Többváltozós, valós értékű függvények

Definíció: többváltozós függvények

Azokat a függvényeket, melyeknek az értelmezési tartománya R^n egy részhalmaza, n változós függvényeknek nevezzük.

Példák:

1. A gazdasági eredetű problémák matematikai modelljében gyakoriak a sokváltozós függvények (például: termelési függvény)

2. Az $R^3 \to R$ típusú függvényeket szokás skalármezőnek nevezni.

Ilyenek például a skalár jellegű fizikai mennyiségeknek (tömegsűrűség, töltéssűrűség, hőmérséklet, potenciál, stb.) a helytől való függését kifejező függvények.

3. A geográfiában használt domborzati térképek tekinthetők $R^2 \to R$ típusú (kétváltozós) függvényeknek.

Többváltozós függvények ábrázolása

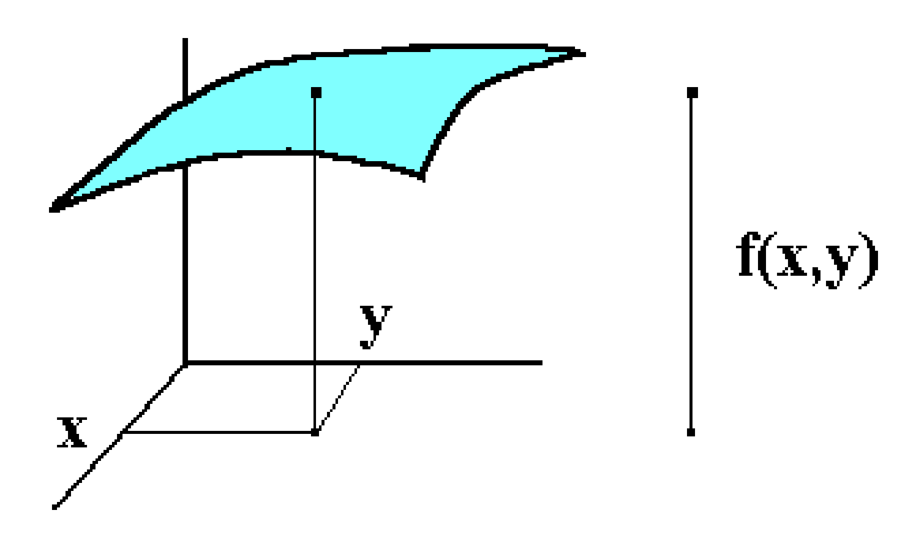
A többváltozós függvények közül csak a kétváltozósakat tudjuk két dimenzióban „ábrázolni”. Ekkor is egy háromdimenziós kép térhatású síkbeli ábrázolásáról van szó.

Az ábrázolásnak két esetben van szerepe:

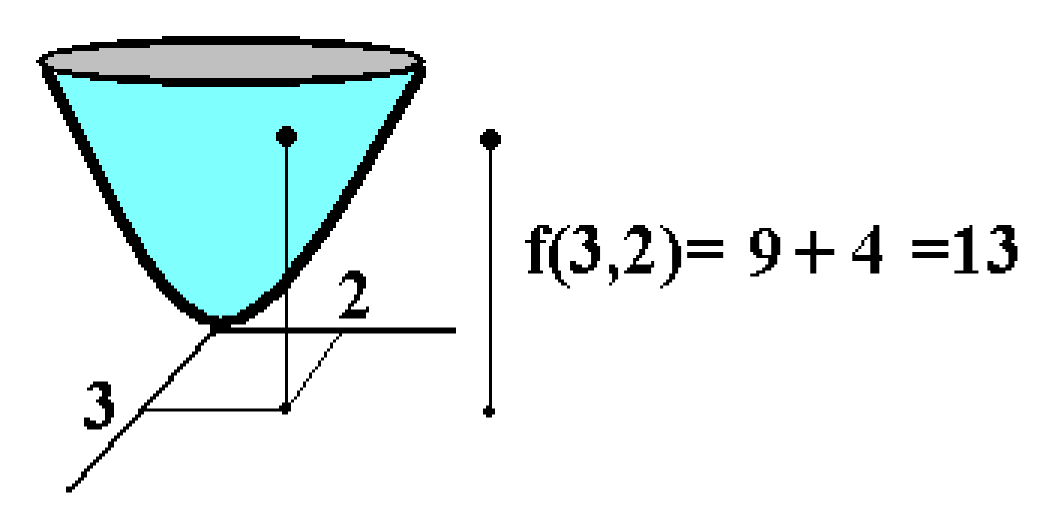
- **a többváltozós függvényekkel kapcsolatos fogalmak tartalmának speciálisan kétváltozós függvényeken való bemutatásakor**
- **olyan esetekben, amikor egy kétváltozós függvény egy térbeli ponthalmaz (általában felület) megadására szolgál**

Kétváltozós függvények ábrázolása

$$(x,y) \rightarrow f\,(x,y)$$



$$f\,(x,y) = x^2 + y^2$$

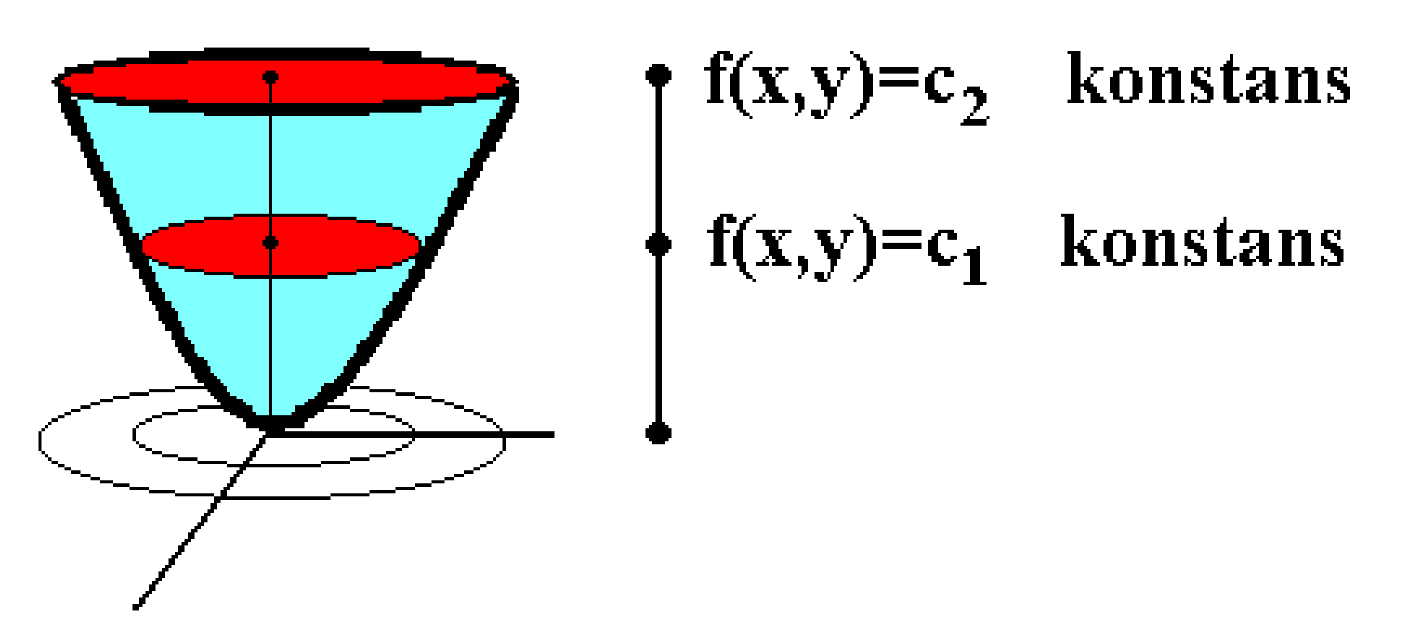


Definíció: szintvonalak

Ha c eleme az (x,y)→f(x,y) függvény értékkészletének, akkor az

$$\{\ (x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid f(x,y) = c\ \}$$

síkgörbét c értékhez tartozó szintvonalnak nevezzük.



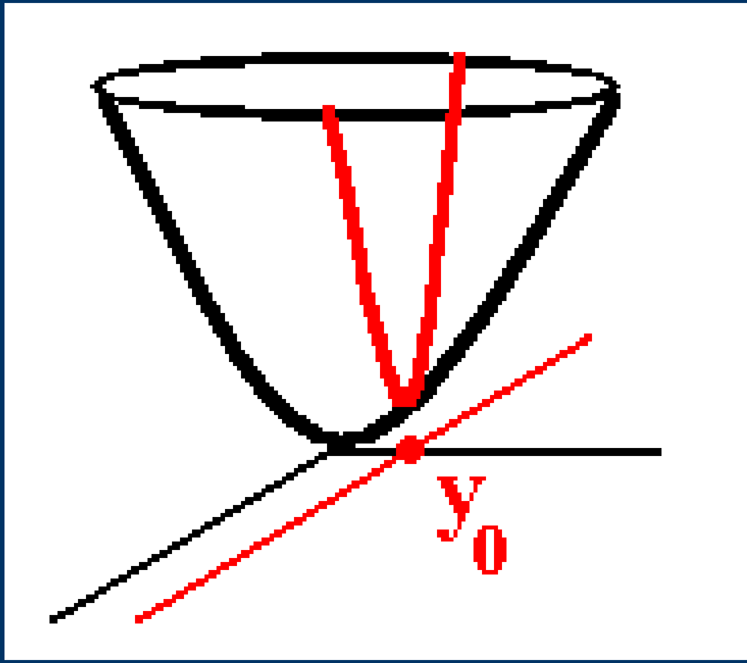
Definíció: paramétervonalak

A kétváltozós függvények paramétervonalai síkgörbék, a függvényfelületnek a „függőleges” koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal való síkmetszetei.

A paramétervonalak olyan egyváltozós függvények grafikonjaként állnak elő, melyek az eredeti kétváltozós függvény egyik változójának rögzítésével keletkeznek.

A második változó rögzítésével keletkező paramétervonalak

$x \to f(x, y_0)$

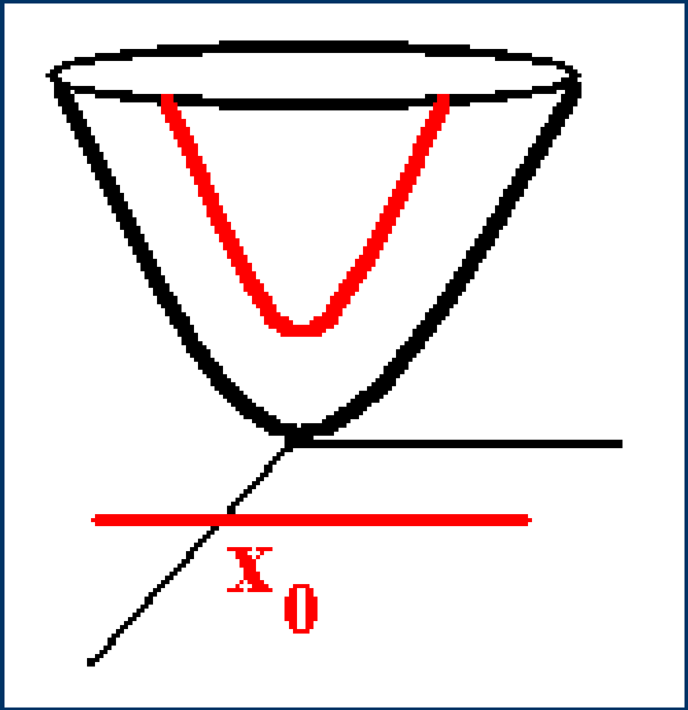


Példa:

Az $(x,y) \to x^2 + y^2$ függvény esetén az y változó értékét 2-nek rögzítve az $x \to x^2 + 4$ egyváltozós függvényhez jutunk.

Az első változó rögzítésével keletkező paramétervonalak

$$y \to f(x_0, y)$$

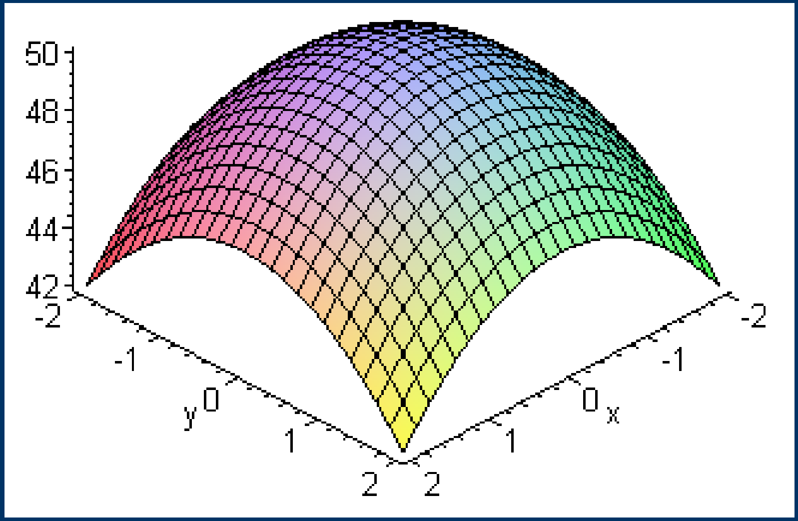


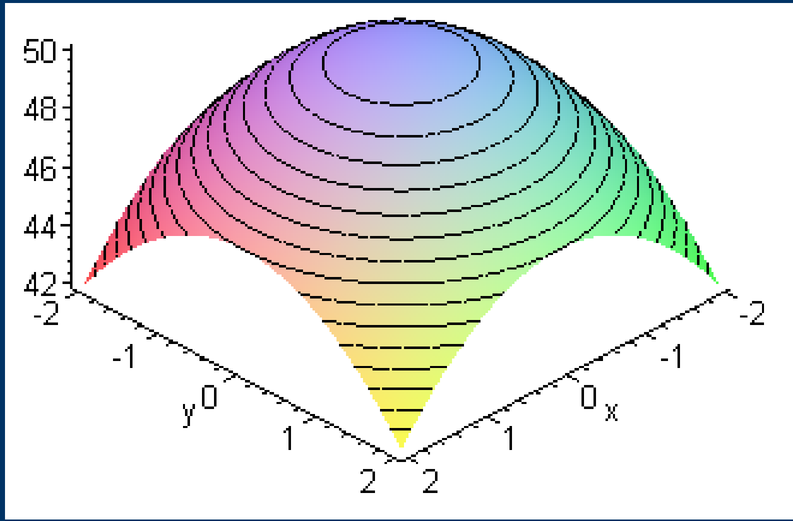
Példa:

Az $(x,y) \to x^2 + y^2$ függvény esetén az x változó értékét 3-nak rögzítve az $y \to 9 + y^2$ egyváltozós függvényhez jutunk.

Megjegyzés:

A kétváltozós függvények (felületek) ábrázolásakor a szintvonalak ill. a paramétervonalak berajzolása segíti a felület „alakjának” tulajdonságainak vizuális érzékelését.





Többváltozós függvények folytonossága és határértéke

Definíció: folytonosság

Az $f : D\ (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $P_0 \in D$ helyen, ha bármely D-beli

$$P_n \to P_0$$

sorozat esetén

$$f(P_n) \to f(P_0).$$

Definíció: határérték

Tekintsük az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt, és legyen P_0 torlódási pontja D-nek.

Ha van olyan $A \in \mathbf{R}$, melyre fennáll, hogy bármely D-beli

$$P_n \rightarrow P_0 , \qquad (P_n \neq P_0 , n \in \mathbf{N})$$

sorozat esetén

$$f(P_n) \rightarrow A,$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a P_0 helyen A.

Jelölés:

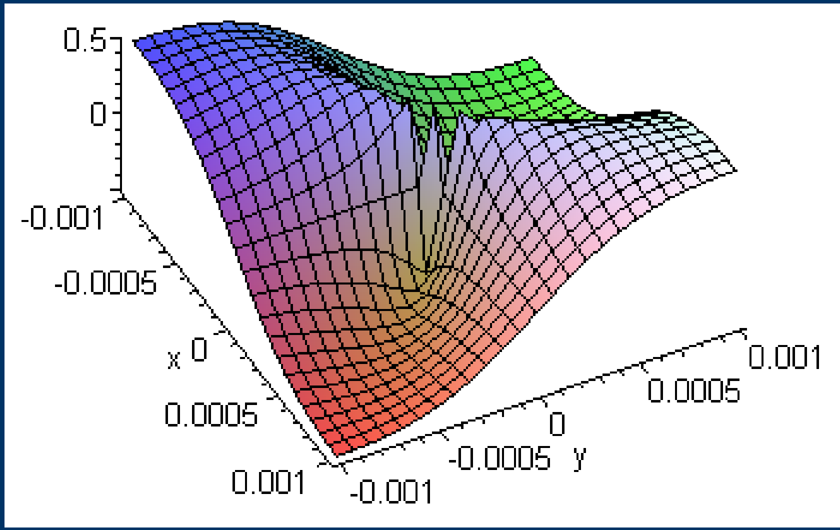
$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

Megjegyzés: folytonosság és határérték

Legyen $D \subseteq \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz. A fenti definíciókból látható, hogy az $f: D \to \mathbf{R}$ függvény pontosan akkor folytonos a $P_0 \in D$ helyen, ha az f határértéke P_0-ban $f(P_0)$.

Példa: nem folytonos függvény

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



Az f függvénynek a (0,0) helyen nem létezik határértéke (és így nem is folytonos), mert például

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

Lineáris függvények

Definíció:

Az $A:R^n \to R$,

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n$$

függvényeket, ahol c_1, c_2, … , c_n valós számok, n változós lineáris függvényeknek nevezzük.

Megjegyzés:

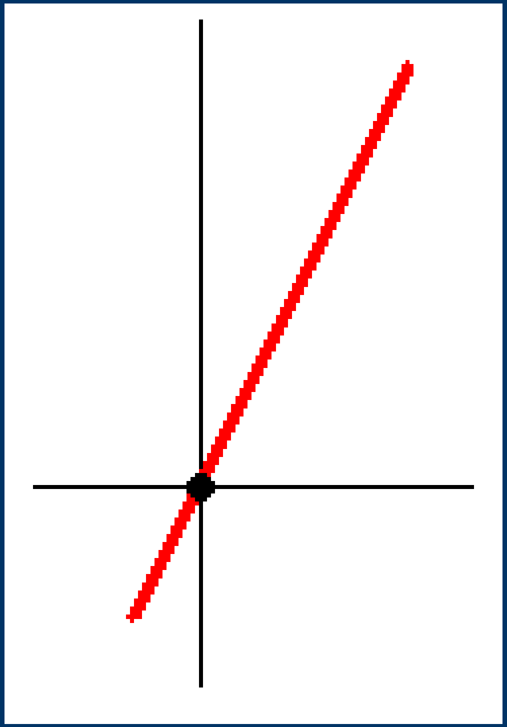
A lineáris függvények alapvető szerepet játszanak a differenciálszámításban, hiszen a differenciálás valójában lineáris függvénnyel való közelítést jelent.

Egyváltozós lineáris függvények és az érintő egyenes

Az egyváltozós lineáris függvények az

$$x \to c \cdot x$$

alakú függvények, melyek grafikonja az origón átmenő c meredekségű egyenes.



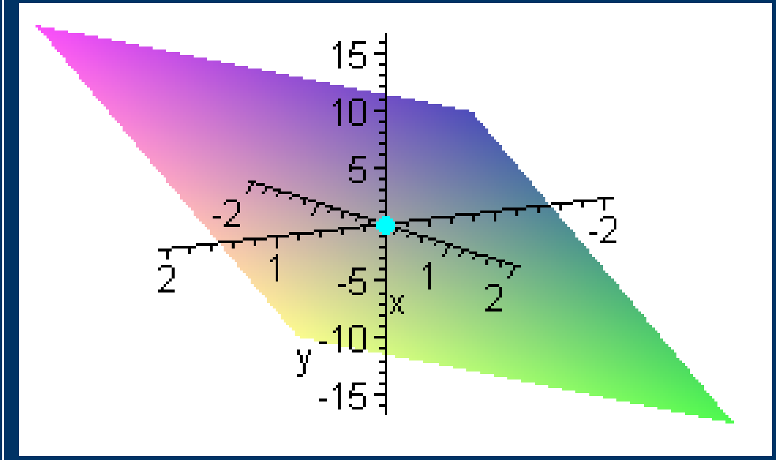
Egyváltozós differenciálható függvény lineárisan az érintő egyenessel közelíthető, melynek meredeksége az adott pontbeli differenciálhányados.

Kétváltozós lineáris függvények és az érintő sík

A kétváltozós lineáris függvények az

$$(x_1,x_2) \to c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

alakú függvények, melyek grafikonja az origón átmenő $(c_1,c_2,-1)$ normálvektorú sík.



Kétváltozós differenciálható függvény lineárisan az érintő síkkal közelíthető, melynek normálvektorát az adott pontbeli ún. parciális differenciálhányadosok határozzák meg.

Többváltozós függvények differenciálása

Az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány P_0 belső pontjában, ha van olyan $A:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0) - A(P - P_0)}{\left\| P - P_0 \right\|} = 0$$

Ekkor az A függvényt az f függvény P_0 helyen vett differenciálhányadosának nevezzük.

Megjegyzés:

A differenciálhányados előbbi definíciója összhangban van az egyváltozós függvények differenciál-hányadosának fogalmával:

Az $f:D(\subseteq \mathbf{R})\rightarrow \mathbf{R}$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány x_0 belső pontjában, ha van olyan A$\in\mathbf{R}$ szám, melyre

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A\cdot(x-x_0)}{x-x_0}=0$$

Ekkor A azonos az $f'(x_0)$ differenciálhányadossal.

Megjegyzések:

1. **Ha differenciálhányados létezik, akkor egyértelmű.**
2. **Ahol egy függvény differenciálható, ott folytonos is.**
3. **Ha $D \subseteq \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz (minden pontja belső pont) és az $f:D \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható a D minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható a D halmazon.**

Iránymenti derivált

Definíció: iránymenti derivált

Legyen $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\rightarrow \mathbf{R}$, P_0 a D értelmezési tartomány belső pontja, $v\in \mathbf{R}^n$, $\|v\|=1$.

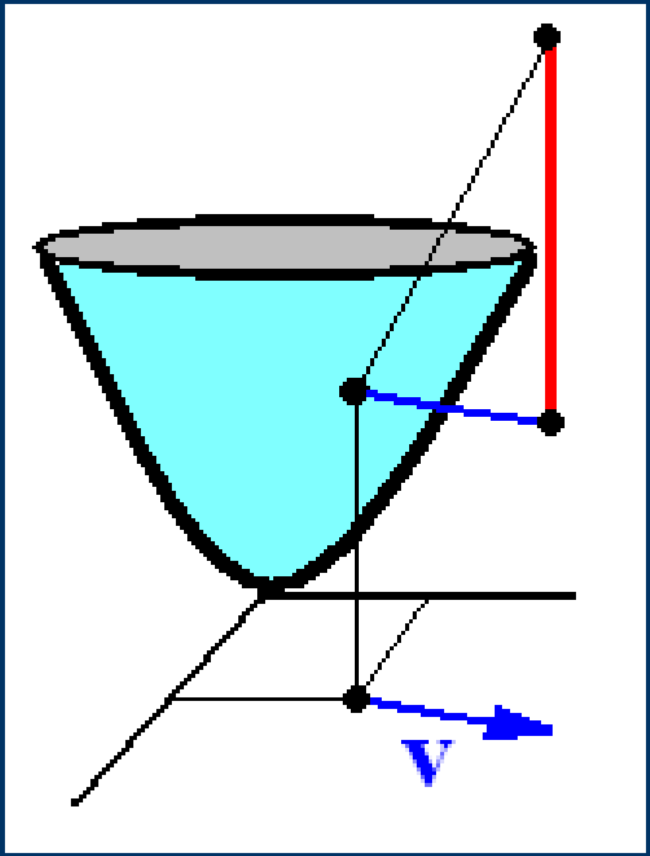
Az f függvény P_0 pontbeli, v irányban vett iránymenti deriváltján a

$$\partial_v f(P_0) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{f(P_0+\lambda\cdot v)-f(P_0)}{\lambda}$$

határértéket értjük, amennyiben létezik és valós.

Az iránymenti derivált jelentése

A v irányban vett iránymenti derivált szemléletesen azt fejezi ki, hogy az értelmezési tartományban az x_0 pontból a v irányban „haladva” mennyi a függvényértékek változásának gyorsasága.



Megjegyzések:

1. **Az iránymenti derivált definíciójában szereplő határérték egyváltozós függvény határértéke (egy változó van: λ).**
2. **Ahol az f függvény differenciálható, ott létezik az összes iránymenti deriváltja is.**
3. **Az iránymenti deriváltak létezéséből viszont nem következik a differenciálhatóság.**

Parciális derivált

Definíció:

Legyen $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$, P_0 a D értelmezési tartomány belső pontja.

Az f függvény P_0 pontbeli,

e_i irányban vett

iránymenti deriváltját az f függvény P_0 pontbeli i-edik (vagy i-edik változó szerinti) parciális differenciálhányadosának, vagy röviden parciális deriváltjának nevezzük (i=1,…,n) .

Jelölések:

Az f függvény P_0 pontbeli i-edik változó szerinti parciális deriváltjának jelölése:

$$\partial_i f(P_0) \quad \textbf{vagy} \quad f_i'(P_0)$$

Szokás a változó sorszáma helyett magát a változót szerepeltetni a parciális derivált jelölésénél: például az x változó szerinti parciális derivált lehetséges jelölései:

$$\partial_x f(P_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \qquad f_x'(P_0)$$

Megjegyzés: a differenciálhányados és a parciális deriváltak

A parciális deriváltak létezéséből általában nem következik a differenciálhatóság, de igaz a következő tétel:

Ha az $f:B(P_0)(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$ függvénynek a $B(P_0,r)$ minden pontjában létezik minden változó szerinti parciális deriváltja, továbbá ezek folytonosak P_0-ban, akkor f differenciálható P_0-ban.

A parciális derivált közvetlen értelmezése

Az előbbiekben a parciális deriváltat, mint speciális irányban vett iránymenti deriváltat értelmeztük. Most megadjuk a parciális derivált közvetlen definícióját.

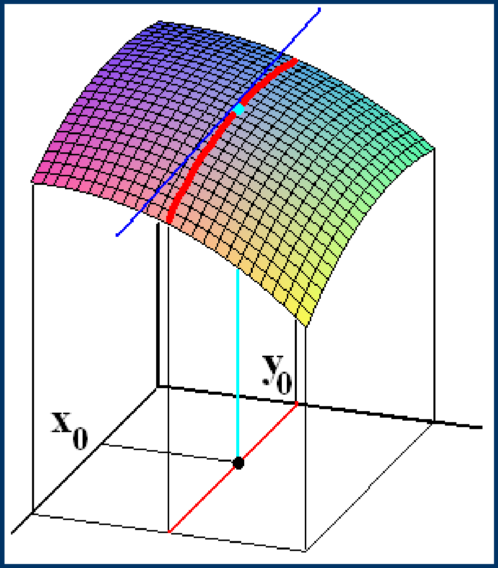
(Az egyszerűség kedvéért a definíciókat csak a kétváltozós esetre írjuk fel, de ezzel analóg módon lehet eljárni kettőnél több változós esetben is.)

Definíció: parciális derivált

Legyen $f:D(\subseteq R^n)\to R$, P_0 a D értelmezési tartomány belső pontja.

Az f függvény P_0 pontbeli, első változó változó szerinti parciális differenciálhányadosán (vagy röviden parciális deriváltján) a

$$\partial_1 f(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$



határértéket értjük, amennyiben ez létezik és véges.

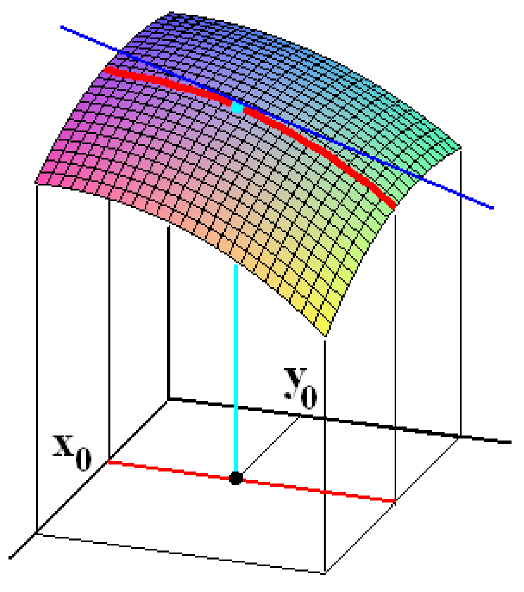
Definíció: parciális derivált

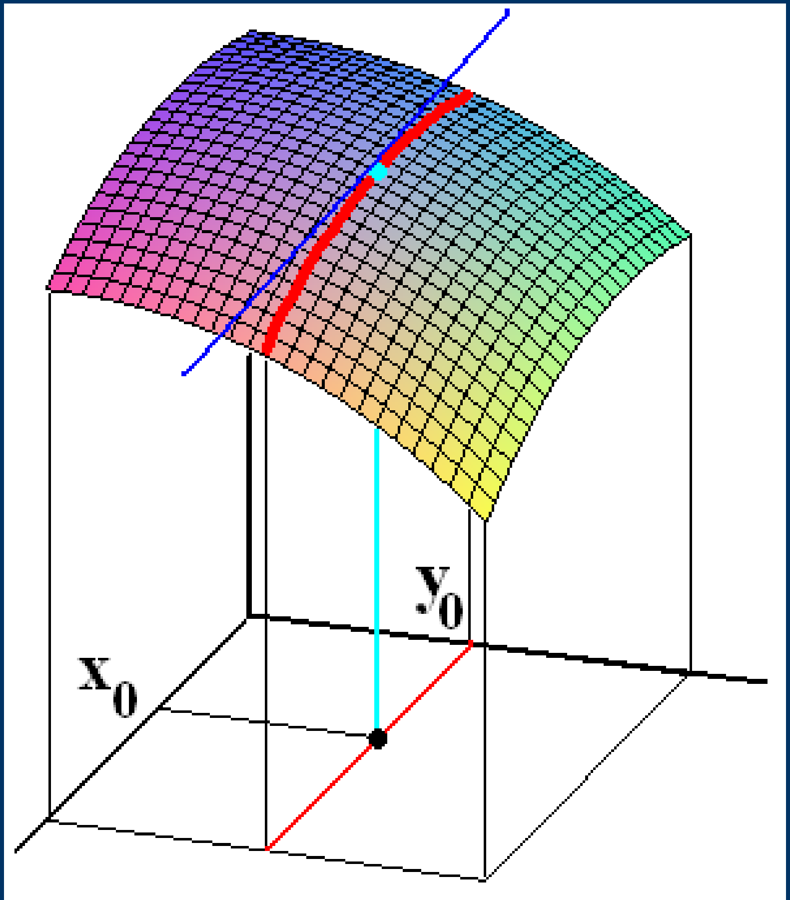
Legyen f:D($\subseteq$R^n)$\to$R, P_0 a D értelmezési tartomány belső pontja.

Az f függvény P_0 pontbeli, második változó változó szerinti parciális differenciálhányadosán (vagy röviden parciális deriváltján) a

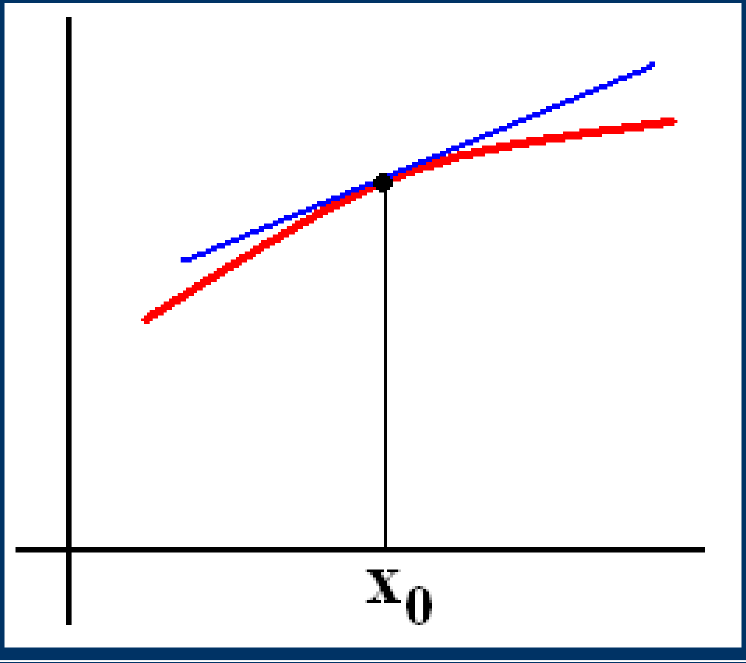
$$\partial_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

határértéket értjük, amennyiben ez létezik és véges.

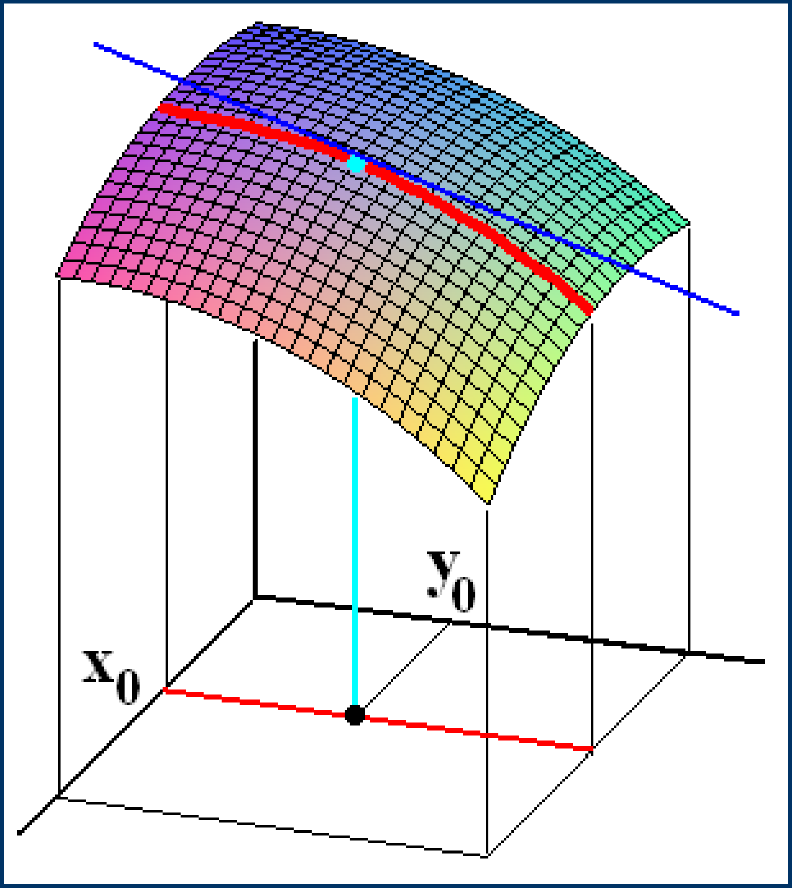




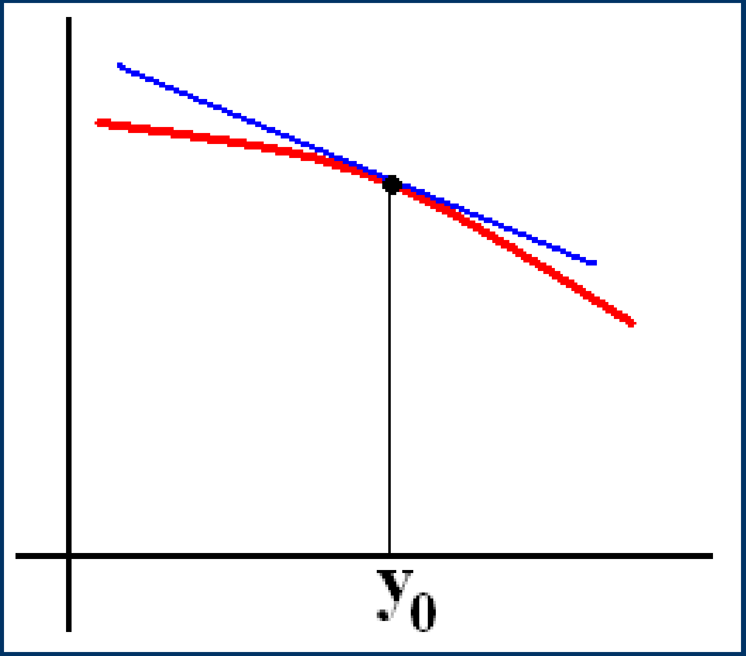
A parciális deriváltak geometriai jelentése kétváltozós függvény esetén



Az első változó szerinti parciális derivált az y változó rögzítésével előálló felületi görbe érintőjének iránytangensét (meredekségét) adja.



A parciális deriváltak geometriai jelentése kétváltozós függvény esetén



A második változó szerinti parciális derivált az x változó rögzítésével előálló felületi görbe érintőjének iránytangensét (meredekségét) adja.

Definíció: gradiens (vektor)

Ha az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány P_0 belső pontjában, akkor P_0-ban léteznek a parciális deriváltak.

A P_0 pontbeli parciális deriváltakból képzett vektort gradiensnek, vagy gradiens vektornak nevezzük:

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \left(\partial_1 f(P_0), \partial_2 f(P_0), \dots, \partial_n f(P_0)\right)$$

Tétel: az iránymenti deriváltak és a gradiens vektor

Legyen az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány P_0 belső pontjában.

Az iránymenti derivált a gradiens vektor és a megadó egységvektor skaláris szorzataként számítható:

$$\partial_v f(P_0) = \langle \operatorname{grad} f(P_0), v_0 \rangle$$

Példa:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2^{\,2}}{4x_1} + \frac{x_3^{\,2}}{x_2} + \frac{2}{x_3}$$

$P_0 = (1,4,2)$ $v = (2,2,1)$

Határozzuk meg az f függvény

- **elsőrendű parciális derivált függvényeit**
- **gradiens vektorát a P_0 helyen**
- **iránymenti deriváltját a P_0 helyen, a v irányban!**

Az elsőrendű parciális derivált függvények:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2^2}{4x_1} + \frac{x_3^2}{x_2} + \frac{2}{x_3}$$

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 1 + \frac{0 \cdot 4x_1 - x_2^2 \cdot 4}{16x_1^2} + 0 + 0 = 1 - \frac{x_2^2}{4x_1^2}$$

!!!a számolás közben x_2 és x_3 konstans!!!

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = 0 + \frac{1}{4x_1} \cdot 2x_2 - \frac{0 \cdot x_2 + x_3^2 \cdot 1}{x_2^2} + 0 = \frac{x_2}{2x_1} - \frac{x_3^2}{x_2^2}$$

!!!a számolás közben x_1 és x_3 konstans!!!

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = 0 + 0 + \frac{1}{x_2} 2x_3 + \frac{0 \cdot x_3 - 2 \cdot 1}{x_3^2} = \frac{2x_3}{x_2} - \frac{2}{x_3^2}$$

!!!a számolás közben x_1 és x_2 konstans!!!

Az elsőrendű parciális derivált függvények értéke a P_0 helyen:

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{x_2^2}{4x_1^2}$$

$$\partial_1 f(P_0) = \partial_1 f(1,4,2) = -3$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{2x_1} - \frac{x_3^2}{x_2^2}$$

$$\partial_2 f(P_0) = \partial_2 f(1,4,2) = \frac{7}{4}$$

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_3}{x_2} - \frac{2}{x_3^2}$$

$$\partial_3 f(P_0) = \partial_3 f(1,4,2) = \frac{1}{2}$$

A gradiens vektor:

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \operatorname{grad} f(1,4,2) = \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \operatorname{grad} f(1,4,2) = \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$v = (2,2,1)$$

$$v_0 = \frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{1}{3} \cdot (2,2,1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Az iránymenti derivált:

$$\partial_v f(P_0) = \langle \operatorname{grad} f(P_0), v_0 \rangle = \left\langle \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\rangle = -\frac{2}{3}$$

Definíció: differenciál

Tekintsük az $f:D(\subseteq R^n)\rightarrow R$ függvényt.

Legyen

$$P_0 = (x_{10} , x_{20} , \dots , x_{n0})$$

a D egy belső pontja, legyen továbbá

$$P = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$$

a D egy pontja és

$$\Delta x_1 = x_1 - x_{10} \;,\; \Delta x_2 = x_2 - x_{20} \;, \dots ,\; \Delta x_n = x_n - x_{n0} \,.$$

$$\Delta P = P - P_0 = (\Delta x_1 , \Delta x_2 , \dots , \Delta x_n)$$

Ha f differenciálható a P_0 helyen, akkor az f függvény P_0 pontbeli, a ΔP eltéréshez tartozó (első) differenciálja:

$$\partial_1 f(P_0)\cdot\Delta x_1+\partial_2 f(P_0)\cdot\Delta x_2+\ldots+\partial_n f(P_0)\cdot\Delta x_n$$

Megjegyzés

A differenciál röviden felírható a gradiens vektor segítségével:

$$\langle \operatorname{grad} f(P_0),\Delta P\rangle$$

Definíció: lineáris közelítés

Ha az $f:D(\subseteq R^n)\to R$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány P_0 belső pontjában, akkor az f függvény P_0 pontbeli lineáris közelítésén azt értjük, hogy a függvény

$$\Delta f = f(P) - f(P_0)$$

megváltozását a megfelelő első differenciállal közelítjük:

$$\Delta f = f(P) - f(P_0) \approx \langle \operatorname{grad} f(P_0), \Delta P \rangle =$$

$$\approx \partial_1 f(P_0)\cdot \Delta x_1 + \partial_2 f(P_0)\cdot \Delta x_2 + \ldots + \partial_n f(P_0)\cdot \Delta x_n$$

avagy:

$$f(P) \approx f(P_0) + \langle \operatorname{grad} f(P_0), \Delta P \rangle$$

Lineáris közelítés kétváltozós függvény esetén

Kétváltozós differenciálható függvény esetén a lineáris közelítés az ún. „érintősíkkal való” közelítést jelenti.

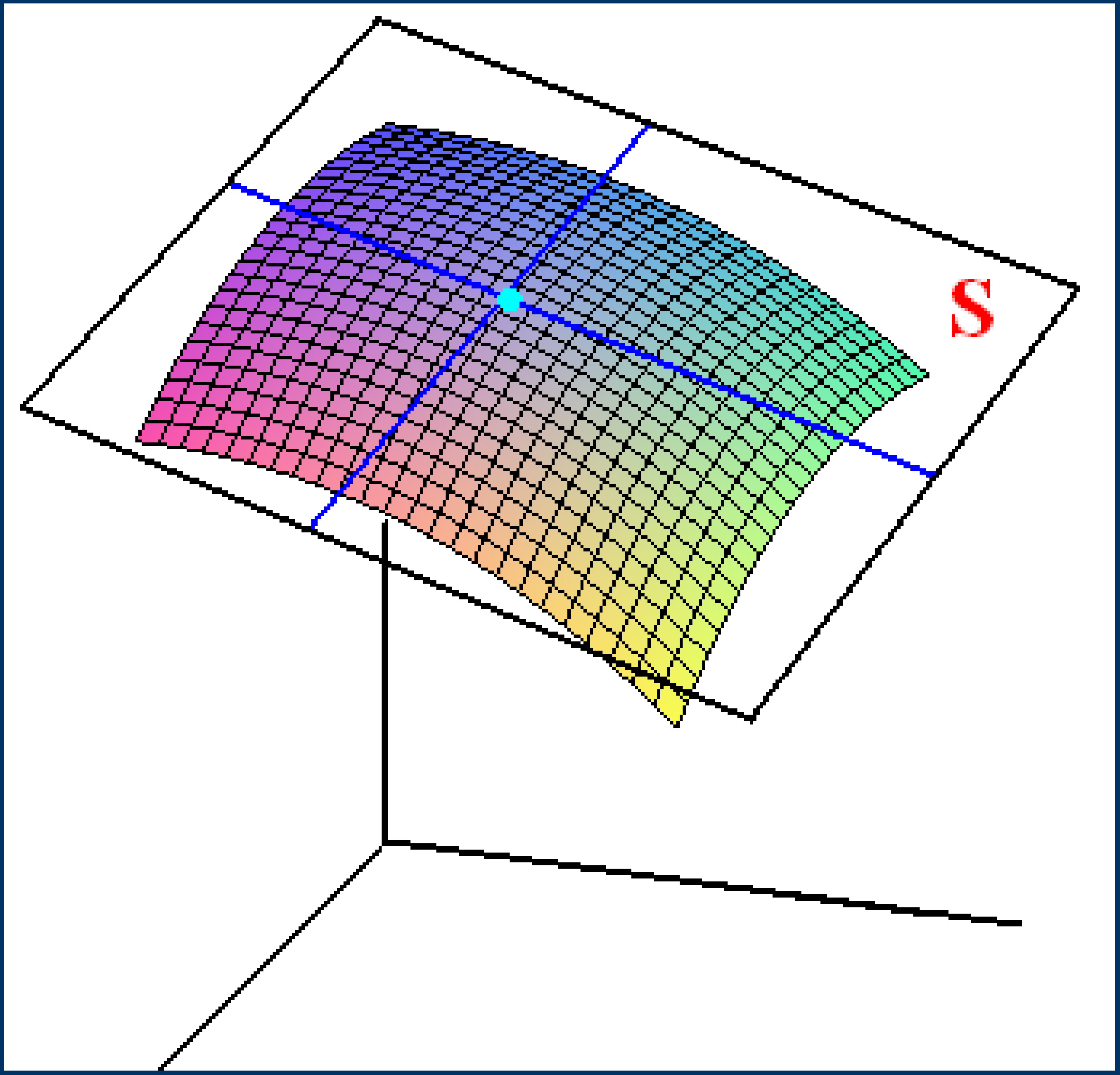
Definíció: érintősík

Ha az $(x,y)\to f(x,y)$ kétváltozós függvény differenciálható a $P_0=(x_0,y_0)$ helyen, akkor az f függvény P_0 pontbeli érintősíkján a következő függvényt (annak grafikonját) értjük:

$$S(x,y) = f(P_0) + \partial_1 f(P_0)\cdot(x-x_0) + \partial_2 f(P_0)\cdot(y-y_0)$$

Az f függvény P_0 pontbeli lineáris közelítése:

$$f(x,y) \approx S(x,y)$$


S

Példa:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{{x_2}^2}{4x_1} + \frac{{x_3}^2}{x_2} + \frac{2}{x_3}$$

$P_0 = (1,4,2)$ $v = (2,2,1)$

Határozzuk meg az f függvény

- **lineáris közelítését a P_0 helyen**
- **közelítő értékét a P = (1.12 , 3.98 , 1.95) helyen**

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{{x_2}^2}{4{x_1}^2}$$

$$\partial_1 f(P_0) = \partial_1 f(1,4,2) = -3$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{2x_1} - \frac{{x_3}^2}{{x_2}^2}$$

$$\partial_2 f(P_0) = \partial_2 f(1,4,2) = \frac{7}{4}$$

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_3}{x_2} - \frac{2}{{x_3}^2}$$

$$\partial_3 f(P_0) = \partial_3 f(1,4,2) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \operatorname{grad} f(1,4,2) = \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{x_2^{\ 2}}{4x_1} + \frac{x_3^{\ 2}}{x_2} + \frac{2}{x_3}$$

$$P_0 = (1,4,2)$$

$$P = (x_1,x_2,x_3)$$

$$f(P_0) = 7$$

$$\operatorname{grad} f(P_0) = \operatorname{grad} f(1,4,2) = \left(-3, \frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

A lineáris közelítés:

$$f(P) \approx f(P_0) + \langle \operatorname{grad} f(P_0), \Delta P \rangle =$$

$$= f(P_0) + \partial_1 f(P_0)\cdot\Delta x_1 + \partial_2 f(P_0)\cdot\Delta x_2 + \partial_3 f(P_0)\cdot\Delta x_3 =$$

$$= 7 - 3\cdot(x_1 - 1) + 1.75\cdot(x_2 - 4) + 0.5\cdot(x_3 - 2)$$

A függvény közelítő értéke az (1.12 , 3.98 , 1.95) helyen:

$$P = (x_1, x_2, x_3) = (\ 1.12\ ,\ 3.98\ ,\ 1.95\ )$$

$$f(P) \approx 7 - 3\cdot(x_1 - 1) + 1.75\cdot(x_2 - 4) + 0.5\cdot(x_3 - 2) =$$
$$= 7 - 3\cdot(1.12 - 1) + 1.75\cdot(3.98 - 4) + 0.5\cdot(1.95 - 2) =$$
$$= 7 - 3\cdot 0.12 + 1.75\cdot(-0.02) + 0.5\cdot(-0.05) =$$
$$= 7 - 0.36 - 0.035 - 0.025 = 7 - 0.42 = 6.58$$

Definíció: másodrendű parciális deriváltak

Legyen $f:B(P_0,r)(\subseteq \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$, $i\in\{1,\dots,n\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$. Ha

- **f-nek minden $P\in B(P_0,r)$ pontban létezik az i-edik változó szerinti $\partial_i f(P)$ parciális deriváltja**
- **a $P\to\partial_i f(P)$ parciális derivált függvénynek a P_0 pontban létezik a j-edik változó szerinti parciális deriváltja**

akkor ezt az f függvény j és i változók szerinti másodrendű parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölés:

$$\partial_j \partial_i f(P_0)$$

Megjegyzés:

A másodrendű parciális deriváltak jelölésére szokásosak még az alábbi jelölések is:

$$\partial^2_{ji} f(P_0) \qquad f''_{ji}(P_0)$$

A jelölésben utalhatunk közvetlenül azokra a változókra, melyek szerint a deriválást végeztük. Például az x_1, majd az x_2 változó szerinti deriválás jelölése:

$$\partial_{x_2}\partial_{x_1} f(P_0) \qquad \partial^2_{x_2x_1} f(P_0) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(P_0) \qquad f''_{x_2x_1}(P_0)$$

Definíció:

Ha $f:B(P_0,r)(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$ függvénynek $B(P_0,r)$-ban léteznek az elsőrendű parciális derivált függvényei, és ezek újra minden változó szerint parciálisan differenciálhatók a P_0 pontban, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer differenciálható P_0-ban.

Definíció:

Ha $f:B(P_0,r)(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$ függvénynek $B(P_0,r)$-ban léteznek az másodrendű parciális derivált függvényei és ezek folytonosak P_0-ban, akkor azt mondjuk, hogy f kétszer folytonosan differenciálható P_0-ban.

Megjegyzés: Young tétel

Ha az $f:B(P_0,r)(\subseteq \mathbf{R}^n)\to \mathbf{R}$ függvény kétszer differenciálható P_0-ban, akkor a P_0 pontbeli másodrendű parciális deriváltak kiszámításakor a deriválások sorrendje felcserélhető, azaz

$$\partial_j \partial_i f(P_0) = \partial_i \partial_j f(P_0)$$

$i\in\{1,\ldots,n\}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Kvadratikus függvények

Definíció:

Legyen n pozitív egész szám. A

$$Q(h_1,\ldots,h_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_ih_j$$

alakú függvényeket, ahol $A=(a_{ij})$ egy n-edrendű szimmetrikus mátrix, kvadratikus függvényeknek nevezzük.

Az A mátrix a Q kvadratikus függvény mátrixa.

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Az A mátrixhoz tartozó (3 változós) kvadratikus függvény:

$$\begin{aligned} Q(h_1, h_2, h_3) = {} & 2h_1^2 + 1h_1 \cdot h_2 + 3h_1 \cdot h_3 + \\ & + 1h_2 \cdot h_1 + 2h_2^2 - 2h_2 \cdot h_3 + \\ & + 3h_3 \cdot h_1 - 2h_3 \cdot h_2 + 4h_3^2 = \end{aligned}$$

$$= 2h_1^2 + 2h_2^2 + 4h_3^2 + 2h_1 \cdot h_2 - 4h_2 \cdot h_3 + 6h_1 \cdot h_3$$

Megjegyzés:

Nyilvánvaló, hogy bármely Q kvadratikus függvényre $Q(0) = 0$.

Definíció:

A $Q:R^n \to R$ kvadratikus függvény

- **pozitív definit, ha $Q(h) > 0$, ha $h \neq 0$**
- **negatív definit, ha: $Q(h) < 0$, ha $h \neq 0$**
- **indefinit, ha Q fölvehet pozitív és negatív értéket egyaránt.**

Példa:

A

$$Q(h_1, h_2, h_3) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 4h_3^2 + 2h_1 \cdot h_2 - 4h_2 \cdot h_3 + 6h_1 \cdot h_3$$

függvény pozitív definit.

Ez azonnal látszik az alábbi egyszerű átalakítással:

$$2h_1^2 + 2h_2^2 + 4h_3^2 + 2h_1 \cdot h_2 - 4h_2 \cdot h_3 + 6h_1 \cdot h_3 =$$

$$= (h_1+h_2)^2 + (h_2-2h_3)^2 + (h_1+3h_3)^2$$

Definíció: sarokdeterminánsok

Egy n-edrendű kvadratikus mátrix sarokdeterminánsai az első k sorban és az első k oszlopban lévő elemekből álló k-adrendű mátrixok determinánsai (k=1,…,n).

Példa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

A sarokdeterminánsok:

$$D_1 = \det(2) = 2$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 1$$

Tétel: a definitség megállapítása determinánsokkal

Egy kvadratikus függvény pontosan akkor pozitív definit, ha mátrixának bal felső sarokdeterminánsai pozitívak:

$$D_1 > 0\ ,\ D_2 > 0\ ,\ \dots\ ,\ D_n > 0$$

Egy kvadratikus függvény pontosan akkor negatív definit, ha mátrixának bal felső sarokdeterminánsai váltakozó előjelűek úgy, hogy D_1 negatív:

$$D_1 < 0\ ,\ D_2 > 0\ ,\ D_3 < 0\ ,\ D_4 > 0\ ,\ \dots$$

Egy kvadratikus függvény mátrixának bal felső sarokdeterminánsai nullától különbözőek, és a fenti két eset nem áll fenn, akkor a kvadratikus függvény indefinit.

Példa:

$$Q(h_1, h_2, h_3) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 4h_3^2 + 2h_1 \cdot h_2 - 4h_2 \cdot h_3 + 6h_1 \cdot h_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \det(2) = 2 > 0$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

Q pozitív definit

Többváltozós differenciálható függvények szélsőérték-számítása

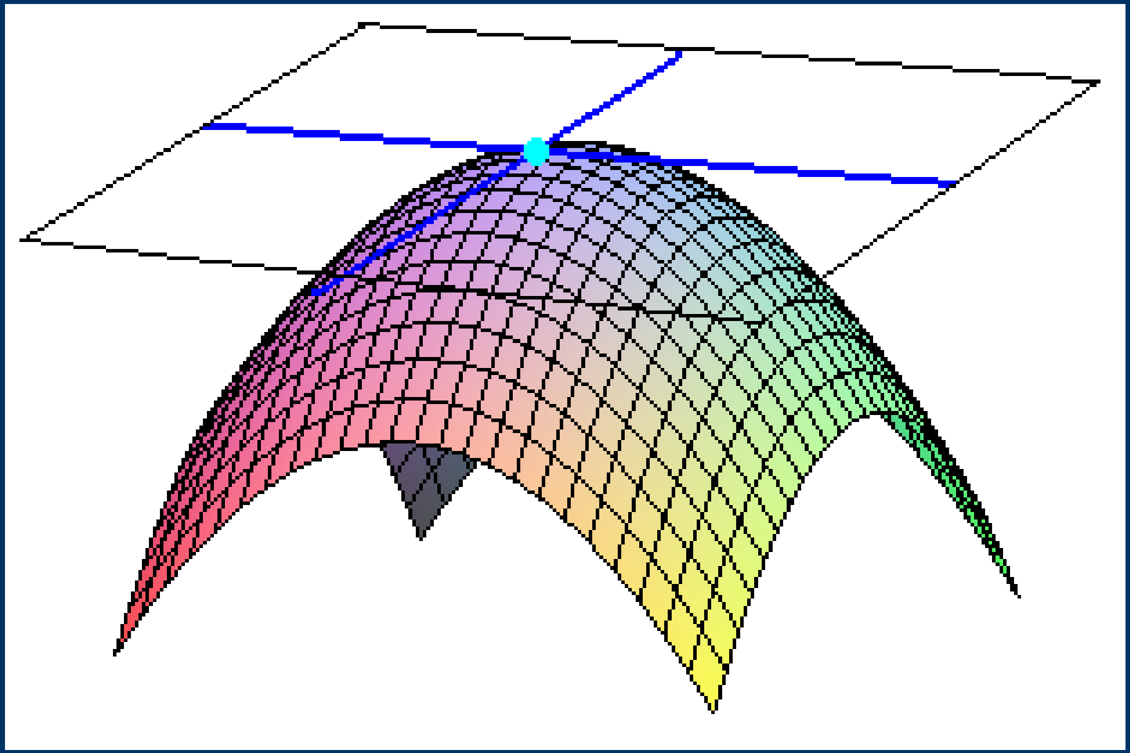
Tétel: a helyi szélsőérték létezésének szükséges feltétele

Ha az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$ differenciálható függvénynek helyi szélsőértéke van a D értelmezési tartomány P_0 belső pontjában, akkor a P_0 pontbeli elsőrendű parciális deriváltak értéke 0:

$$\partial_1 f(P_0) = \partial_2 f(P_0) = \ldots = \partial_n f(P_0) = 0$$

Megjegyzés:

Kétváltozós differenciálható függvény esetén ott lehet helyi szélsőérték, ahol az érintő sík „vízszintes”.



Következmény:

Differenciálható függvény esetén a helyi szélsőértékek keresésekor elsőként azokat P_0 helyeket kell meghatározni, ahol a parciális deriváltak értéke 0, az előző tétel szerint ui. helyi szélsőérték csak ezeken a helyeken lehet.

Megjegyzés:

Helyi szélsőérték létezéséhez nem elegendő, hogy az elsőrendű parciális deriváltak értéke 0.

Az elegendőséghez további feltételt kell megfogalmazni a másodrendű parciális deriváltakra vonatkozóan.

Definíció:

Legyen az $f:B(P_0,r)(\subseteq \mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$ függvény kétszer folytonosan differenciálható P_0-ban, és definiáljuk a $Q:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ függvényt a következőképpen:

$$Q(h_1,\dots,h_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_i\partial_j f(P_0)h_i h_j$$

Megjegyzés:

Az így definiált Q függvény kvadratikus.

Tétel: a helyi szélsőérték létezésének elegendő feltétele

Legyen az $f:B(P_0,r)(\subseteq \mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ függvény kétszer folytonosan differenciálható P_0-ban. Ha

- $$\partial_1 f(P_0) = \partial_2 f(P_0) = \ldots = \partial_n f(P_0) = 0$$ **és**
- $$Q(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_i\partial_j f(P_0)h_ih_j$$ **pozitív definit,**

akkor f-nek P_0-ban helyi minimuma van.

Ha

- $$\partial_1 f(P_0) = \partial_2 f(P_0) = \ldots = \partial_n f(P_0) = 0$$ **és**
- $$Q(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_i\partial_j f(P_0) h_i h_j$$ **negatív definit,**

akkor f-nek P_0-ban helyi maximuma van.

Ha

- $$\partial_1 f(P_0) = \partial_2 f(P_0) = \ldots = \partial_n f(P_0) = 0$$ **és**
- $$Q(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_i\partial_j f(P_0) h_i h_j$$ **indefinit,**

akkor f-nek P_0-ban nincs helyi szélsőértéke.

Példa:

Határozzuk meg a következő függvény helyi szélsőérték-helyeit és a szélsőértékeket!

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + \frac{{x_2}^2}{4x_1} + \frac{{x_3}^2}{x_2} + \frac{2}{x_3}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$$

1. lépés

Az elsőrendű parciális derivált függvények meghatározása:

$$\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) = 1 - \frac{{x_2}^2}{4{x_1}^2}$$

$$\partial_2 f(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_2}{2x_1} - \frac{{x_3}^2}{{x_2}^2}$$

$$\partial_3 f(x_1,x_2,x_3) = \frac{2x_3}{x_2} - \frac{2}{{x_3}^2}$$

2. lépés

A $\partial_1 f = \partial_2 f = \ldots = \partial_n f = 0$ egyenletrendszer megoldása:

$$\partial_1 f(x_1, x_2, x_3) = 1 - \frac{x_2^{\,2}}{4x_1^{\,2}} = 0$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{2x_1} - \frac{x_3^{\,2}}{x_2^{\,2}} = 0$$

$$\partial_3 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_3}{x_2} - \frac{2}{x_3^{\,2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_0 = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

3. lépés

A másodrendű parciális derivált függvények meghatározása.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{8x_2^{\,2}}{4x_1^{\,3}} & \dfrac{-x_2}{2x_1^{\,2}} & 0 \\ \dfrac{-y}{2x_1^{\,2}} & \dfrac{1}{2x_1}+\dfrac{x_3^{\,2}}{x_2^{\,3}} & \dfrac{-2x_3}{x_2^{\,2}} \\ 0 & \dfrac{-2z}{x_2^{\,2}} & \dfrac{2}{x_2}+\dfrac{4}{x_3^{\,3}} \end{pmatrix}$$

(A könnyebb áttekinthetőség kedvéért a függvényeket táblázatba írjuk. Az első sorban a $\partial_1 f$, a második sorban $\partial_2 f$, a harmadik sorban a $\partial_3 f$ függvény deriváltjai vannak.)

4. lépés

A másodrendű parciális derivált függvények értékének meghatározása ott, ahol az elsőrendű deriváltak értéke egyszerre volt nulla.

Most egy ilyen pont van, a P:

$$\begin{pmatrix} \frac{8x_2^2}{4x_1^3} & \frac{-x_2}{2x_1^2} & 0 \\ \frac{-y}{2x_1^2} & \frac{1}{2x_1}+\frac{x_3^2}{x_2^3} & \frac{-2x_3}{x_2^2} \\ 0 & \frac{-2z}{x_2^2} & \frac{2}{x_2}+\frac{4}{x_3^3} \end{pmatrix}$$

$$P = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 16 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

5. lépés

Meg kell állapítani, hogy az A mátrix milyen definitségű Q kvadratikus függvényhez tartozik, ebből megállapítható, hogy a vizsgált pontban van-e helyi szélsőérték, és milyen jellegű.

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \det(16) = 16$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 28$$

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 16 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} = 104$$

$$D_1 = 16 > 0, \quad D_2 = 28 > 0, \quad D_3 = 104 > 0$$

vagyis az A mátrix pozitív definit kvadratikus függvényhez tartozik.

Ebből következik, hogy az f-nek P-ben helyi minimuma van.

Megjegyzés

A fentiekből látható, hogy a

$$Q(h_1,\dots,h_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(P_0) h_i h_j$$

kvadratikus függvényt nem kell felírni, elegendő csak a mátrixával számolni.

A most megoldott feladatban a kvadratikus függvény, ami pozitív definitnek bizonyult:

$$Q(h_1, h_2, h_3) = 4 \cdot h_1^2 - 4 \cdot h_1 \cdot h_2 + 2 \cdot h_2^2 - 4 \cdot h_2 \cdot h_3 + 6 \cdot h_3^2$$