Lineáris programozás

Egy üzemben 4 féle terméket állítanak elő 3 féle erőforrás felhasználásával. Ismert az erőforrásokból rendelkezésre álló mennyiség (kapacitás), a termékek egységára és az, hogy az egyes termékek egy egységének előállításához hány egység kell az egyes erőforrásokból:

	Termékek				
Erőforrások	A	B	C	D	Erőforrás kapacitás
I.	**1**	**0**	**2**	**1**	**280**
II.	**2**	**1**	**0**	**0**	**140**
III.	**0**	**1**	**1**	**1**	**120**
A termék egységára	**400**	**500**	**600**	**800**	

Milyen termékösszetétel esetén maximális az árbevétel?

A probléma matematikai megfogalmazása (modellje)

Keressük meg azokat az x_1, x_2, x_3, x_4 nem negatív számokat (az egyes termékekből gyártandó mennyiségeket), melyek esetén az

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 400 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2 + 600 \cdot x_3 + 800 \cdot x_4$$

négyváltozós célfüggvény értéke (az árbevétel) maximális, miközben fennállnak az alábbi korlátozó feltételek:

$$\begin{aligned} \text{I.}\ & x_1 + 2x_3 + x_4 \le 280 \\ \text{II.}\ & 2x_1 + x_3 + x_4 \le 140 \\ \text{III.}\ & x_2 + x_3 + x_4 \le 120 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Megjegyzés:

A feladat tehát nem más, mint egy speciális feltételes szélsőérték-számítási probléma megoldása.

A specialitás abban áll, hogy a feltételek bal oldala és a célfüggvény az ismeretlenek lineáris függvényei.

Feladattípusok

Általános alakú lineáris programozási feladat (ÁLP)

Az ÁLP feladat

$\leq, \geq, =$

típusú feltételeket egyaránt tartalmazhat.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\
\bar{a}_{11}x_1 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n &\geq \bar{b}_1 \\
&\vdots \\
\bar{a}_{k1}x_1 + \ldots + \bar{a}_{kn}x_n &\geq \bar{b}_k \\
\bar{\bar{a}}_{11}x_1 + \ldots + \bar{\bar{a}}_{1n}x_n &= \bar{\bar{b}}_1 \\
&\vdots \\
\bar{\bar{a}}_{s1}x_1 + \ldots + \bar{\bar{a}}_{sn}x_n &= \bar{\bar{b}}_s
\end{aligned}
$$

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max/\min$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \quad b_i \geq 0, \quad \bar{b}_i \geq 0, \quad \bar{\bar{b}}_i \geq 0$$

Standard alakú lineáris programozási feladat (SLP)

Az SLP feladat csak egyenlőség típusú feltételeket tartalmazó maximum feladat.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \quad b_i \geq 0$$

Megjegyzés:

A LP elméletében fontos szerepe van a SLP feladatoknak. A későbbiekben bemutatásra kerülő szimplex módszer közvetlenül a SLP feladatokra alkalmazható, így minden más LP feladatot először egy SLP feladatra kell visszavezetni.

Normál alakú lineáris programozási feladat (NLP)

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \quad b_i \geq 0$$

Megjegyzés:

A NLP feladatok megoldása a legkönnyebb. Az ilyen feladatok esetén ui. mindig megadható a feladatnak egy megoldása, amelyből kiindulva kereshető az optimális megoldás.

A LP feladatok megoldásairól

Megjegyzés: lehetséges megoldások

Egy $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ szám n-est egy LP feladat lehetséges megoldásának nevezzük, ha az $x_1,x_2,\ldots,x_n$ számok teljesítik az összes előírt feltételt.

Megjegyzés: optimális megoldás(ok)

Ha van lehetséges megoldás, akkor ezek közül azokat melyekre a célfüggvény értéke maximális (minimális) a LP feladat optimális megoldásának nevezzük.

A LP feladatok megoldásairól

Egy LP feladat esetén az alábbi esetek fordulhatnak elő:

- **nincs lehetséges megoldás (a feltételrendszer ellentmondásos)**
- **van lehetséges megoldás, de nincs optimális megoldás (a célfüggvény nem korlátos a megfelelő irányból)**
- **egy optimális megoldás van**
- **végtelen sok optimális megoldás van (alternatív optimum)**

Kétváltozós LP feladatok grafikus megoldása

Példa:

Egy üzemben 3 féle alkatrészt (A,B,C) gyártanak egy alapanyagból, majd ezekből 2 terméket (T_1, T_2) szerelnek össze.

Az egyes alkatrészek alapanyagigénye darabonként:

	Alkatrész		
	A	B	C
Alapanyag szükséglet	4	7	8

A termékek jellemzői:

Termék	Alkatrész igény			Szerelési idő (óra)	Nyereség/egység (Ft)
	A	*B*	*C*		
T_1	3	0	1	3	1500
T_2	0	2	2	4	2000

Feltételek:

- **az összes szerelési kapacitás: 500 óra**
- **a C alkatrészből legfeljebb 200 db készíthető**
- **a piac a két termékből összesen legfeljebb 160 db-ot tud felvenni**
- **a raktáron lévő 1800 egység alapanyagot fel kell használni**

Melyik termelési program hozza a legnagyobb nyereséget?

A matematikai modell:

$$
\begin{aligned}
\text{I.}\ & 3x_1+4x_2 \le 500 \\
\text{II.}\ & x_1+2x_2 \le 200 \\
\text{III.}\ & x_1+x_2 \le 160 \\
\text{IV.}\ & 20x_1+30x_2 \ge 1800 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \\
\hline
& 5000x_1+8000x_2 \to \max
\end{aligned}
$$

1. Lépés:

A lehetséges megoldások halmazának felrajzolása

(Ez egy síkbeli ponthalmaz, mivel a lehetséges megoldások halmaza számpárokból áll.)

Egy egyenlőség típusú feltételnek egy egyenes pontjai felelnek meg: az egyenes egyenlete maga a feltétel.

Egy egyenlőtlenség típusú feltételnek egy félsík pontjai felelnek meg. A félsíkot az az egyenes határolja, melynek egyenletét úgy kapjuk, hogy a feltételben a vagy jelet = jelre cseréljük.

≥ típusú feltétel esetén az egyenes által határolt félsíkok közül azt kell figyelembe venni, amelyik felé az egyenesnek a változók együtthatóiból képezett normálvektora mutat. ≥ típusú feltétel esetén pedig a másikat.

Az LP feladat lehetséges megoldásainak halmazát e halmazok metszetének pontjai alkotják.

Ebben a feladatban nincsenek egyenlőség típusú feltételek, így a lehetséges megoldások halmaza félsíkok metszete:

I. $3x_1+4x_2 \leq 500$

II. $x_1+2x_2 \leq 200$

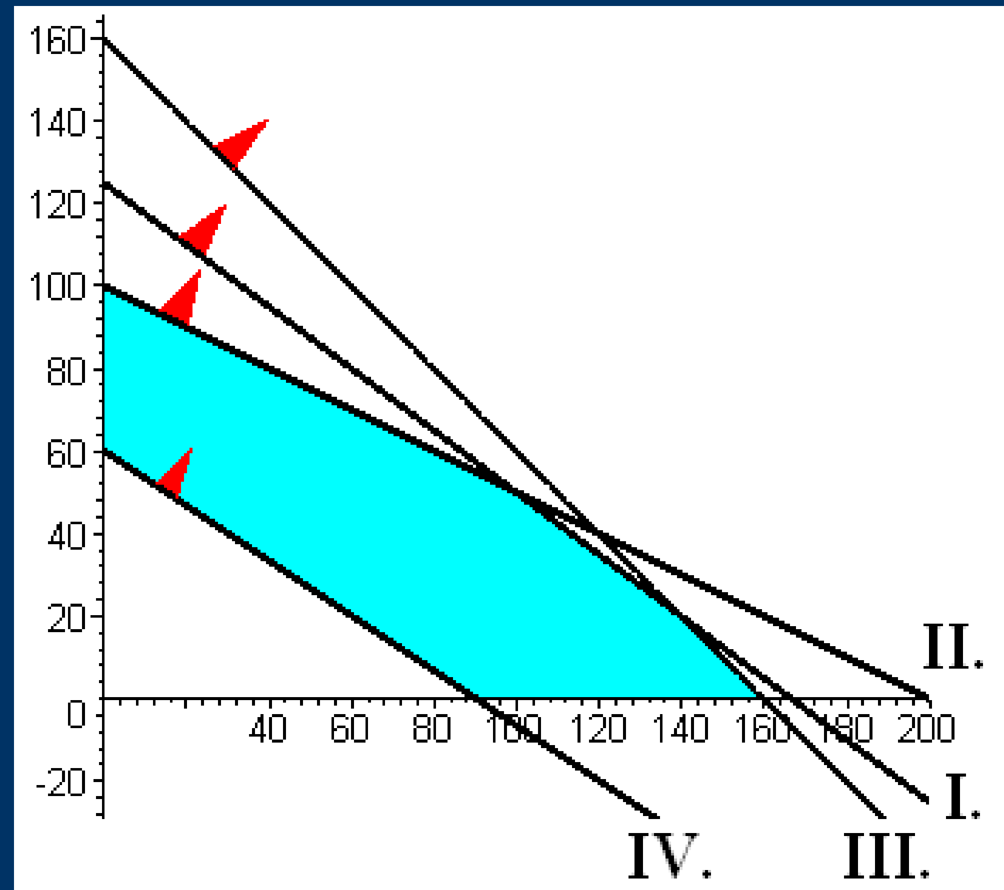
III. $x_1+x_2 \leq 160$

IV. $20x_1+30x_2 \geq 1800$

Feltétel	A feltételnek megfelelő félsíkot határoló egyenes egyenlete	Normálvektor
$3x_1 + 4x_2 = 500$	$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + 125$	$\underline{n}=(3,4)$
$x_1 + 2x_2 = 200$	$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 100$	$\underline{n}=(1,2)$
$x_1 + x_2 = 160$	$x_2 = -x_1 + 160$	$\underline{n}=(1,1)$
$20x_1 + 30x_2 = 1800$	$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 60$	$\underline{n}=(2,3)$

A IV. feltétel esetén az félsíkot kell tekinteni, amelyik felé a normálvektor mutat a többi esetben a másikat.

A feltételnek megfelelő félsíkot határoló egyenes egyenlete	
I.	$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + 125$
II.	$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 100$
III.	$x_2 = -x_1 + 160$
IV.	$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 60$



2. Lépés:

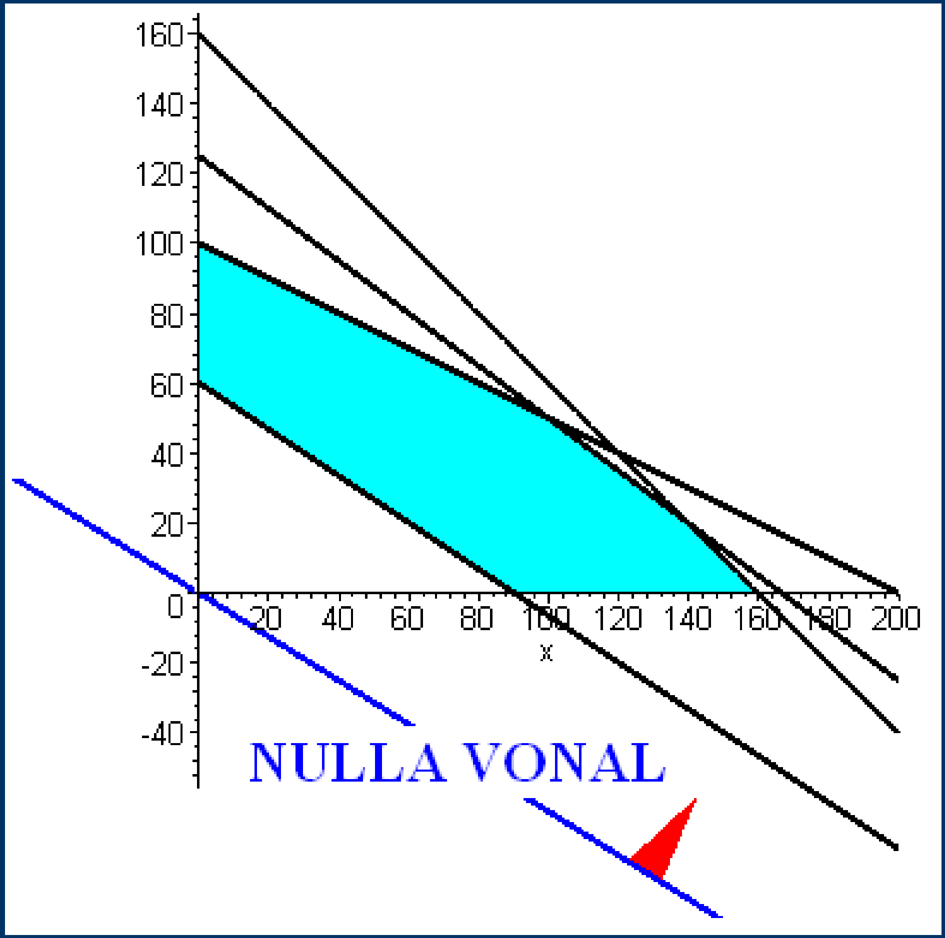
A NULLA VONAL megrajzolása

A célfüggvény 0 értékhez tartozó szintvonalát, vagyis a

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$

egyenletű egyenest nevezzük „nulla vonal”-nak.

A nulla vonalra rárajzoljuk a (c_1,c_2) normálvektorát is.



Feladatunkban a nulla vonal egyenlete $5000x_1 + 8000x_2 = 0$, ami egyszerűsítve: $5x_1 + 8x_2 = 0$, normálvektora: $(5,8)$

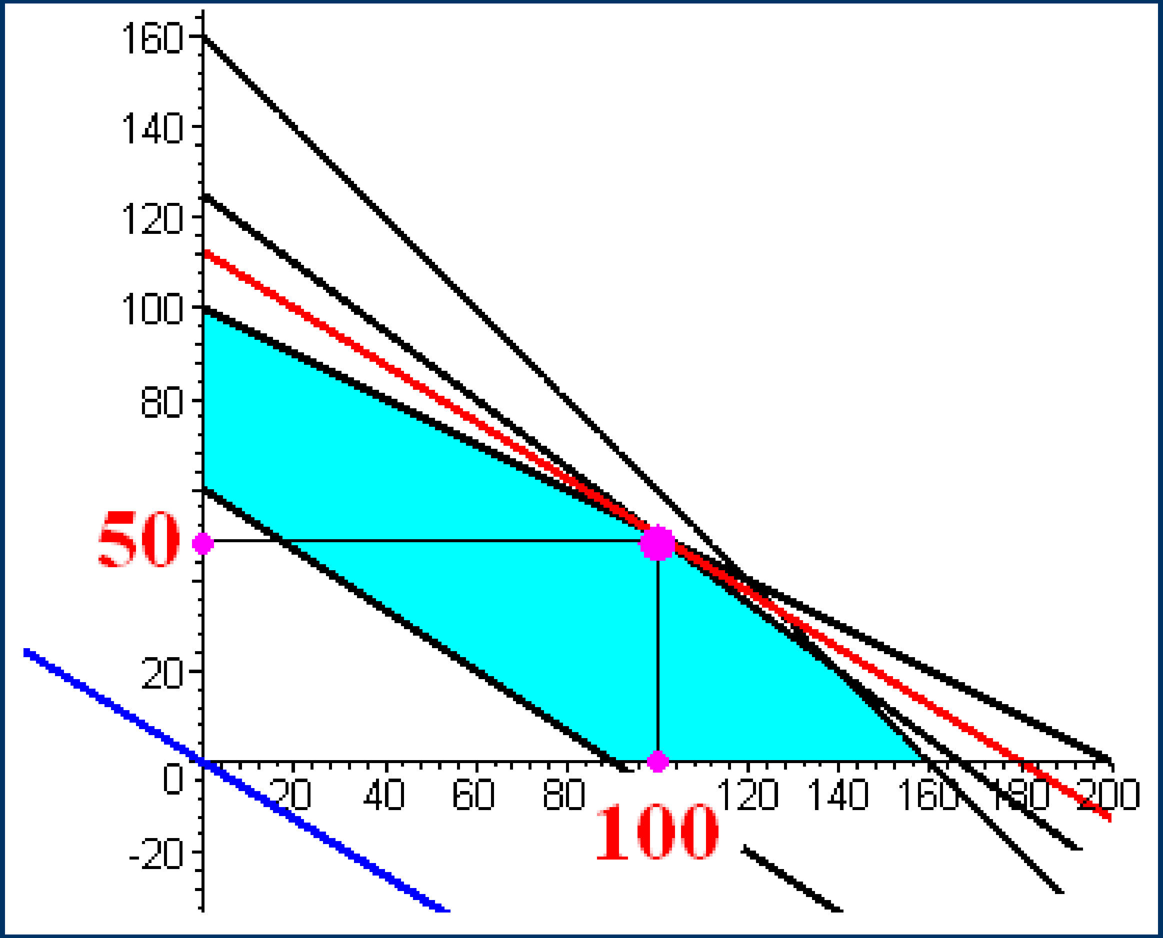
3. Lépés: Az optimális megoldás(ok) megkeresése a nulla vonal párhuzamos eltolásával

A **célfüggvény szintvonalai** egyenesek: egy k értékhez tartozó szintvonal egyenlete $c_1x_1 + c_2x_2 = k$.

Egy szintvonal annál nagyobb k értékhez tartozik, minél messzebb van a nulla vonaltól az $\underline{n} = (c_1,c_2)$ normálvektor irányában. Ebből következően a maximum feladat optimális megoldása (ha van) a nulla vonal párhuzamos eltolásával kapható: **addig toljuk az egyenest, míg a lehetséges megoldások halmazával van közös pontja.**

A nulla vonaltól legmesszebb eső ilyen **egyenesnek a lehetséges megoldások halmazával közös pontja** (vagy pontjai) **mutatják az optimális megoldást.**

A célfüggvény optimális értéke az ehhez tartozó k érték.



Az optimális program: $x_1 = 100$, $x_2 = 50$.

Ekkor a célfüggvény értéke:

$$f(100, 50) = 5000 \cdot 100 + 8000 \cdot 50 = 900000$$

Megjegyzés:

Minimum feladat esetén a nulla vonalat az n irányával ellentétesen kell párhuzamosan eltolni a nulla vonaltól legtávolabbi helyzetig, amíg még van közös pont a lehetséges megoldások halmazával.

Szimplex módszer

A szimplex módszer a standard alakú LP feladatok megoldására kidolgozott módszer. A számolás az elemi bázistranszformáció alkalmazásával történik.

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \quad b_i \geq 0$$

A LP elméletében fontos szerepe van a SLP feladatoknak, mivel minden más LP feladat SLP feladatra vezethető vissza.

A normál alakú lineáris programozási feladatok megoldása szimplex módszerrel

NPL feladat esetén az $x_1=\ldots=x_n=0$ lehetséges megoldás. Ebből kiindulva, bázistranszformációkkal jutunk az optimális megoldáshoz.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned}$$

$$c_1x_1+\ldots+c_nx_n \to \max$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \quad b_i \geq 0$$

A számolás technikája azonos a lineáris egyenletrendszerek megoldásakor használt bázistranszformációval, egy-egy új bázisnak itt is egy-egy táblázat felel meg.
Lényeges különbség van viszont a generáló elem kiválasztásában.

Az első lépés mindig az induló táblázat felírása:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

	Változók $x_1 \ldots x_n$	Segédváltozók $u_1 \ldots u_m$	
	Az együtthatókból képzett oszlopvektorok $\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n$	Egységvektorok $\underline{e}_1 \ldots \underline{e}_m$	A jobb oldali konstansokból álló vektor $\underline{b}$
u_1 $\underline{e}_1$ $\vdots$ $\vdots$ u_m $\underline{e}_m$	$a_{11} \ldots a_{1n}$ $\vdots$ $a_{m1} \ldots a_{mn}$	EGYSÉG-MÁTRIX	b_1 $\vdots$ b_1
	A célfüggvény együtthatói $c_1 \ldots c_n$	$0 \ldots 0$	A célfüggvény aktuális értékének (-1)-szerese, induláskor: 0

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

Megjegyzés:

1. **NPL feladat esetén az $x_1 = \ldots = x_n = 0$ lehetséges megoldás, ezt tartalmazza az induló táblázat**
2. **Az $u_1, \ldots, u_m$ változókat segédváltozóknak nevezzük, számuk egyenlő a feltételek számával (m). A NLP feladat ezek segítségével vezethető vissza SLP feladatra.** ***(A segédváltozók értéke tetszőleges nem negatív szám lehet, így a számolás során az eredeti változókhoz hasonlóan kezeljük őket)***
   Például:

$$
\begin{array}{r}
\text{I. } 2x_1 + x_2 - x_3 \le 10 \\
\text{II. } x_1 + x_2 \le 6 \\
\text{III. } -x_2 + 2x_3 \le 16 \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \\
\hline
x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max \\
\text{(NLP)}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{r}
\text{I. } 2x_1 + x_2 - x_3 + u_1 = 10 \\
\text{II. } x_1 + x_2 + u_2 = 6 \\
\text{III. } -x_2 + 2x_3 + u_3 = 16 \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0 \\
\hline
x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 \to \max \\
\text{(SLP)}
\end{array}
$$

Példa:

$$
\begin{aligned}
\text{I.}\quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \le 10 \\
\text{II.}\quad & x_1 + x_2 \le 6 \\
\text{III.}\quad & -x_2 + 2x_3 \le 16 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \\
\hline
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max
\end{aligned}
$$

Az induló táblázat:

		x_1 $\underline{a}_1$	x_2 $\underline{a}_2$	x_3 $\underline{a}_3$	u_1 $\underline{e}_1$	u_2 $\underline{e}_2$	u_3 $\underline{e}_3$	$\underline{b}$	Hányados
u_1	$\underline{e}_1$	2	1	-1	1	0	0	10	10/1
u_2	$\underline{e}_2$	1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	6	6/1
u_3	$\underline{e}_3$	0	-1	2	0	0	1	16	
		1	3	2	0	0	0	0	

Az optimális megoldás megtalálása érdekében elemi bázistranszformációkat hajtunk végre.

A generáló elem kiválasztásakor az alábbi feltételeknek kell egyidejűleg teljesülni:

1. **A munkaoszlop (a generáló elem oszlopa) csak pozitív elem felett lehet**
2. **A munkaoszlopon belül pozitív elem lehet generáló elem**
3. **A munkaoszlopon belüli pozitív elemek közül az lesz a generáló elem, amelyre a <u>b</u> vektor és a munkaoszlop megfelelő komponensének hányadosa a legkisebb**

A példában az utolsó sorban három pozitív elem is van: 1, 3, 2, munkaoszlop ezen elemek közül bármelyiknek az oszlopa lehet.

Válasszuk munkaoszlopnak a 3 feletti (második) oszlopot!

		x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3		Há-nya-dos
		$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_3$	$\underline{b}$	
u_1	$\underline{e}_1$	2	1	-1	1	0	0	10	10/1
u_2	$\underline{e}_2$	1	1	0	0	1	0	6	6/1
u_3	$\underline{e}_3$	0	-1	2	0	0	1	16	
		1	3	2	0	0	0	0	

A munkaoszlopban két elem pozitív, ezek jöhetnek szóba, mint generáló elem.

A hányadosokat kiszámítva: 10/1 > 6/1 , így generáló elemnek a munkaoszlop második sorában lévő elemet kell választani, vagyis az $\underline{a}_2 \leftrightarrow \underline{e}_2$ elemi bázistranszformációt kell végrehajtani.

		x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
		$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_3$	$\underline{b}$
u_1	$\underline{e}_1$	2	1	-1	1	0	0	10
u_2	$\underline{e}_2$	1	1	0	0	1	0	6
u_3	$\underline{e}_3$	0	-1	2	0	0	1	16
		1	3	2	0	0	0	0

$x_1 = 0$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$u_1 = 10$
$u_2 = 6$
$u_3 = 16$

		$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_3$	$\underline{b}$
u_1	$\underline{e}_1$	1	0	-1	1	-1	0	4
x_2	$\underline{a}_2$	1	1	0	0	1	0	6
u_3	$\underline{e}_3$	1	0	2	0	1	1	22
		-2	0	2	0	-3	0	-18

$x_1 = 0$
$x_2 = 6$
$x_3 = 0$
$u_1 = 4$
$u_2 = 0$
$u_3 = 22$

A táblázat értékelése

Az utolsó sorbeli elemek alapján lehet eldönteni, hogy megtaláltuk-e az optimális megoldást, vagy tovább kell számolni az alábbiak szerint:

1. **Ha az utolsó sorban nincs pozitív elem, akkor a program optimális a célfüggvény maximális értéke leolvasható.**
2. **Ha az utolsó sorban van olyan pozitív elem, mely felett nincs pozitív elem, akkor a faladatnak nincs optimális megoldása.**
3. **Ha az utolsó sorban van pozitív elem és felette van pozitív elem, akkor a program még nem optimális, generáló elem választással újabb elemi bázistranszformációt kell végrehajtani.**

		x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
		$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_3$	$\underline{b}$
u_1	$\underline{e}_1$	1	0	-1	1	-1	0	4
x_2	$\underline{a}_2$	1	1	0	0	1	0	6
u_3	$\underline{e}_3$	1	0	2	0	1	1	22
		-2	0	2	0	-3	0	-18

Ez a táblázat a 3. kategóriába tartozik, így tovább kell számolni.

Munkaoszlop csak a harmadik oszlop lehet, a itt pedig csak egy pozitív elem van, ez lesz a generáló elem, vagyis az $\underline{a}_3 \leftrightarrow \underline{e}_3$ elemi bázistranszformációt hajtjuk végre.

		x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
		a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3	b
u_1	e_1	1	0	-1	1	-1	0	4
x_2	a_2	1	1	0	0	1	0	6
u_3	e_3	1	0	2	0	1	1	22
		-2	0	2	0	-3	0	-18

		a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3	b
u_1	e_1	3/2	0	0	1	-1/2	1/2	15
x_2	a_2	1	1	0	0	0	0	6
x_3	a_3	1/2	0	1	0	1/2	1/2	11
		-3	0	0	0	-4	-1	-40

$x_1 = 0$
$x_2 = 6$
$x_3 = 11$
$u_1 = 15$
$u_2 = 6$
$u_3 = 0$

OPTIMÁLIS MEGOLDÁS!!!

A célfüggvény értéke ekkor: $1 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 11 = 40$

A teljes számolás:

		x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	
		a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3	b
u_1	e_1	2	1	-1	1	0	0	10
u_2	e_2	1	1	0	0	1	0	6
u_3	e_3	0	-1	2	0	0	1	16
		1	3	2	0	0	0	0

u_1	e_1	1	0	-1	1	-1	0	4
x_2	a_2	1	1	0	0	1	0	6
u_3	e_3	1	0	2	0	1	1	22
		-2	0	2	0	-3	0	-18

u_1	e_1	3/2	0	0	1	-1/2	1/2	15
x_2	a_2	1	1	0	0	0	0	6
x_3	a_3	1/2	0	1	0	1/2	1/2	11
		-3	0	0	0	-4	-1	-40