Primitív függvény

(határozatlan integrál)

Az ebben a részben szereplő függvények mindegyike legyen egy I tetszőleges, pozitív hosszúságú intervallumon értelmezett valós értékű függvény ($I \rightarrow R$).

Definíció: primitív függvény

Ha

- **az $F:I \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható I-n és**
- **$F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén,**

akkor azt mondjuk, hogy az F függvény primitív függvénye az $f:I \to \mathbb{R}$ függvénynek.

Jelölés:

$$\boxed{F = \int f}$$

avagy az f változóját is megjelölve:

$$F(x) = \int f(x)\,dx,\quad F(t) = \int f(t)\,dt,\quad F(z) = \int f(z)\,dz, \text{ stb.}$$

Megjegyzések:

Ha az $F:I\to R$ függvény primitív függvénye az $f:I\to R$ függvénynek, akkor tetszőleges $c\in R$ esetén a

$$G(x) = F(x) + c, \quad x\in I$$

függvény is primitív függvénye f-nek.

Indoklás: $G' = (F+c)' = F' + c' = F' + 0 = f$

Ha az $F:I\to R$ és a $G:I\to R$ függvények primitív függvényei az $f:I\to R$ függvénynek, akkor létezik olyan $c\in R$, hogy

$$G(x) = F(x) + c, \quad x\in I$$

Indoklás: $(F-G)' = F'-G' = f-f = 0 \Rightarrow F-G = c\ (\in R) \Rightarrow F = G + c$

A fenti két megjegyzés alapján megállapítható, hogy:

Ha egy f függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok primitív függvénye van, de ezek csak egy (additív) konstansban térhetnek el egymástól.

Definíció: határozatlan integrál

Az f függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük.

Példa:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$c \in \mathbf{R}$

Indoklás: (sin x + c)' = cos x

Néhány elemi függvény határozatlan integrálja

Konstans függvény határozatlan integrálja

$$\int k\,dx = kx + c$$

f	$\int f$
$\mathbf{k} \quad (k \in \mathbf{R})$	$\mathbf{k \cdot x + c}$

Indoklás: $(k \cdot x + c)' = k$

Példa: $$\int 7dx = 7x + c$$

A hatványfüggvények határozatlan integrálja ($n \neq -1$)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

f	$\int f$
$\mathbf{x^n}$ ($n \in \mathbf{R}$, $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

Indoklás:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c\right)' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$$

Példa:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

További példák:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \sqrt[5]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx = \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c$$

A hatványfüggvények határozatlan integrálja (n = – 1)

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

f	$\int f$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$

Az exponenciális függvények határozatlan integrálja

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

f	$\int f$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + c$
e^x	$e^x + c$

Indoklás:

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + c\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} a^x + c\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$$

Példa:

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$$

Néhány további függvény határozatlan integrálja

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \operatorname{cth} x + c$$

Néhány további függvény határozatlan integrálja

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arch} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsh} x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arth} x + c, \text{ ha } x \in]-1,1[$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arcth} x + c, \text{ ha } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

Tétel:

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

„tagonként lehet integrálni”

$$\int a \cdot f = a \cdot \int f \qquad a \in R$$

„a szorzó konstans kiemelhető az integrálból”

Az alapintegrálokra visszavezethető integrálási feladatok

$$\int \frac{7x^5+6\cdot\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}}dx = 7\cdot\int\frac{x^5}{\sqrt[3]{x}}dx+6\cdot\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx-3\cdot\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=$$

$$=7\cdot\int x^{\frac{14}{3}}dx+6\cdot\int x^{\frac{1}{6}}dx-3\cdot\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=7\cdot\frac{x^{\frac{17}{3}}}{\frac{17}{3}}+6\cdot\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}-3\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c$$

$$\boxed{\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c}$$

Az alapintegrálokra visszavezethető integrálási feladatok

$$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int 1dx = \mathrm{tg}x - x + c$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}\,x}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}\,x}$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \int 1dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \mathrm{arctg}x + c$$

Parciális módszer

Tétel:

Ha

- **az f:I→R és g:I→R függvények differenciálhatók és**
- **létezik az $\int (f \cdot g')$ primitív függvény,**

akkor létezik az $\int (f' \cdot g)$ primitív függvény is és

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

Indoklás: a szorzatfüggvények differenciálási szabálya alapján:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \Rightarrow \int (f \cdot g)' = \int (f' \cdot g) + \int (f \cdot g') \Rightarrow$$

$$f \cdot g = \int (f' \cdot g) + \int (f \cdot g') \Rightarrow \int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

Parciális módszerrel integrálható függvények I.

$$\int P(x)\cdot\begin{Bmatrix} \sin(cx+d), \cos(cx+d) \\ \mathrm{sh}(cx+d), \mathrm{ch}(cx+d) \\ a^{cx+d} \end{Bmatrix}$$

g **f ’**

P: polinom

$a,c,d \in \mathbb{R}$ ($a>0$, $a\neq 1$)

$$\int (f' \cdot g) = f\cdot g - \int (f\cdot g')$$

Példa:

$$\int (x^2+3x+1)\cdot e^{2x}\,dx = ?$$

Példák:

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x \, dx =$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

A következő példában másodfokú polinom szerepel, ezért ott kétszer kell alkalmazni a parciális módszer formuláját.

Primitív függvény (határozatlan integrál)

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

$$\int (x^2 + 3x + 1) \cdot e^{2x}\, dx = (x^2 + 3x + 1) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int (2x + 3) \cdot e^{2x}\, dx =$$

első alkalmazás:

$$g(x) = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow g'(x) = 2x + 3$$

$$f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

második alkalmazás:

$$g(x) = 2x + 3 \Rightarrow g'(x) = 2$$

$$f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$= (x^2 + 3x + 1) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left((2x + 3) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int e^{2x}\, dx \right) =$$

$$= (x^2 + 3x + 1) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - (2x + 3) \cdot \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{4} + c = (x^2 + 2x) \cdot \frac{e^{2x}}{4} + c$$

Parciális módszerrel integrálható függvények II.

$$\int P(x)\left\{\begin{matrix} \arcsin(cx+d), \arccos(cx+d) \\ \mathrm{arctg}(cx+d), \mathrm{arcctg}(cx+d) \\ \mathrm{arsh}(cx+d), \mathrm{arch}(cx+d) \\ \mathrm{arth}(cx+d), \mathrm{arcth}(cx+d) \\ \log_a(cx+d) \end{matrix}\right\}dx$$

P: polinom

$a, c, d \in \mathbf{R}$

($a>0$, $a \neq 1$)

f ’

g

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

Példa:

$$\int (x^3 + 3x^2 + 3) \cdot \ln x \, dx = ?$$

Példa:

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

$$\int (x^3 + 3x^2 + 3) \cdot \ln x \, dx = \left(\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + 3x \right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + 3x \right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = x^3 + 4x^2 + 3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + 3x$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + 3x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{4} + 4\frac{x^2}{3} + 3 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} + 3x \right) \ln x - \left(\frac{x^4}{16} + 4\frac{x^3}{9} + 3x \right) + c$$

Speciális eset:

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

$$\int \left\{ \begin{matrix} \arcsin(cx+d), \arccos(cx+d), \mathrm{arctg}(cx+d), \mathrm{arcctg}(cx+d) \\ \mathrm{arsh}(cx+d), \mathrm{arch}(cx+d), \mathrm{arth}(cx+d), \mathrm{arcth}(cx+d) \\ \log_a(cx+d) \end{matrix} \right\}$$

Példa:

Ha a polinom „hiányzik”, akkor a konstans 1 függvényt vesszük g-nek.

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

Parciális módszerrel integrálható függvények III.

$$\int a^{kx+m}\cdot\begin{Bmatrix}\sin(cx+d)\\ \cos(cx+d)\end{Bmatrix}dx$$

$$\int\begin{Bmatrix}\sin(c_1x+d_1)\\ \cos(c_1x+d_1)\\ \mathrm{sh}(c_1x+d_1)\\ \mathrm{ch}(c_1x+d_1)\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\sin(c_2x+d_2)\\ \cos(c_2x+d_2)\\ \mathrm{sh}(c_2x+d_2)\\ \mathrm{ch}(c_2x+d_2)\end{Bmatrix}dx$$

$a,c,d\in\mathbf{R}$ ($a>0$, $a\neq 1$)

Ezekben az esetekben a parciális módszer kétszeri alkalmazásával lehet eredményre jutni:

A jelölés az első lépésben nem kötött, de a másodikban igen: ha egy függvényt az első lépésben pl. g-vel jelöltük, akkor az új integrálban a belőle származtatott (g’) függvényt kell a második lépésben is g-nek nevezni.

A második lépés után a keresett integrálra egyenlet adódik, ebből az integrál kifejezhető.

Példa:

$$\int (f' \cdot g) = f \cdot g - \int (f \cdot g')$$

$$\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \int e^{2x} \cdot \cos x \, dx =$$

$$= -e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \sin x - 4 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx$$

első alkalmazás:

$$g(x) = e^{2x} \Rightarrow g'(x) = 2e^{2x}$$

$$f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x$$

második alkalmazás:

$$g(x) = e^{2x} \Rightarrow g'(x) = 2e^{2x}$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$$

$$\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2e^{2x} \cdot \sin x - 4 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx$$

$$5 \cdot \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = e^{2x} \cdot (-\cos x + 2\sin x) + c$$

$$\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = 0{,}2 \cdot e^{2x} \cdot (-\cos x + 2 \sin x) + c$$

Helyettesítéses integrálás

Tétel:

Ha

- **a $g: I \to J$ függvény differenciálható és**
- **létezik az $f: J \to \mathbb{R}$ függvény $\int f$ primitív függvénye,**

akkor létezik az $\int (f \circ g) \cdot g'$ primitív függvény is és

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f\right) \circ g$$

avagy

$$\int f(g) \cdot g' = F(g), \quad \text{ahol } F = \int f$$

Megjegyzések:

1. A helyettesítéses integrálás tétele az összetett függvények differenciálási szabályának következménye:

$$\int f(g) \cdot g' = F(g), \qquad \text{ahol } F = \int f$$

így

$$(F(g))' = F(g) \cdot g' = f(g) \cdot g'$$

2. A formula két (formailag különböző) módszert alapoz meg:

Az $\int$ **f(g) · g ' = F(g)** formula alkalmazása

Példa:

$$\int \cos\left(x^3\right) \bullet 3x^2 dx = ?$$

Az f(x) = cos x, g(x) = x^3 jelölésekkel a feladat $\int$ f(g)·g' alakú.

A formula szerint a számolás lényegi része az F = $\int$ f primitív függvény meghatározása:

$$f(t) = \cos t \Rightarrow F(t) = \sin t$$

$$\int \cos\left(x^3\right) \bullet 3x^2 dx = \sin\left(x^3\right) + c$$

Vegyük észre, hog[illegible] feladatok esetén az integrál kiszámít[illegible] meghatározását jelenti. A g bels[illegible]” a megfelelő helyre. Ezt megf[illegible]ulmányozva.

A fenti gondolatmenet alkalmazását jól megfigyelhetjük az alábbi példákat tanulmányozva:

$$\int \cos\left(x^3\right) \bullet 3x^2 dx = \sin\left(x^3\right) + c$$

f(t) = cos t ⇒ F(t) = sin t

$$\int \cos(\ln x) \bullet \frac{1}{x} dx = \sin(\ln x) + c$$

$$\int \cos(\mathrm{tg}\, x) \bullet \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sin(\mathrm{tg}\, x) + c$$

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right) \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sin\left(\sqrt{x}\right) + c$$

A fenti feladatok megoldási sémája:

$$\int \cos(g) \bullet g' dx = \sin(g) + c$$

A séma magyarázata:

$$(\sin g)' = \cos(g) \cdot g'$$

Az $\int$ **f(g) · g ' = F(g)** formula alkalmazása

Példa:

$$\int x^3 \cdot \frac{1}{1+x^8}\,dx = ?$$

Először átalakítjuk a feladatot:

$$\int x^3 \cdot \frac{1}{1+x^8}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 \cdot \frac{1}{1+(x^4)^2}\,dx$$

Itt azt kell észrevenni, hogy az $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ **és az** $g(x) = x^4$

jelölésekkel a feladat $\int$ **f(g)·g' alakú.**

Primitív függvény (határozatlan integrál)

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad F(t) = \text{arctg}\, t$$

$$\int f(g) \cdot g' = F(g)$$

$$\frac{1}{4}\int 4x^3 \cdot \frac{1}{1+(x^4)^2}\,dx = \frac{1}{4}\text{arctg}(x^4) + c$$

A fenti feladat megoldási sémája:

$$\int \frac{1}{1+g^2} \cdot g' = \text{arctg}(g) + c$$

A séma magyarázata:

$$\left(\text{arctg}(g)\right)' = \frac{1}{1+g^2} \cdot g'$$

Az $\int f(g) \cdot g' = F(g)$ formula néhány speciális esete

$$f(t) = t^n$$

$(n \neq -1)$

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

Magyarázat:

$$\left(\frac{g^{n+1}}{n+1} + c \right)' = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot g^n \cdot g' = g^n \cdot g'$$

Példa:

$$\int \cos x \cdot \sin^3 x \, dx = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

További példák

$$\int g^{n}\cdot g'=\frac{g^{n+1}}{n+1}+c$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=-\frac{1}{2}\int(-2x)\cdot(1-x^{2})^{\frac{-1}{2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^{2})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=-\sqrt{1-x^{2}}+c$$

$$\int g^{\frac{-1}{2}}\cdot g'=\frac{g^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

További példák

$$\int g^{n} \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{2e^{5x}}{\sqrt[3]{8-3e^{5x}}}\,dx = \frac{2}{-15}\int -15e^{5x}\left(8-3e^{5x}\right)^{\frac{-1}{3}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{-15}\cdot\frac{\left(8-3e^{5x}\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$\int g^{\frac{-1}{3}} \cdot g' = \frac{g^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

További példák

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^5\,dx = \frac{(\ln x)^6}{6} + c$$

$$\int g^5 \cdot g' = \frac{g^6}{6} + c$$

Az $\int$ f(g) · g ' = F(g) formula néhány speciális esete

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

$$\int \frac{1}{g} g' = \int \frac{g'}{g} = \ln|g| + c$$

Magyarázat:

$$\left(\ln|g| + c\right)' = \frac{1}{g} \cdot g' = \frac{g'}{g}$$

Példa:

$$\int \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} dx = \ln|\mathrm{sh}x| + c$$

Az $\int f(g) \cdot g' = F(g)$ formula néhány speciális esete

$$f(t) = e^t$$

$$\int e^g \cdot g' = e^g + c$$

Magyarázat:

$$\left(e^g + c\right)' = e^g \cdot g'$$

Példa:

$$\int e^{x^2} \cdot 2x\,dx = e^{x^2} + c$$

Az $\int f(g) \cdot g' = F(g)$ formula néhány speciális esete

$$g(t) = a \cdot t + b$$

$$\int f(a \cdot x + b)\,dx = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + c$$

Magyarázat:

$$\left(\frac{F(a \cdot x + b)}{a} + c\right)' = \frac{1}{a} F'(a \cdot x + b) \cdot a = f(a \cdot x + b)$$

A formula jelentősége abban áll, hogy ha az f függvény primitív függvénye ismert, akkor az $x \to f(ax+b)$ típusú függvényeket is nehézség nélkül tudjuk integrálni.

Példák:

$$\int \cos(3x + 2)\,dx = \frac{\sin(3x + 2)}{3} + c$$

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

Változóhelyettesítés

Tekintsük újra az összetett függvények differenciálási szabályából származtatott $\int (f \circ g) \cdot g' = (\int f) \circ g$ formulát!

Ha a g függvény a korábban megadott tulajdonságok mellett még invertálható is, akkor a formula két oldalán lévő függvényeknek képezzük a kompozíciós szorzatát a g inverzével. Így egy újabb formulához jutunk, melynek alkalmazását változóhelyettesítésként fogjuk emlegetni:

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f\right) \circ g \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\int (f \circ g) \cdot g'\right) \circ g^{-1} = \int f}$$

avagy a másik jelölési módból kiindulva:

$$\int f(g) \cdot g' = F(g) \Rightarrow \left(\int f(g) \cdot g'\right) \circ g^{-1} = F, \quad \text{ahol } F = \int f$$

Megjegyzés:

Az így kapott formula lényege, hogy az $\int f$ integrál kiszámításához az $\int (f \circ g) \cdot g'$ primitív függvényt kell meghatározni, majd ennek a g inverzével való kompozíciós szorzata adja a keresett primitív függvényt .

A változóhelyettesítés elnevezés arra utal, hogy az integrálandó f(x) függvény x változóját „helyettesítjük" egy megfelelően megválasztott x=g(t) függvénnyel annak reményében, hogy az $\int f(x)dx$ integrálnál könnyebben meg tudjuk határozni az $\int (f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$ integrált.

$$\int f = \left(\int (f \circ g) \cdot g' \right) \circ g^{-1}$$

avagy:

$$\int f(x)\, dx = \left(\int (f(g(t)) \cdot g'(t) \right) \circ g^{-1}(x)$$

Változóhelyettesítés

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \right) \circ g^{-1}(x)$$

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\cdot \sin t + c = \frac{1}{3}\cdot \sin(3x+2) + c$$

$$t = 3x+2, \quad x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}, \quad dx = \frac{1}{3}dt$$

A könnyebb áttekinthetőség érdekében a számolásokban a fenti egyszerűsített jelöléseket szokás használni. A formulával való összevetéshez tekintsük az alábbi magyarázatot:

$$x = g(t) = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3} \Rightarrow g'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$$

Változóhelyettesítés

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(g(t))\cdot g'(t)dt \right) \circ g^{-1}(x)$$

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \int \sin t \cdot 2t\,dt = 2\sin t - 2t\cos t + c =$$

$$= 2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + c$$

$$t = \sqrt{x}, \quad x = t^2, \quad \frac{dx}{dt} = 2t, \quad dx = 2t\,dt$$

Megjegyzés:

Az $\int(t\cdot \sin t)dt$ integrált parciális módszerrel lehet meghatározni. Ezt meg is tettük parciális módszert leíró résznél (lásd ott).

Változóhelyettesítés

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \right) \circ g^{-1}(x)$$

$$\int \frac{1}{e^{2x} - 2e^{x}}\,dx = \int \frac{1}{t^2 - 2t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2(t-2)}\,dt = \ldots$$

$t = e^x, \quad x = \ln t,$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$dx = \frac{1}{t}\,dt$$

Megjegyzés:

Az kapott integrál kiszámítási módját lásd a racionális törtfüggvények integrálása című résznél.

Változóhelyettesítés

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(g(t))\cdot g'(t)dt \right) \circ g^{-1}(x)$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx = \int \frac{t^2}{t^3+1}\cdot 4t^3\,dt = 4\cdot\int \frac{t^5}{t^3+1}dt = \ldots$$

$$t = \sqrt[4]{x}, \quad x = t^4, \quad \frac{dx}{dt} = 4t^3, \quad dx = 4t^3\,dt$$

Megjegyzés:

Az kapott integrál kiszámítási módját lásd a racionális törtfüggvények integrálása című résznél.

Változóhelyettesítés
Néhány speciális helyettesítés

Az „x = sin t ” helyettesítés alkalmazása

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \frac{2t+\sin 2t}{4} + c =$$

$x = \sin t$, $t = \arcsin x$, $dx/dt = \cos t$, $dx = \cos t\, dt$

$$= \frac{2\arcsin x + \sin(2\arcsin x)}{4} + c = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

Megjegyzések:

1. A számolásban felhasználtuk a $\sin(2x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x$ azonosságot az alábbiak szerint:

$$\sin(2\arcsin x) = 2\cdot\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x) =$$
$$= 2\cdot x\cdot\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = 2\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}$$

2. A $\cos^2 x$ függvény integrálásával kapcsolatban lásd az *$x\to\sin^n x$, $x\to\cos^n x$, $x\to sh^n x$, $x\to ch^n x$ alakú függvények integrálása* című részt!

3. Az x=sint helyettesítéssel általában érdemes próbálkozni, ha a függvény formulája valamilyen formában tartalmazza a következő kifejezést:

$$\sqrt{1-x^2}$$

Példa:

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

x = sin t, t = arcsin x, dx/dt = cos t, dx = cos t dt

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2t\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4t)\,dt =$$

$$\frac{t}{8} - \frac{\sin 4t}{32} + c = \frac{\arcsin x}{8} - \frac{\sin(4\arcsin x)}{32} + c =$$

$$= \frac{\arcsin x}{8} - \frac{x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}{8} + c$$

Változóhelyettesítés
Néhány speciális helyettesítés

Az „x = ch t ” helyettesítés alkalmazása

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\int\sqrt{ch^2t-1}\cdot sht\,dt=\int sh^2t\,dt=\int\frac{ch2t-1}{2}dt=\frac{sh2t}{4}-\frac{t}{2}+c=$$

$x = ch\ t$, $t = arch\ x$, $dx/dt = sh\ t$, $dx = sh\ t\ dt$

$$=\frac{sh(2archx)}{4}-\frac{archx}{2}+c=\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}-\frac{archx}{2}+c$$

Megjegyzések:

1. A számolásban felhasználtuk a sh(2x)=2·shx·chx azonosságot az alábbiak szerint:

$$\mathrm{sh}(2\,\mathrm{arch}\,x) = 2\cdot\mathrm{sh}(\mathrm{arch}\,x)\cdot\mathrm{ch}(\mathrm{arch}\,x) =$$
$$= 2\cdot\sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{arch}\,x)-1}\cdot x = 2\cdot x\cdot\sqrt{x^2-1}$$

2. Az sh^2x függvény integrálásával kapcsolatban lásd az ***$x\to\sin^n x$, $x\to\cos^n x$, $x\to\mathrm{sh}^n x$, $x\to\mathrm{ch}^n x$ alakú függvények integrálása*** **című részt!**

3. Az x=cht helyettesítéssel általában érdemes próbálkozni, ha a függvény formulája valamilyen formában tartalmazza a következő kifejezést:

$$\sqrt{x^2-1}$$

Változóhelyettesítés
Néhány speciális helyettesítés

Az „x = sh t ” helyettesítés alkalmazása

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \sqrt{sh^2 t+1}\,cht\ dt = \int ch^2 t\ dt = \ldots$$

$x = sh\ t$, $t = arsh\ x$, $dx/dt = ch\ t$, $dx = ch\ t\ dt$

Megjegyzések:

1. A ch^{2}x függvény integrálásával kapcsolatban lásd az *x→sin^{n}x, x→cos^{n}x, x→sh^{n}x, x→ch^{n}x alakú függvények integrálása* című részt!

2. Az x=sht helyettesítéssel általában érdemes próbálkozni, ha a függvény formulája valamilyen formában tartalmazza a következő kifejezést:

$$\sqrt{x^2+1}$$

$$x \to \sqrt{ax^2 + bx + c}$$ **típusú függvények integrálása**

Az ilyen alakú függvények integrálása visszavezethető az előző három eset valamelyikére úgy, hogy a négyzetgyök alatt teljes négyzetet alakítunk ki:

Példa:

$$\int \sqrt{x^2 - 6x - 7}\,dx = \int \sqrt{(x-3)^2 - 16}\,dx = 4 \cdot \int \sqrt{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 - 1}\,dx = 16 \cdot \int \sqrt{t^2 - 1}\,dt$$

$$t = \frac{x-3}{4}$$

Példa:

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\,dx = 2\cdot\int \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = 4\cdot\int \sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$t = \frac{x+1}{2}$$

Példa:

$$\int \sqrt{-x^2+10x+11}\,dx = \int \sqrt{36-(x-5)^2}\,dx = 6\cdot\int \sqrt{1-\left(\frac{x-5}{6}\right)^2}\,dx = 6\cdot\int \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$t = \frac{x-5}{6}$$

Változóhelyettesítés
Néhány speciális helyettesítés

A trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálása a

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad x = 2\operatorname{arctg} t$$

helyettesítéssel visszavezethető a racionális törtfüggvények integrálására.

A helyettesítés végrehajtása során az alábbi egyenlőségeket kell alkalmazni:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

Magyarázat:

$$\sin x = \sin(2 \cdot \operatorname{arctg} t) = 2 \cdot \sin(\operatorname{arctg} t) \cdot \cos(\operatorname{arctg} t) =$$

$$= 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} t)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} t)}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos(2 \cdot \operatorname{arctg} t) = \cos^2(\operatorname{arctg} t) - \sin^2(\operatorname{arctg} t) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} t)}}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} t)}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Példák:

$$\int \frac{4}{\sin x + \cos x}\,dx = \int \frac{4}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = 8 \cdot \int \frac{1}{1+2t-t^2}\,dt$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+2t+t^2}{2t}\,dt$$

Néhány speciális helyettesítés

A hiperbolikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálása a

$$t = \operatorname{th}\frac{x}{2} \qquad x = 2\operatorname{arth} t$$

helyettesítéssel visszavezethető a racionális törtfüggvények integrálására az alábbiak felhasználásával:

$$\operatorname{sh}x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \operatorname{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1-t^2}$$

A racionális törtfüggvények integrálása

Tétel

Minden racionális törtfüggvény felbontható egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegére, melyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{M(x)}{Q(x)}$$

Elvégezve a P:Q polinomosztást, a H polinom az osztás hányadosaként, az M polinom az osztás maradékaként adódik.

Megjegyzés

Az előző tétel szerint egy racionális törtfüggvény integrálása visszavezethető egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény integrálására, melyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma.

Példa

$$\frac{x^4-5x^3+8x^2-2x+7}{x^2-2x}=x^2-3x+2+\frac{2x+7}{x^2-2x}$$

Definíció: parciális törtek

Az $\dfrac{A}{(x-x_o)^n}$ **és az** $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$

alakú kifejezéseket, ahol n pozitív egész, A,B,C$\in$R, p^2-4q<0 ***(vagyis az x^2+px+q másodfokú polinomnak nincs valós gyöke)*** **parciális törteknek nevezzük.**

Tétel

Minden racionális törtfüggvény, *melyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma* felbontható parciális törtek összegére.

Megjegyzés

Ezt összevetve a korábbiakkal megállapítható, egy racionális törtfüggvény integrálása visszavezethető egy polinom és parciális törtek integrálására.

Tehát ha tudjuk integrálni a parciális törteket, akkor (elvileg) tudunk integrálni minden racionális törtfüggvény.

A parciális törtek integrálása

$$\int \frac{A}{x-x_o}dx = A \cdot \ln\left|x - x_0\right| + c$$

Példa:

$$\int \frac{11}{x-5}dx = 11 \cdot \ln\left|x-5\right| + c$$

$$\int \frac{A}{(x-x_o)^n}dx = A\frac{(x-x_o)^{-n+1}}{-n+1} + c$$

n>1

Példa:

$$\int \frac{7}{(x-2)^4}dx = 7\frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c$$

A parciális törtek integrálása

Az $\displaystyle\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}\,dx$ **alakú integrálok közül csak az**

n=1 esettel foglalkozunk.

Az n>1 eset általában igen bonyolult, sok lépéses számolást igényel.

A számolás sémája:

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \frac{B}{2}\int \frac{\frac{2C}{B}-p}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{B}{2}\left(\frac{2C}{B}-p)\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx = \frac{4}{4q-p^2}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{4}{4q-p^2}\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c$$

Példa:

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x+13}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx - 18\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x+13\right| - 18\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1}dx =$$

$$t = \frac{x+3}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1}\cdot 2dt = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{arctg}\frac{x+3}{2}$$

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x+13}dx = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x+13\right| - 9\cdot \mathrm{arctg}\frac{x+3}{2} + c$$

Példa:

$$\int \frac{5x-6}{x^2+7x+10}\,dx = ?$$

Parciális törtekre bontás:

$$\frac{5x-6}{x^2+7x+10} = \frac{5x-6}{(x+2)(x+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+5} =$$

$$= \frac{A(x+5)+B(x+2)}{(x+2)(x+5)} = \frac{x\cdot(A+B)+(5A+2B)}{(x+2)(x+5)}$$

I. A+B = 5

II. 5A+2B = -6

$\Rightarrow$ **A = -16/3 , B = 31/3**

$$\frac{5x-6}{x^2+7x+10}=\frac{-16/3}{x+2}+\frac{31/3}{x+5}=\frac{-16}{3}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{31}{3}\cdot\frac{1}{x+5}$$

A kapott törtek integrálása:

$$\int\frac{5x-6}{x^2+7x+10}dx=-\frac{16}{3}\int\frac{1}{x+2}dx+\frac{31}{3}\int\frac{1}{x+5}dx=$$

$$=-\frac{16}{3}\ln|x+2|+\frac{31}{3}\ln|x+5|+c$$

Példa:

$$\int \frac{x}{(x-2)^3}\,dx = ?$$

$$\frac{x}{(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} =$$

$$= \frac{A + B(x-2) + C(x-2)^2}{(x-2)^3} = \frac{x^2 \cdot C + x \cdot (B-4C) + (A-2B+4C)}{(x-2)^3}$$

I. $C = 0$

II. $B - 4C = 1$

II. $A - 2B + 4C = 0$

$\Rightarrow A = 2,\ B = 1,\ C = 0$

$$\int \frac{x}{(x-2)^3}\,dx = 2\int \frac{1}{(x-2)^3}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} + c$$

Az $x \to \sin^n x$, $x \to \cos^n x$, $x \to \mathrm{sh}^n x$, $x \to \mathrm{ch}^n x$ ($n \geq 2$) alakú függvények integrálása

Ha n páratlan, akkor a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

azonosságok alkalmazásával az integrálás visszavezethető

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

alakú feladatokra.

Példa:

$$\int g^n \cdot g' = \frac{g^{n+1}}{n+1} + c$$

$\int \sin^7 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^6 x \, dx = \int \sin x \cdot (\mathbf{\sin^2 x})^3 \, dx =$

$= \int \sin x \cdot (\mathbf{1 - \cos^2 x})^3 \, dx =$

$= \int \sin x \cdot (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x) \, dx =$

$= \int \sin x \, dx - 3 \cdot \int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx + 3 \cdot \int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx - \int \cos^6 x \cdot \sin x \, dx =$

$= \int \sin x \, dx + 3 \cdot \int \cos^2 x \cdot (-\sin x) \, dx - 3 \cdot \int \cos^4 x \cdot (-\sin x) \, dx +$

$+ \int \cos^6 x \cdot (-\sin x) \, dx =$

$$= -\cos x + 3 \cdot \frac{\cos^3 x}{3} - 3 \cdot \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

Ha az n páros, akkor a következő azonosságok (ún. linearizáló formulák) valamelyikét kell alkalmazni, melyekkel a kitevő „felezhető”:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch} 2x + 1}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch} 2x - 1}{2}$$

Példa:

$$\int \cos^4 x \, dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int 1\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \, dx =$$

Ezek után a kapott tagokat egyedileg kell integrálni attól függően, hogy páros vagy páratlan kitevősek.

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 4x}{4} + c$$

Részletszámítás:

$$\int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 4x}{4}$$

Példa: szabadesés (egyenletesen gyorsuló mozgás)

Gyorsulás-idő függvény $a(t) = g$

Sebesség-idő függvény

$$v(t) = \int g \, dt = g \cdot t + c$$

$$v(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = g \cdot t + v_0$$

Út-idő függvény

$$s(t) = \int (g \cdot t + v_0) \, dt = g \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + c$$

$$s(0) = s_0 \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{g}{2} t^{2} + v_0 \cdot t + s_0$$