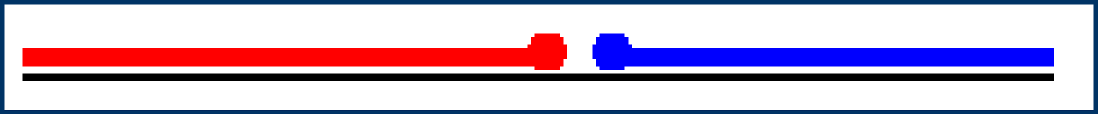
$$\boxed{s(f, d_1) \le S(f, d_2)}$$

vagyis bármely alsó integrálközelítő összegnél bármely felső integrálközelítő összeg nagyobb vagy egyenlő.

Következmények:

Az alsó integrálközelítő összegek halmaza felülről korlátos.

A felső integrálközelítő összegek halmaza alulról korlátos.



az alsó integrálközelítő összegek halmaza

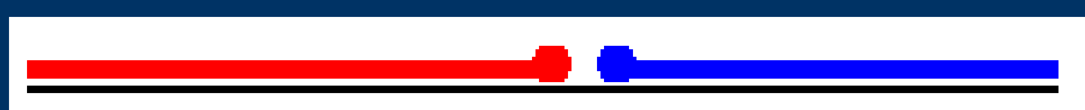
a felső integrálközelítő összegek halmaza

Definíció: alsó integrál

Az f:[a,b]→R <u>korlátos</u> függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az f függvény alsó integráljának nevezzük.

(Ez az érték valós szám az előző következmény miatt.)

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{d\in D[a,b]} s(f,d)$$

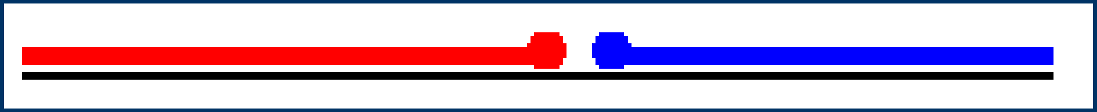


Definíció: felső integrál

Az f:[a,b]→R <u>korlátos</u> függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az f függvény felső integráljának nevezzük.

(Ez az érték valós szám az előző következmény miatt.)

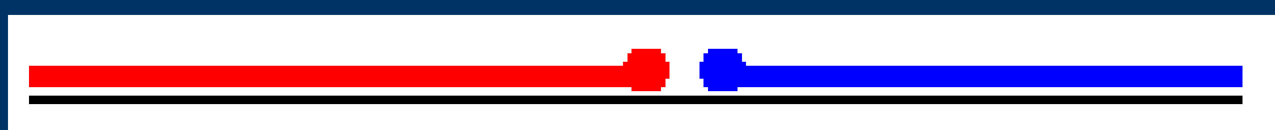
$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{d \in D[a,b]} S(f,d)$$



Megjegyzés:

A definíciók alapján igazolható, hogy

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$



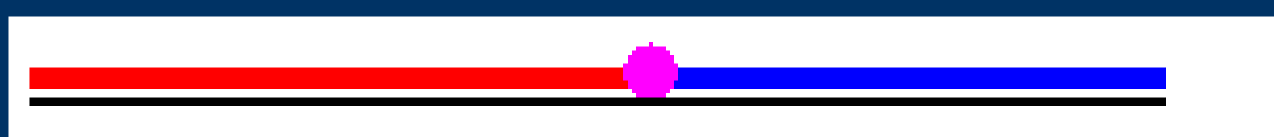
Definíció: integrál

Ha az f:[a,b]→R <u>korlátos</u> függvény esetén

$$\int_{\underline{a}}^{b} f = \int_{a}^{\overline{b}} f$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény integrálható az [a,b] intervallumon.

Az alsó és a felső integrálok közös értékét az f függvény [a,b] intervallumon vett integráljának nevezzük.



Jelölések:

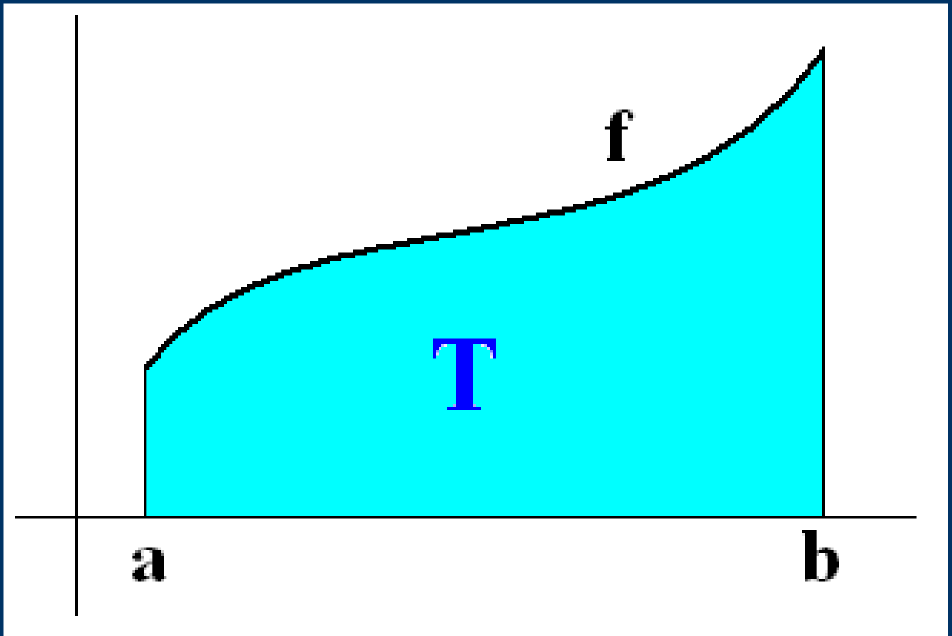
$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

amennyiben a függvény változójára is utalni akarunk, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^b f(t)dt \qquad \int_a^b f(u)du$$

Az integrál geometriai jelentése

Nem negatív integrálható függvény integrálja a „függvény alatti területtel" egyenlő

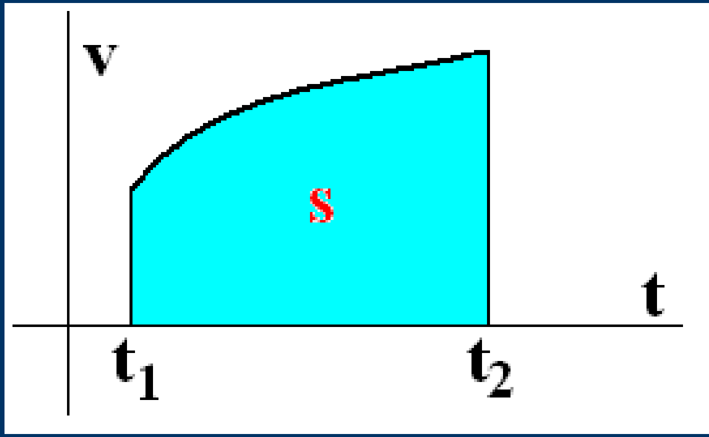


$$T = \int_a^b f$$

Néhány példa az integrál fizikai jelentésére

Az elmozdulás kiszámítása a sebesség-idő függvényből:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$



Az átáramlott töltés kiszámítása az áramerősség-idő függvényből:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$$

A leadott energia kiszámítása a teljesítmény-idő függvényből:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$$

Az integrál fogalmának két kiegészítése

Ha az f függvény értelmezve van az a helyen, akkor f integrálható az [a,a] intervallumon és

$$\int_a^a f = 0$$

Ha a<b és az f függvény integrálható az [a,b] intervallumon, akkor

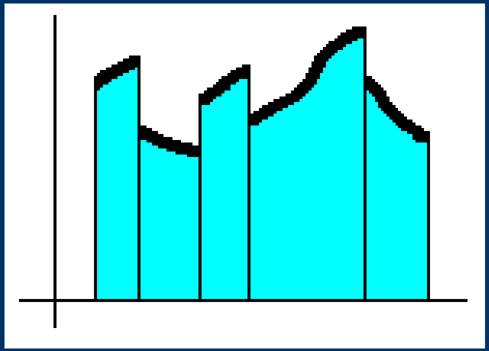
$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

Integrálható függvények

Mivel az alkalmazásokban használt függvények általában folytonosak, vagy szakaszonként folytonosak, igen fontos tény a következő:

Tétel: a Riemann integrálhatóság egy elegendő feltétele

Ha f:[a,b]→R korlátos függvény szakadási helyeinek halmaza legfeljebb megszámlálható végtelen számosságú, akkor f integrálható.



(Így speciálisan a folytonos függvények és a véges sok szakadási hellyel rendelkező korlátos függvények mind integrálhatók.)

Az integrál néhány tulajdonsága

Tétel: összegfüggvény integrálja

Ha az $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ és a $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvények integrálhatóak, akkor az $f+g$ függvény is integrálható és

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Az integrál néhány tulajdonsága

Tétel: függvény konstansszorosának integrálja

Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény integrálható és $c\in\mathbb{R}$, akkor a $c\cdot f$ függvény is integrálható és

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f$$

Tétel: szorzatfüggvény integrálhatósága

Ha az $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ és a $g:[a,b]\to \mathbf{R}$ függvények integrálhatók, akkor az $f\cdot g$ függvény is integrálható.

Tétel: függvény abszolút értékének integrálhatósága

Ha az $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ függvény integrálható, akkor az $|f|$ függvény is integrálható és

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$$

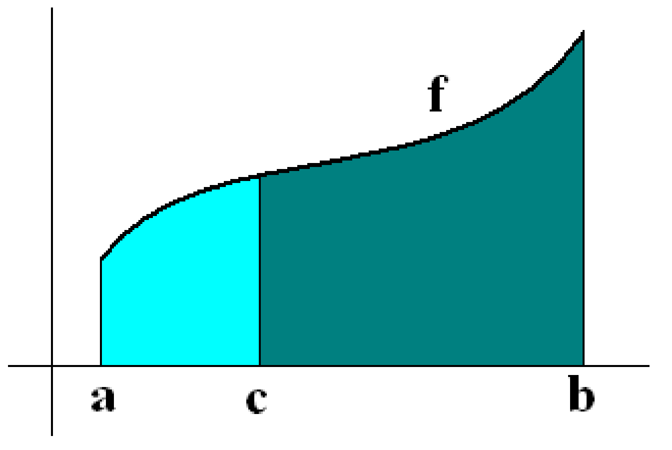
Tétel: hányadosfüggvény integrálhatósága

Ha az $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ és a $g:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvények integrálhatók, $0<c\in\mathbf{R}$ és $g(x) \geq c$, ha $x\in[a,b]$, akkor az $f\,/\,g$ függvény is integrálható.

Tétel: az integrál additivitása

Ha $c \in [a,b]$ és az $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény integrálható az $[a,c]$ és a $[c,b]$ intervallumokon, akkor integrálható az $[a,b]$ intervallumon is és

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$



Az állítás általánosítható arra az esetre is, amikor az $[a,b]$ intervallum véges sok páronként diszjunkt intervallum uniójaként áll elő.

Tétel:

Ha az f:[a,b]→R függvény integrálható, akkor integrálható bármely [c,d] ⊆ [a,b] részintervallumon is.

Tétel: az integrál monotonitása

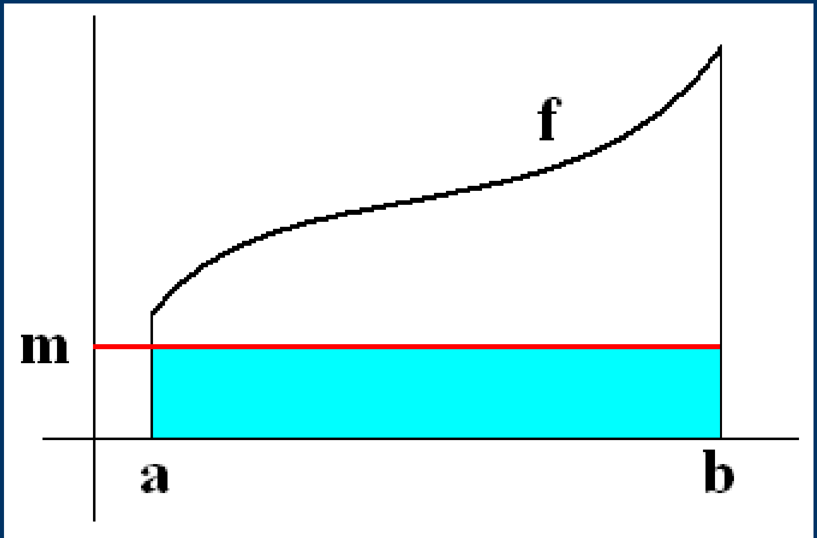
Ha az f:[a,b]→R és a g:[a,b]→R függvények integrálhatók, és f(x) ≤ g(x), ha x∈[a,b], akkor

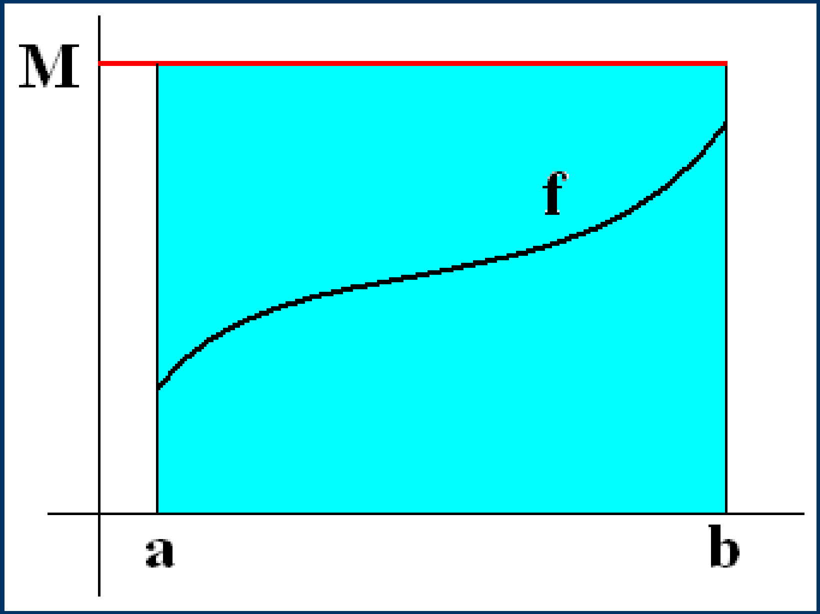
$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

Tétel: az integrálszámítás középértéktétele

Ha az f:[a,b]→R függvény integrálható, m,M∈R és $m \le f(x) \le M$, ha x∈[a,b], akkor

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$

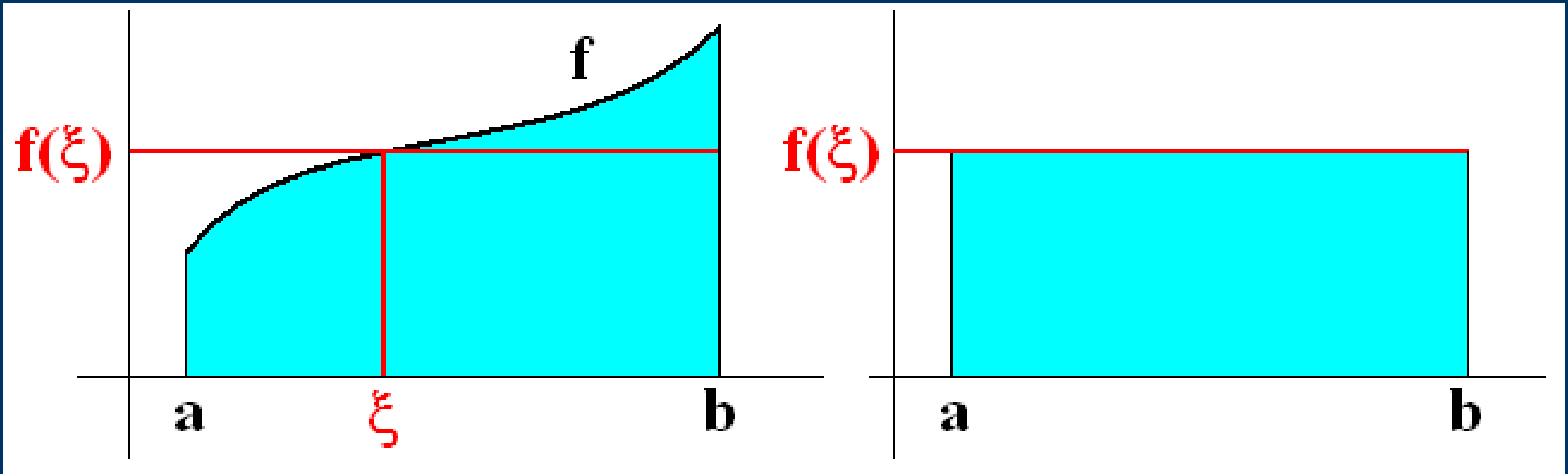




Következmény:

Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény **folytonos**, akkor létezik olyan $\xi\in]a,b[$, melyre

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

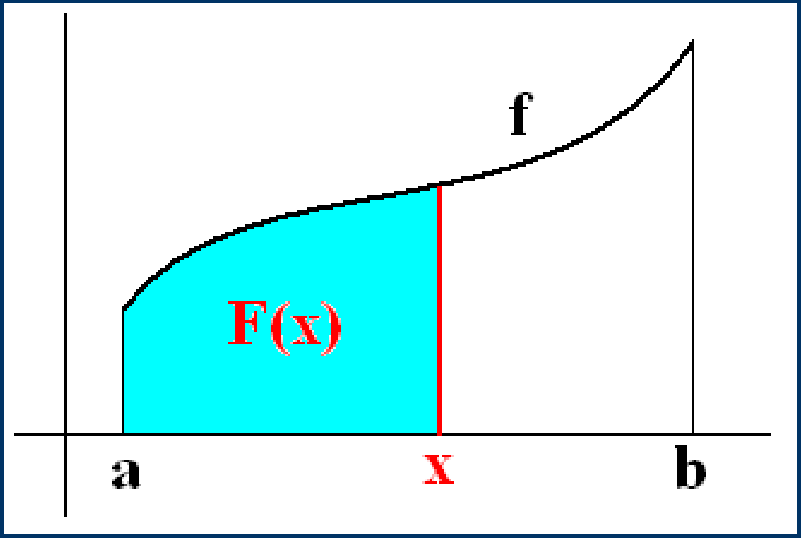


Definíció: integrálfüggvény

Ha az f:[a,b]→R függvény integrálható, akkor az

$$F(x) = \int_a^x f \quad , \quad x \in [a,b]$$

függvényt az f integrálfüggvényének nevezzük.



Tétel: integrálfüggvény tulajdonságai

Legyen az $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény integrálható, és legyen F a f integrálfüggvénye. Ekkor

- **F folytonos**
- **ha f folytonos egy $x_o\in[a,b]$ helyen, akkor az F differenciálható x_o-ban és $F'(x_o) = f(x_o)$.**

Az integrálfüggvény igen fontos az alábbi következmény miatt:

Következmény:

Ha az $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.

Az integrál kiszámítása

Tétel: Newton-Leibniz formula

Ha az $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ és az $F:[a,b]\to \mathbf{R}$ függvényekre fennáll, hogy

- **f integrálható**
- **F folytonos az [a,b] intervallumon**
- **F differenciálható az]a,b[intervallumon**
- **$F'(x) = f(x)$, ha $x \in]a,b[$**

akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

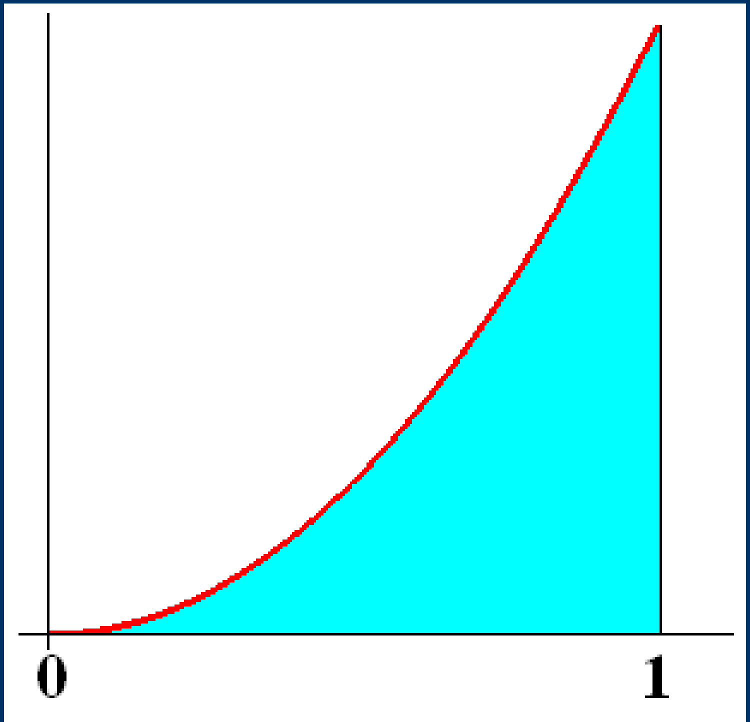
Példa:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

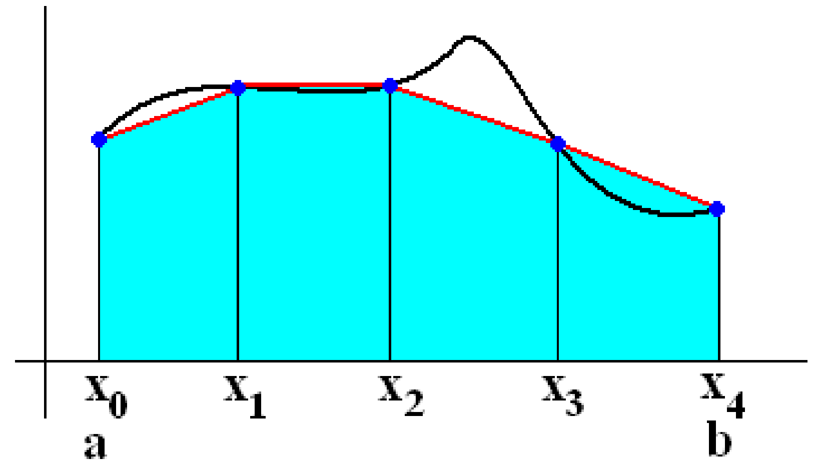
$$\int_0^1 x^2 dx = ?$$

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$



Az integrál közelítő kiszámítása



Tétel: Trapéz formula

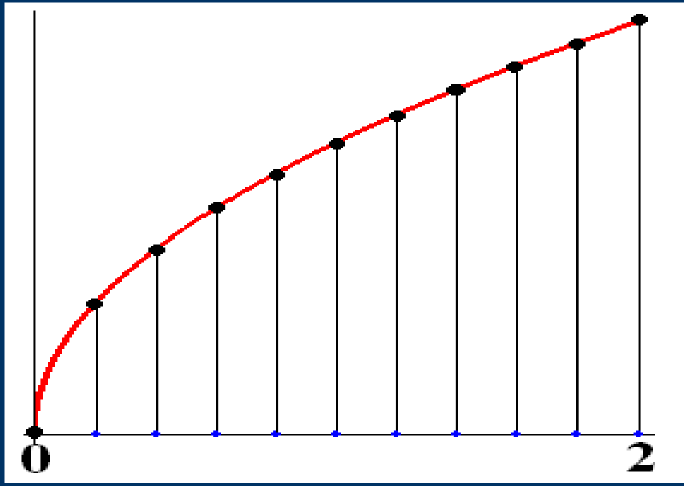
Az f:[a,b]→R integrálható függvény esetén osszuk fel az [a,b] intervallumot az $x_o, x_1, \ldots, x_n$ osztópontokkal n db egyenlő hosszúságú intervallumra és kössük össze az osztópontokhoz tartozó függvénypontokat egyenes szakaszokkal. Az f integrálját a töröttvonal integráljával közelítve a következő formula adódik:

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_o)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Példa:

$$\int_0^2 \sqrt{x}\,dx \approx \frac{2}{10}\left(0+\sqrt{0,2}+\sqrt{0,4}+\sqrt{0,6}+\sqrt{0,8}+\sqrt{1}+\sqrt{1,2}+\sqrt{1,4}+\sqrt{1,6}+\sqrt{1,8}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\int_0^2 \sqrt{x}\,dx \approx 1,8682$$



n=10

A pontos érték a Newton-Leibniz formulával:

$$\int_0^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1,8856$$

Megjegyzés:

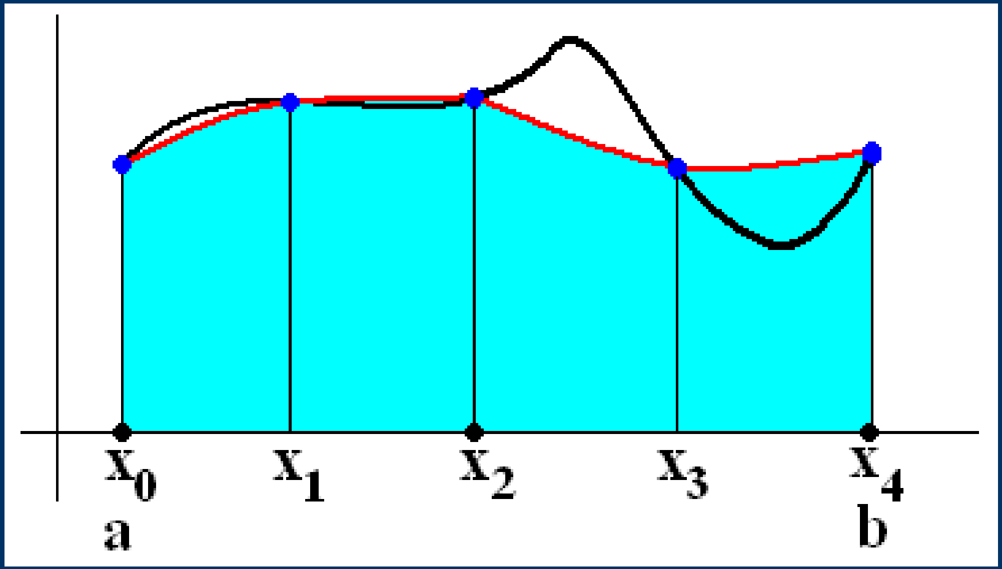
Ha az $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ függvény kétszer differenciálható és a második derivált függvénye korlátos az [a,b] intervallumon, vagyis van olyan K szám, melyre $|f''(x)| \le K$, ha $x\in[a,b]$, akkor az f integráljának trapéz formulával számított közelítő értéke és az integrál pontos értéke közötti eltérés legfeljebb

$$\frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Ez azt jelenti, hogy a fenti feltételeknek eleget tevő függvények esetén az osztópontok számának növelésével az eltérés tetszőlegesen kicsivé tehető, illetve az eltérés nagysága az előbbi formulával becsülhető.

Az integrál közelítő kiszámítása

Tétel: Simpson formula



Az $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ integrálható függvény esetén osszuk fel az $[a,b]$ intervallumot az $x_o,x_1,\ldots,x_{2n}$ osztópontokkal 2n db egyenlő hosszúságú intervallumra. Illesszünk az (x_o,x_1,x_2), (x_2,x_3,x_4), stb. osztópont hármasokhoz tartozó függvénypontokra parabolaíveket. Közelítsük az f integrálját e paraboladarabok integráljainak összegével.

Ezzel az eljárással az f integráljára az alábbi közelítő formulát kapjuk:

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6n}\left(f(x_o)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots\right.$$

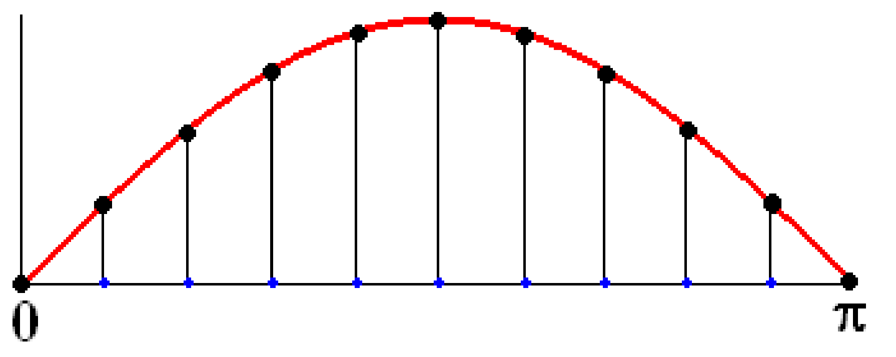
$$\left.\ldots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right)$$

Példa:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \approx \frac{\pi}{6\cdot 5}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{10} + 2\sin\frac{2\pi}{10} + 4\sin\frac{3\pi}{10} + 2\sin\frac{4\pi}{10} + 4\sin\frac{5\pi}{10} + \right.$$

$$\left. + 2\sin\frac{6\pi}{10} + 4\sin\frac{7\pi}{10} + 2\sin\frac{8\pi}{10} + 4\sin\frac{9\pi}{10} + \sin\pi\right) \approx 2{,}0001$$

$$\boxed{2n = 10 \Rightarrow n = 5}$$



A pontos érték a Newton-Leibniz formulával:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 2$$

Megjegyzés:

Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény négyszer differenciálható és a negyedik derivált függvény korlátos az [a,b] intervallumon, vagyis van olyan K szám, melyre $|f^{(4)}(x)| \le K$, ha $x\in[a,b]$, akkor az f integráljának Simpson formulával számított közelítő értéke és az integrál pontos értéke közötti eltérés legfeljebb

$$\frac{K(b-a)^5}{2880n^4}$$

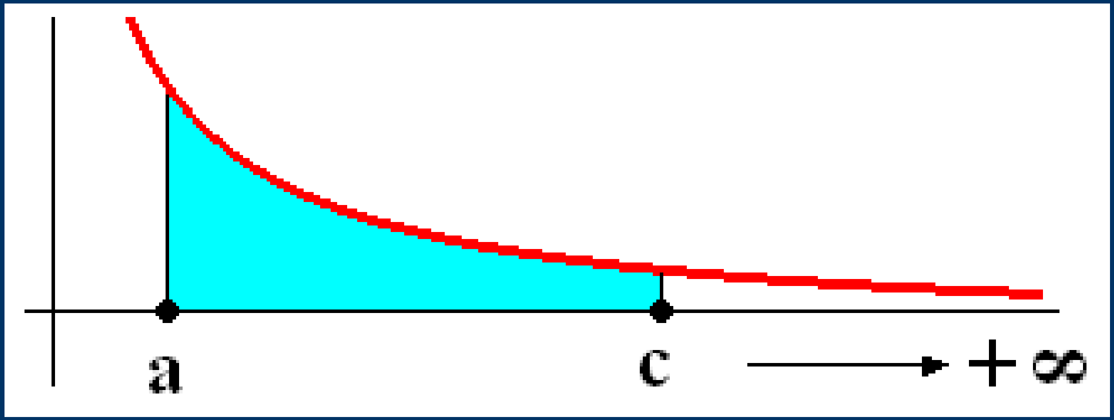
Ez azt jelenti, hogy a fenti feltételeknek eleget tevő függvények esetén az osztópontok számának növelésével az eltérés tetszőlegesen kicsivé tehető, illetve az eltérés nagysága az előbbi formulával becsülhető. Nagy n esetén a Simpson formula jobb közelítést ad a trapéz formulánál.

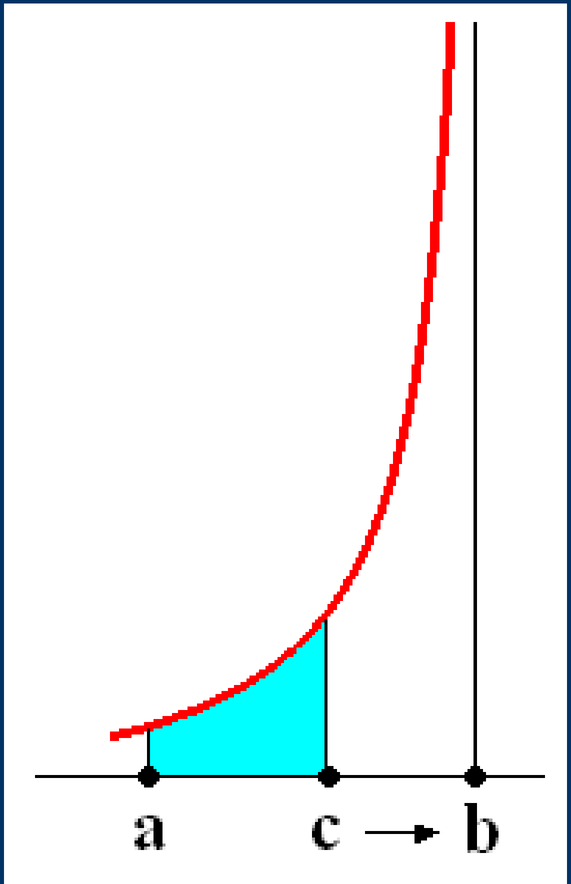
Improprius integrálok

(nem korlátos függvény integrálja, integrál nem korlátos intervallumon)

Definíció: improprius integrál

Ha $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ vagy $b = +\infty$ és $a < b$, továbbá az $f:[a,b[\to \mathbb{R}$ függvény minden $c \in [a,b[$ esetén integrálható az $[a,c]$ intervallumon,





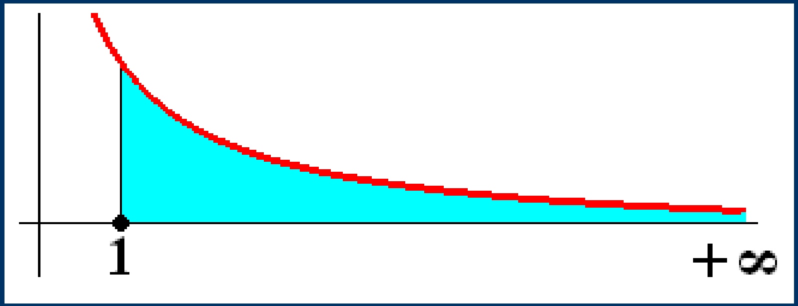
akkor az f függvény [a,b[intervallumon vett impropríus integrálján a

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f = \int_a^b f$$

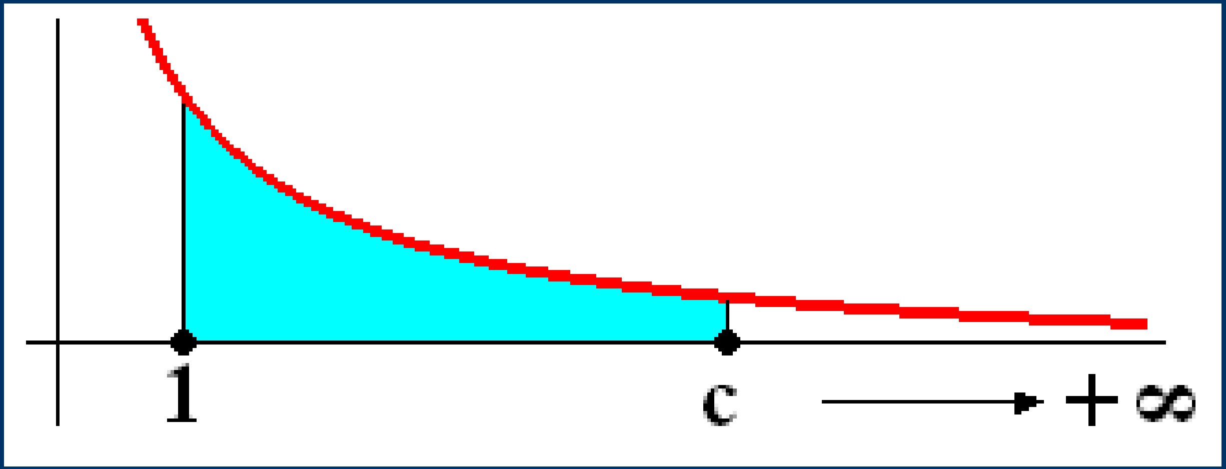
határértéket értjük, amennyiben létezik.

Ha a fenti határérték valós szám, akkor azt mondjuk, hogy az impropríus integrál konvergens (különben azt, hogy divergens).

Példa:

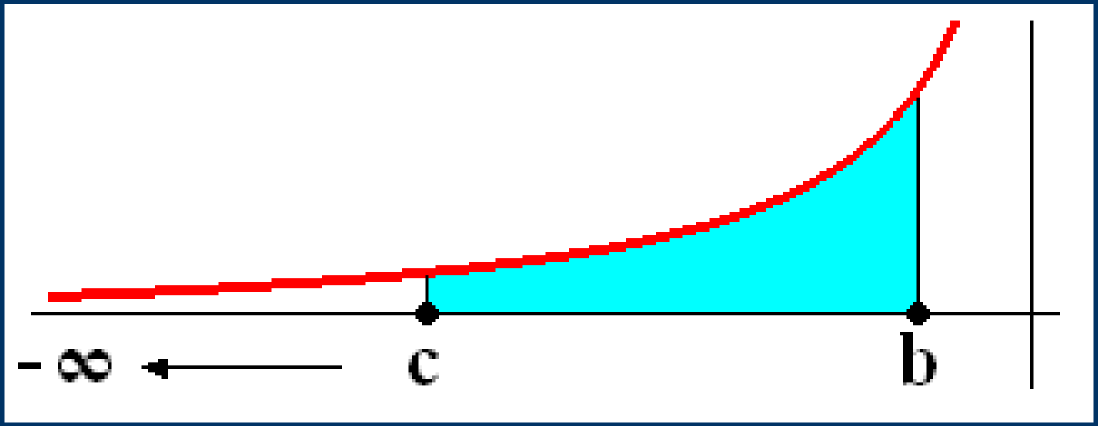


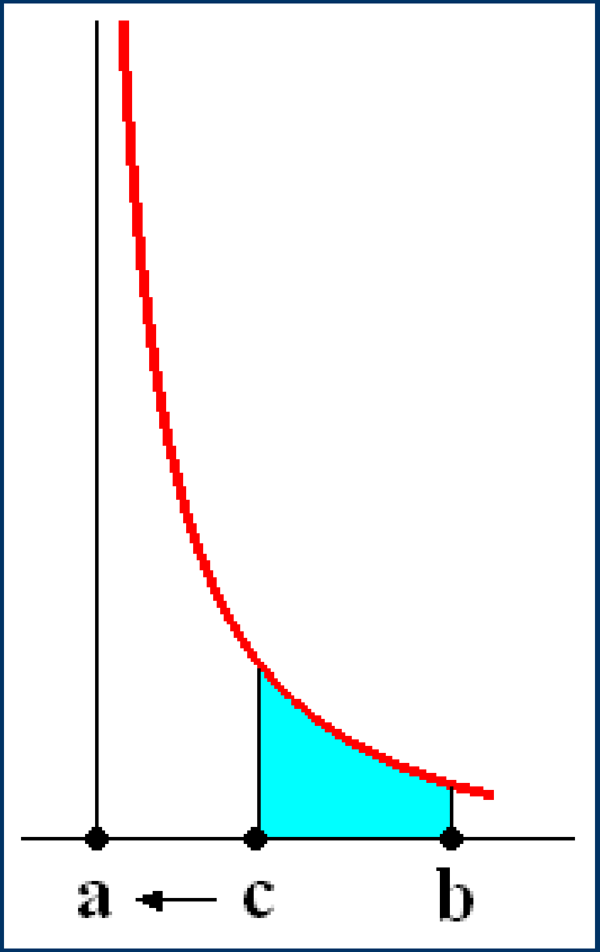
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{c\to\infty}\int_{1}^{c} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{-1}{c}+1\right) = 1$$



Definíció: improprius integrál

Ha $b \in R$, $a \in R$ vagy $a = -\infty$ és $a<b$, továbbá az $f:]a,b] \to R$ függvény minden $c \in]a,b]$ esetén integrálható az $[a,c]$ intervallumon,





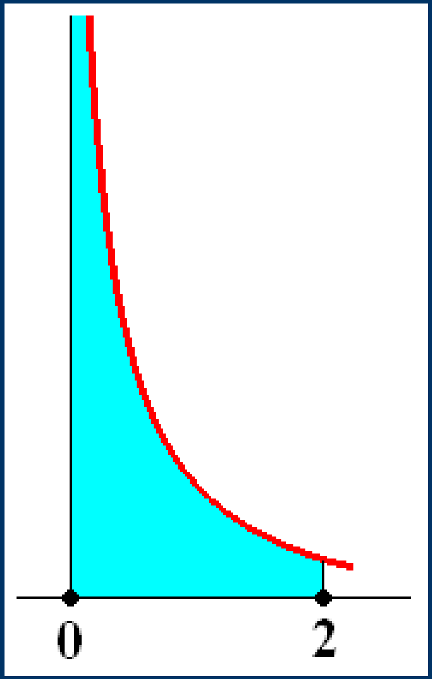
akkor az f függvény]a,b] intervallumon vett **impropius integrálján** **a**

$$\lim_{c \to a} \int_c^b f = \int_a^b f$$

határértéket értjük, amennyiben létezik.

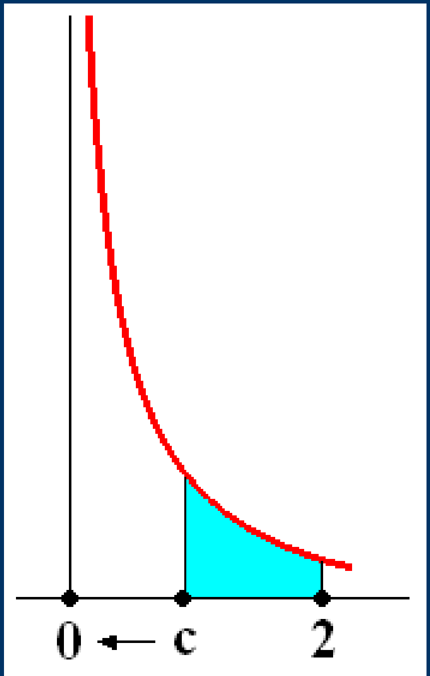
Ha a fenti határérték valós szám, akkor azt mondjuk, hogy az impropius integrál **konvergens** **(különben azt, hogy** **divergens**).

Példa:



$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0+0} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0+0} \left[2\sqrt{x}\right]_c^2 =$$

$$= \lim_{c\to 0+0} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{c}\right) = 2\sqrt{2}$$



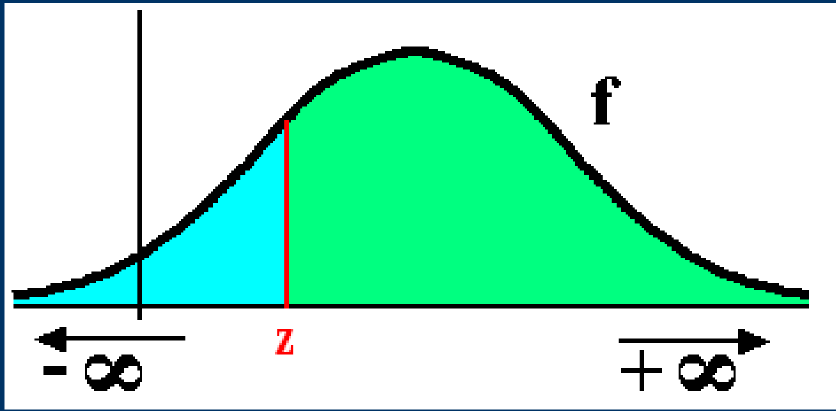
Definíció: improprius integrál

Ha $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ és $a<b$, továbbá az $f:]a,b[\to \mathbf{R}$ függvényre valamely $z \in \mathbf{R}$ esetén léteznek és konvergensek az

$$\int_a^z f \quad \text{és az} \quad \int_z^b f$$

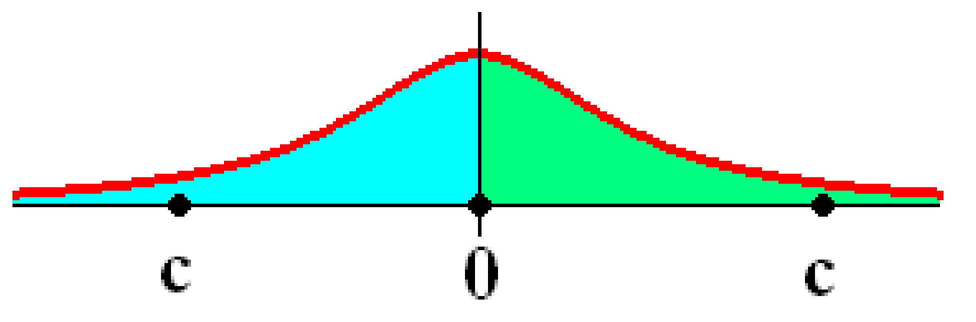
improprius integrálok, akkor az f függvény]a,b[intervallumon vett improprius integrálján az

$$\int_a^z f + \int_z^b f = \int_a^b f$$



összeget értjük.

Példa:



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{c \to +\infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

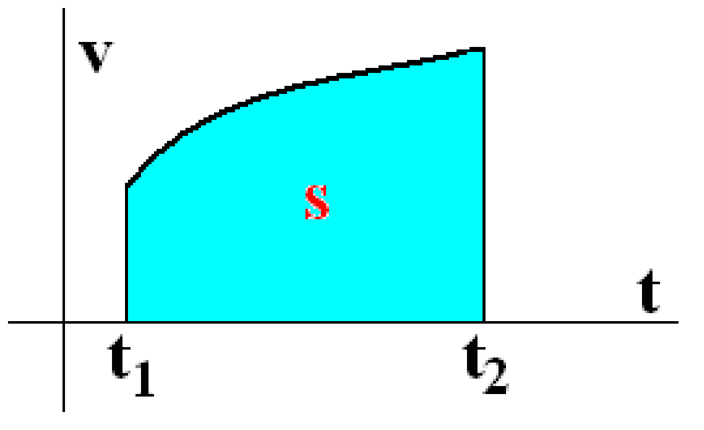
$$= \lim_{c \to -\infty} (-\operatorname{arctg} c) + \lim_{c \to +\infty} \operatorname{arctg} c = \pi$$

Az integrál néhány fizikai és geometriai alkalmazása

Ismeretes, hogy egy mennyiségnek egy másik mennyiségre vonatkozó változási gyorsasága differenciálással számítható. Ha a változási gyorsaságából akarjuk visszakapni az eredeti mennyiséget, akkor integrálni kell.

Ha például ismert egy egyenes pályán mozgó pont sebessége a $[t_1,t_2]$ időintervallumban, akkor a pont elmozdulása a $[t_1,t_2]$ időtartam alatt:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$



Példa:

Egy harmonikus rezgést végző pont sebessége az idő függvényében: v(t) = 5cos(2t+3).

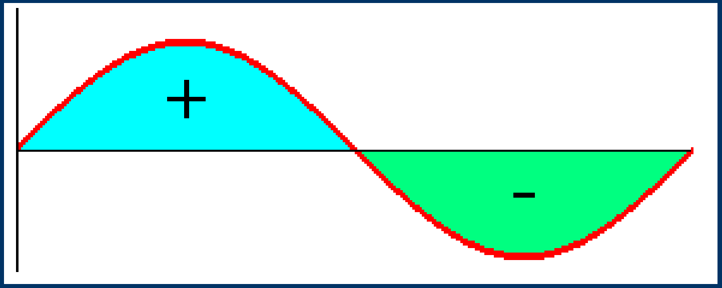
Mennyi a pont elmozdulása a [4,5] időintervallumban?

$$s = \int_4^5 5\cos(2t+3)\,dt = \frac{5}{2}\cdot\left[\sin(2t+3)\right]_4^5 = 3{,}55$$

Területszámítás

Már tudjuk, hogy az integrál geometriai jelentése pozitív függvény esetén az ún. függvény alatti terület.

Általában az integrál az ún. előjeles függvény alatti területet adja. Például a sin függvény integrálja a $[0,2\pi]$ intervallumon 0, mert a $[0,\pi]$ intervallumon az integrál 2, a $[\pi,2\pi]$ intervallumon pedig –2:



$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

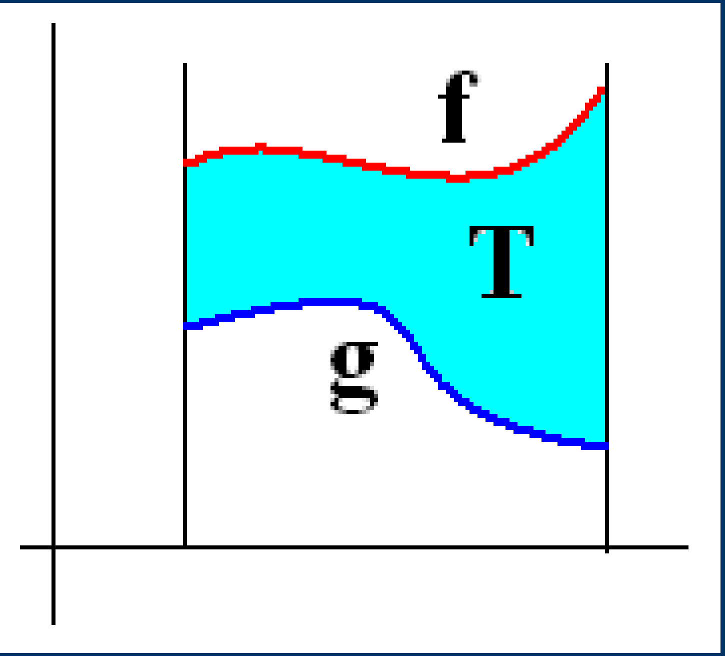
$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

Területszámítás

Ha a f:[a,b]→R és a g:[a,b]→R integrálható függvényekre fennáll, hogy f(x) ≥ g(x), ha x∈[a,b], akkor az két függvény által közrefogott síkrész területe:

$$T = \int_a^b (f - g)$$

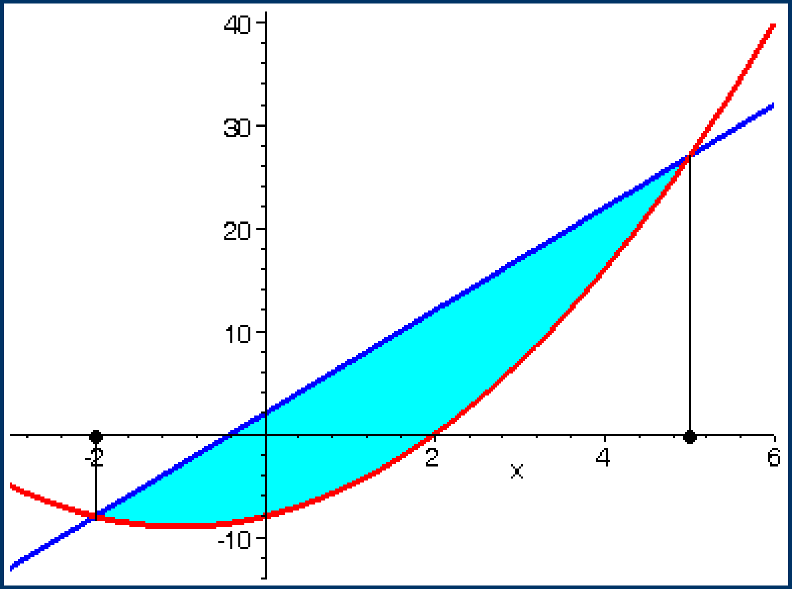


Példa: Számítsuk ki az $f(x)=x^2+2x-8$ és a $g(x)=5x+2$ függvények által közrefogott síkrész területét!

A metszéspontok meghatározása:

$$x^2+2x-8 = 5x+2$$

$$a = -2,\ b = 5$$



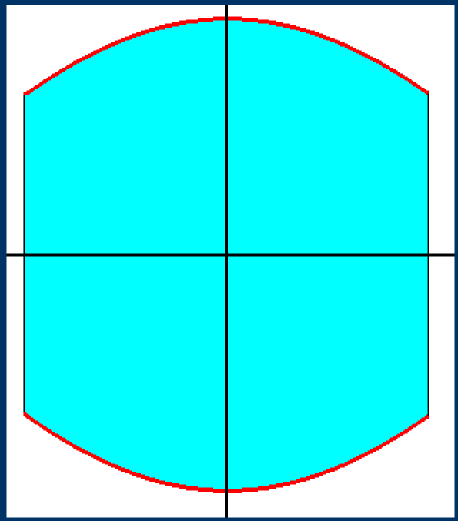
$$T = \int_a^b (f-g)$$

$$T = \int_{-2}^{5} (5x+2)-(x^2+2x-8)\,dx = \int_{-2}^{5} (-x^2+3x+10)\,dx = \frac{343}{6}$$

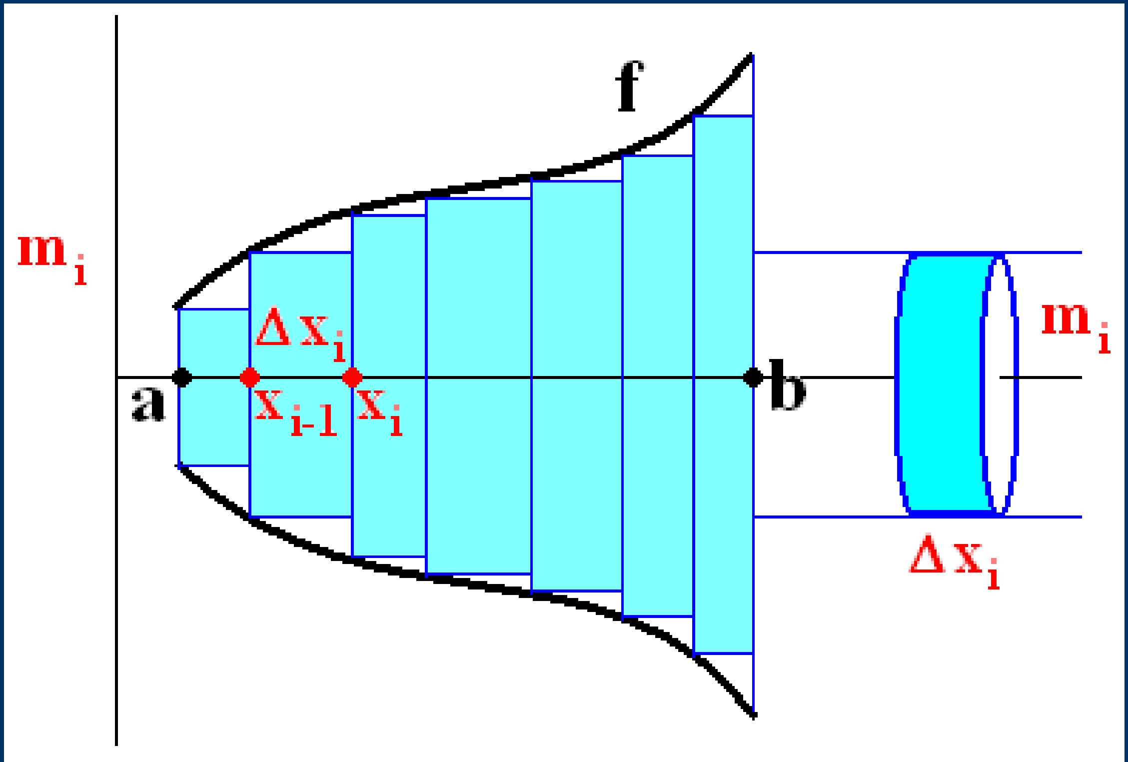
Forgástest térfogata

Egy f:[a,b]→R nemnegatív, folytonos függvény gráfjának a „vízszintes” tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2$$



Indoklás:



A térfogat közelíthető a hengerek térfogatának összegével:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \cdot \pi \cdot \Delta x_i$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \cdot \pi \cdot \Delta x_i$$

Ez az összeg egyben az $x \to \pi \cdot f^2$ függvény alsó integrálközelítő összege az [a,b] intervallumon.

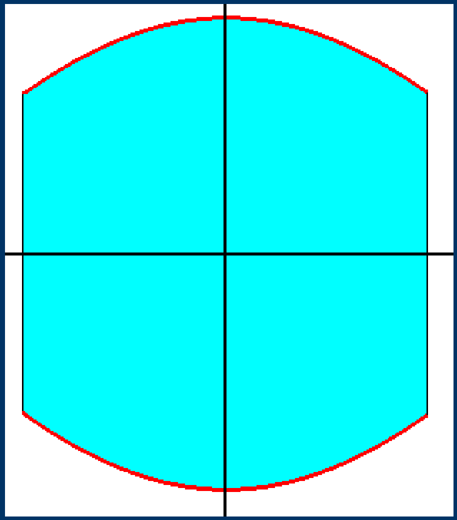
Ezért – figyelembe véve az integrál konstrukcióját – elfogadhatjuk, hogy

$$V = \pi \int_a^b f^2$$

Példa:

$$f(x)=\cos x$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

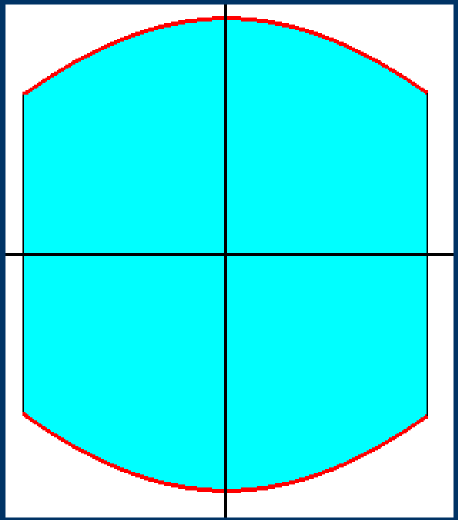


$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \, dx = \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$$

Forgástest palástjának felszíne

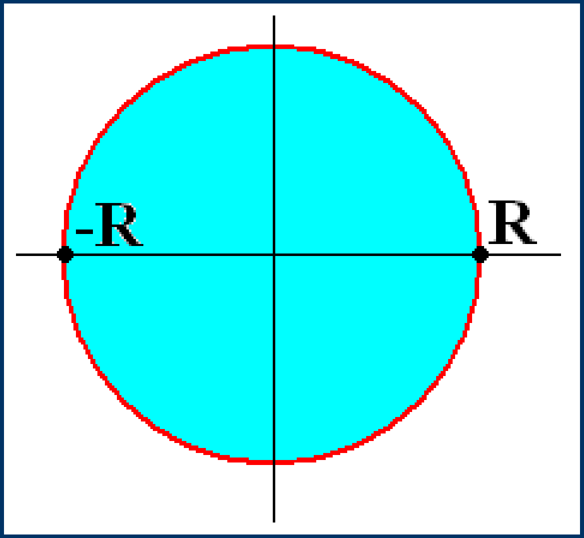
Egy $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ nemnegatív, folytonosan differenciálható függvény gráfjának a „vízszintes” tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának felszíne:

$$F = 2\pi\int_a^b f\sqrt{1+f'^2}$$



Példa: gömb felszíne

$$f(x)=\sqrt{R^2-x^2},\quad x\in[-R,R]$$



$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$F=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}R\,dx=4R^2\pi$$

Görbe ívhossza

Egy f:[a,b]→R folytonosan differenciálható függvény gráfjának ívhossza:

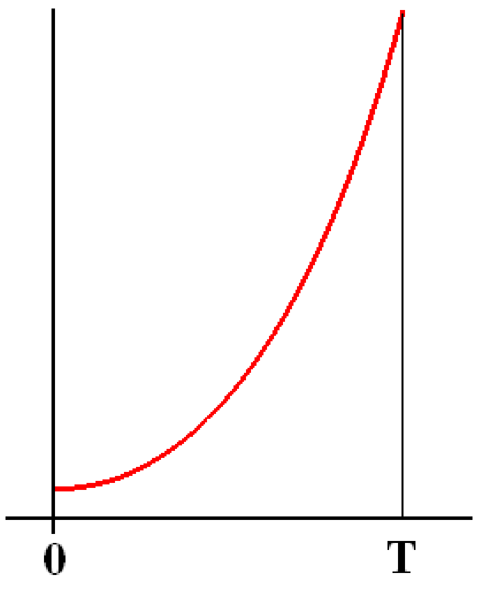
$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2}$$

Példa:

$$f(x) = \text{ch } x, \quad x \in [0,T]$$

$$f\,'(x) = \text{sh } x$$

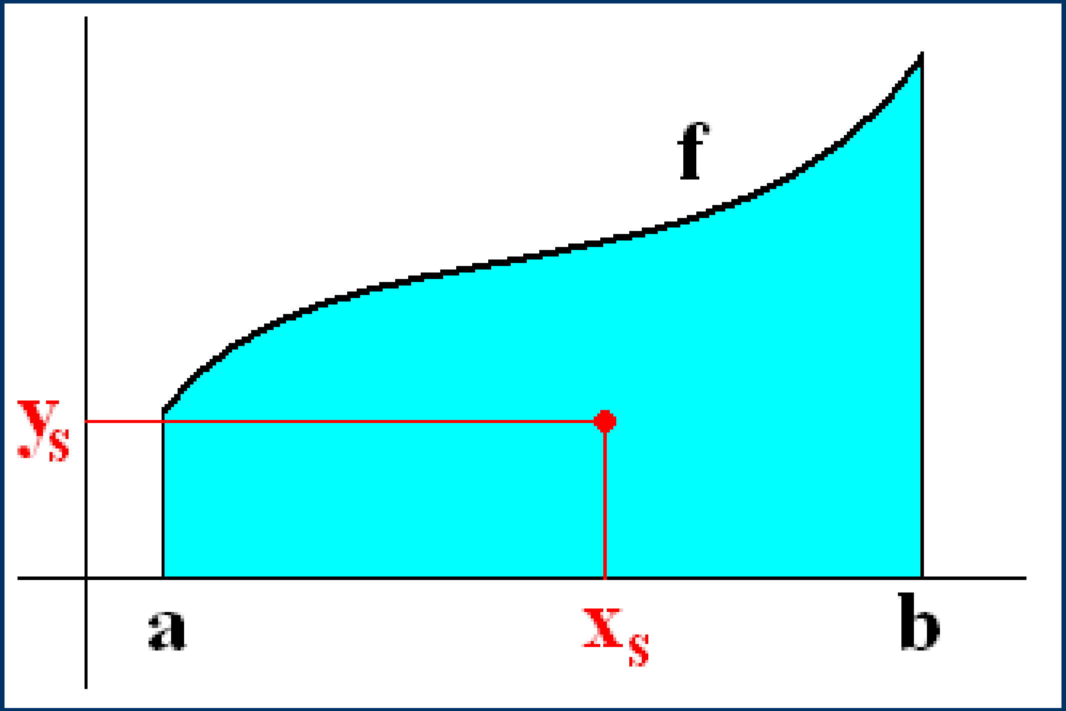
$$L = \int_0^T \sqrt{1+\text{sh}^2 x}\,dx = \int_0^T \text{ch}x\,dx = [\text{sh}x]_0^T = \text{sh}T$$



Síklemez súlypontja

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

$$y_s = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$



Példa:

$$f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi/2]$$

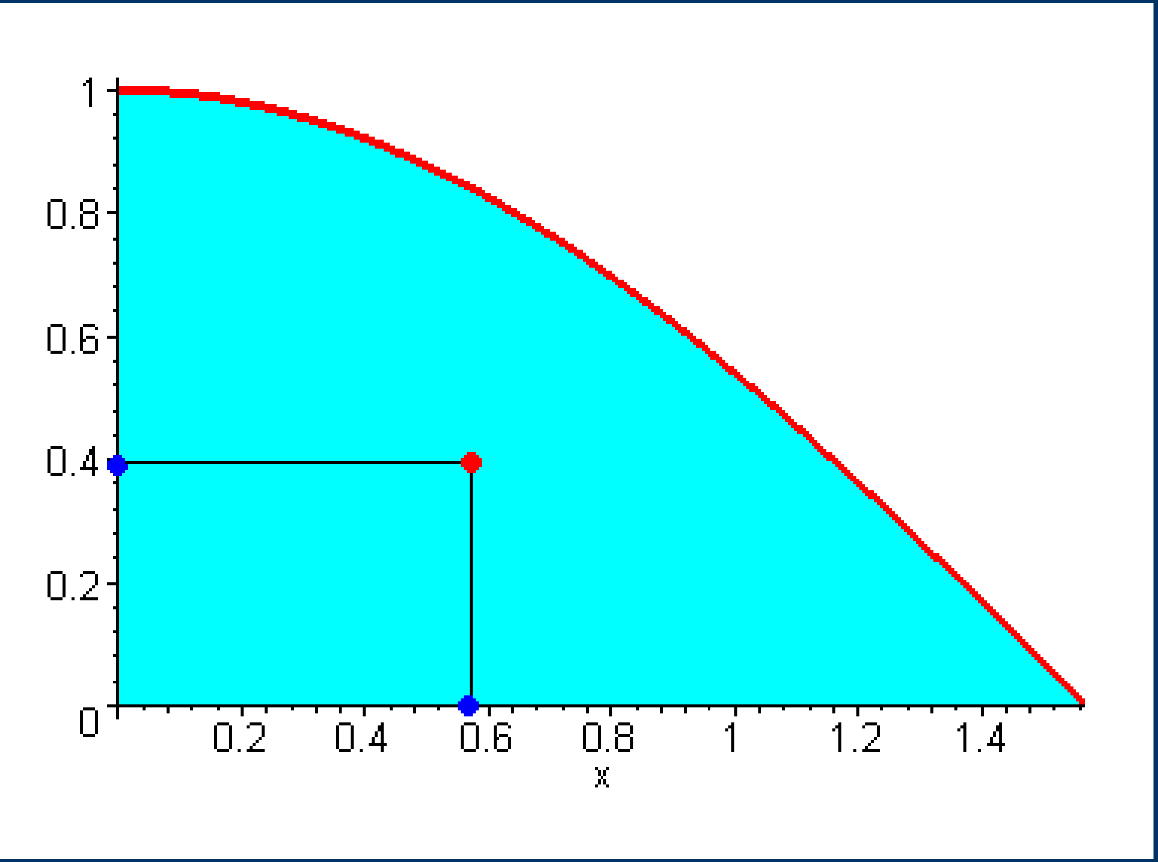
$$\int_a^b x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\,dx = \left[x \cdot \sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Példa:

$$f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi/2]$$



$$y_s = \frac{\pi}{8} = 0,39$$

$$x_s = \frac{\pi}{2} - 1 = 0,57$$