Többváltozós függvények

Riemann integrálja

Definíció: n dimenziós (zárt) intervallum

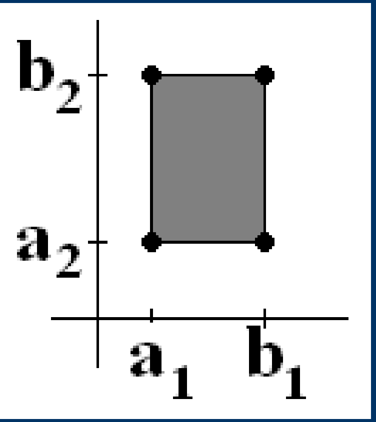
Legyen $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{R}^n$, $b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$a_1 < b_1,\ a_2 < b_2,\ \ldots,\ a_n < b_n.$$

Ekkor az

$$I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subseteq \mathbf{R}^n$$

halmazt n dimenziós intervallumnak nevezzük.



Megjegyzés:

A kétdimenziós intervallumok téglalapok.

A háromdimenziós intervallumok téglatestek.

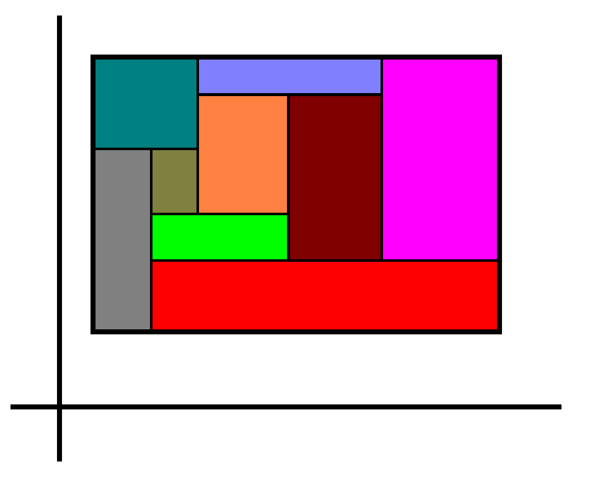
Definíció: n dimenziós intervallum beosztása

Legyenek és $I_1, I_2, \ldots, I_k$ és I n dimenziós intervallumok.

A $d = \{ I_1 , I_2 , \ldots , I_k \}$ intervallumrendszert az I intervallum beosztásának nevezzük, ha

- $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k = I$
- $I_i^0 \cap I_j^0 = \emptyset$, ha $i \neq j$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k$.

(I^0 az I intervallum belsejét jelenti)



Jelölés:

D(I): az I beosztásainak halmaza

Definíció: n dimenziós intervallum mértéke

Legyen $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,\ldots,b_n)\in \mathbf{R}^n$, $a_1< b_1$, ... , $a_n< b_n$.

Az $I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subseteq \mathbf{R}^n$

n dimenziós intervallum mértéke:

$$v\,(\,I\,) = (b_1- a_1) \cdot (b_2- a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n- a_n)$$

Megjegyzés:

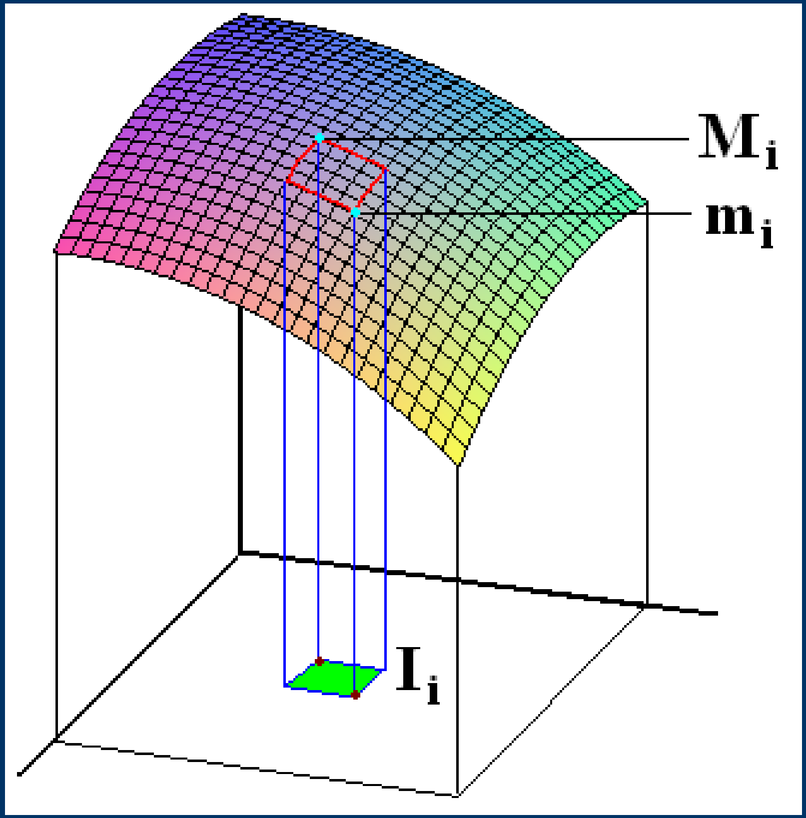
A mérték kétdimenziós esetben a téglalap területe, háromdimenziós esetben a téglatest térfogata.

A továbbiakban legyen I n dimenziós zárt intervallum.

Ha $f : I \to R$ <u>korlátos</u> függvény, $\{ I_1 , I_2 , \ldots , I_k \}$ az I intervallum egy beosztása, akkor vezessük be a következő jelöléseket:

$$m_i = \min f (I_i) , \quad i=1,\ldots,k$$

$$M_i = \max f (I_i) , \quad i=1,\ldots,k$$



Definíció: alsó és felső integrálközelítő összeg

Ha $f : I \to \mathbf{R}$ korlátos függvény, $d = \{ I_1 , I_2 , \ldots , I_k \}$ az I intervallum egy beosztása, akkor a

$$s(f, d) = \sum_{i=1}^{k} m_i v(I_i)$$

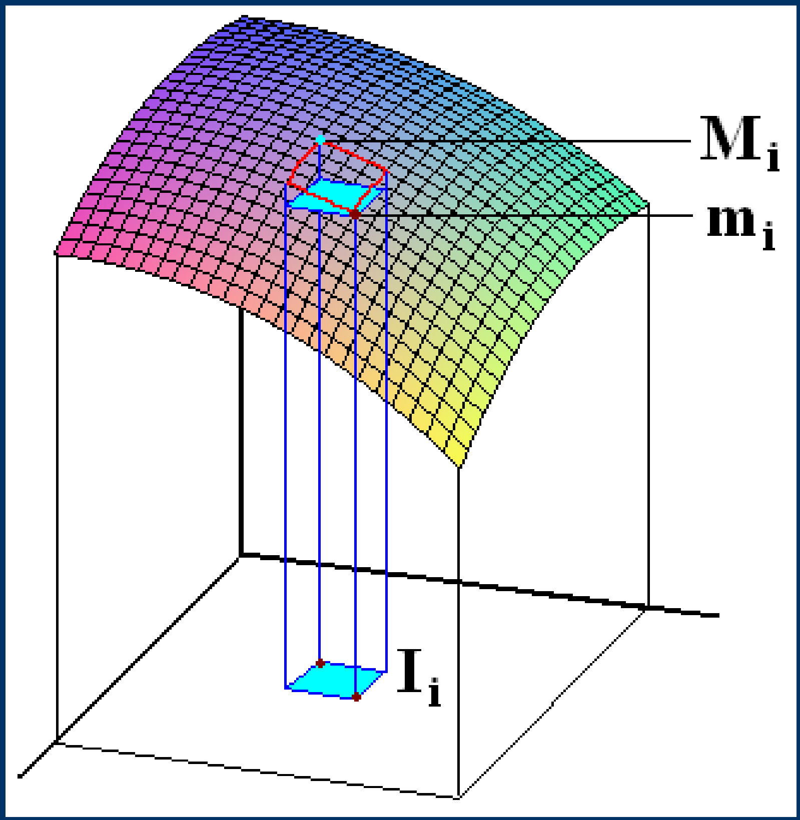
ill. a

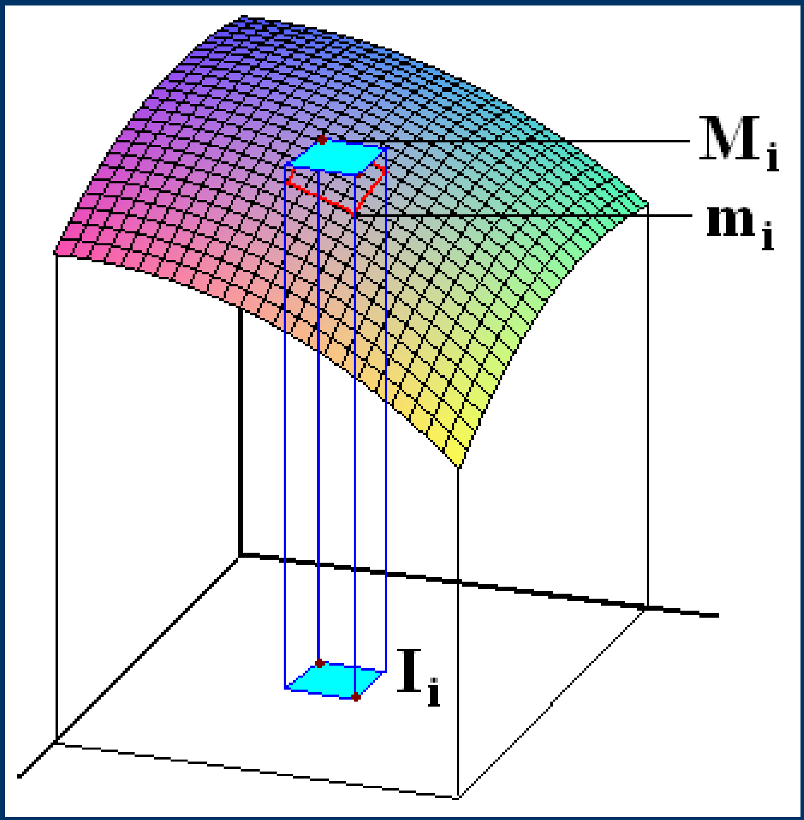
$$S(f, d) = \sum_{i=1}^{k} M_i v(I_i)$$

összegeket az f függvény d beosztáshoz tartozó alsó ill. felső integrálközelítő összegének nevezzük.

Az alsó és a felső integrálközelítő összegek geometriai jelentése

s(f,d) S(f,d)





Pozitív függvény integrálközelítő összegei bizonyos téglatestek térfogatainak összegével egyenlők

Tétel: az alsó és a felső integrálközelítő összegek viszonya

Ha f : I → R <u>korlátos</u> függvény, d_1 és d_2 az I intervallum két tetszőleges beosztása, akkor

$$s(f, d_1) \leq S(f, d_2)$$

vagyis bármely alsó integrálközelítő összegnél bármely felső integrálközelítő összeg nagyobb vagy egyenlő.

Következmény:

Az alsó integrálközelítő összegek halmaza felülről korlátos.

A felső integrálközelítő összeg halmaza alulról korlátos.

Definíció: alsó integrál

Az f:I→R <u>korlátos</u> függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának pontos felső korlátját az f függvény alsó integráljának nevezzük.

(Ez az érték valós szám az előző következmény miatt.)

$$\underline{\int_{I}} f = \sup_{d \in D(I)} s(f, d)$$

Definíció: felső integrál

Az f:I→R <u>korlátos</u> függvény felső integrálközelítő összegei halmazának pontos alsó korlátját az f függvény felső integráljának nevezzük.

(Ez az érték valós szám az előző következmény miatt.)

$$\overline{\int_I} f = \inf_{d \in D(I)} S(f, d)$$

Megjegyzés:

A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy

$$\int_{\underline{I}} f \leq \int_{I}^{\overline{}} f$$

Definíció: integrál

Ha az f:I→R korlátos függvény esetén

$$\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény integrálható az I intervallumon. Az alsó és a felső integrálok közös értékét az f függvény I intervallumon vett integráljának nevezzük.

Jelölés:

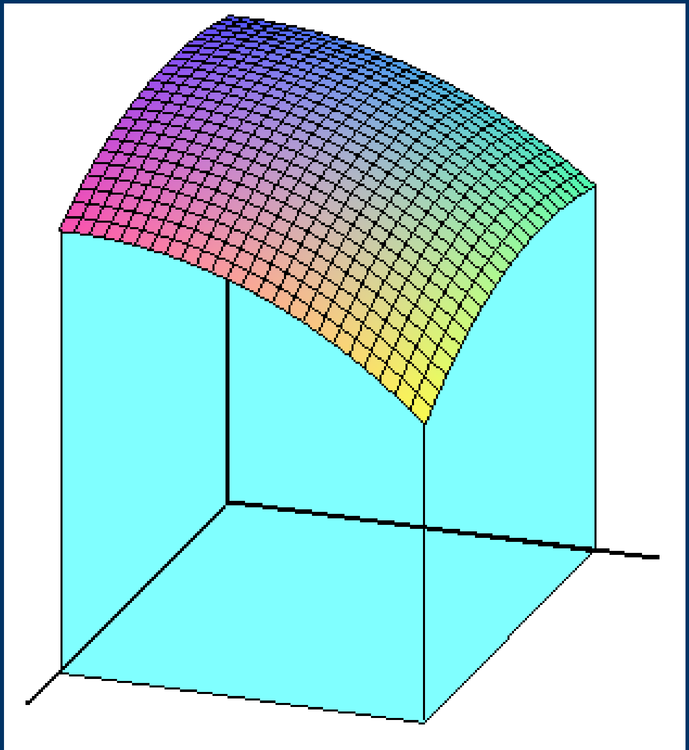
$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$$

Tétel:

Ha az $f: I \to \mathbf{R}$ függvény folytonos, akkor integrálható.

Az integrál geometriai jelentése kétváltozós esetben

Pozitív értékkészletű folytonos kétváltozós függvény integrálja a „függvény alatti térfogattal” egyenlő



$$V = \int_I f$$

Az integrál néhány tulajdonsága

Tétel: összegfüggvény integrálja

Ha az f:I→R és a g:I→R függvények integrálhatóak, akkor az f+g függvény is integrálható és

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$

Tétel: függvény konstansszorosának integrálja

Ha az f:I→R függvény integrálható és c∈R, akkor a c·f függvény is integrálható és

$$\int_I (cf) = c\int_I f$$

Tétel: az integrál additivitása

Ha az { I_1 , I_2 , … , I_k } intervallumrendszer az I intervallum egy beosztása, és az f:I→R <u>korlátos</u> függvény integrálható az I_1 , I_2 , … , I_k intervallumokon, akkor f integrálható az I intervallumon is és

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{k} \int_{I_i} f$$

Tétel:

Ha az $f:I\rightarrow \mathbf{R}$ függvény integrálható az I n dimenziós intervallumon, akkor integrálható bármely $J \subseteq I$ n dimenziós részintervallumon is.

Tétel: az integrál monotonitása

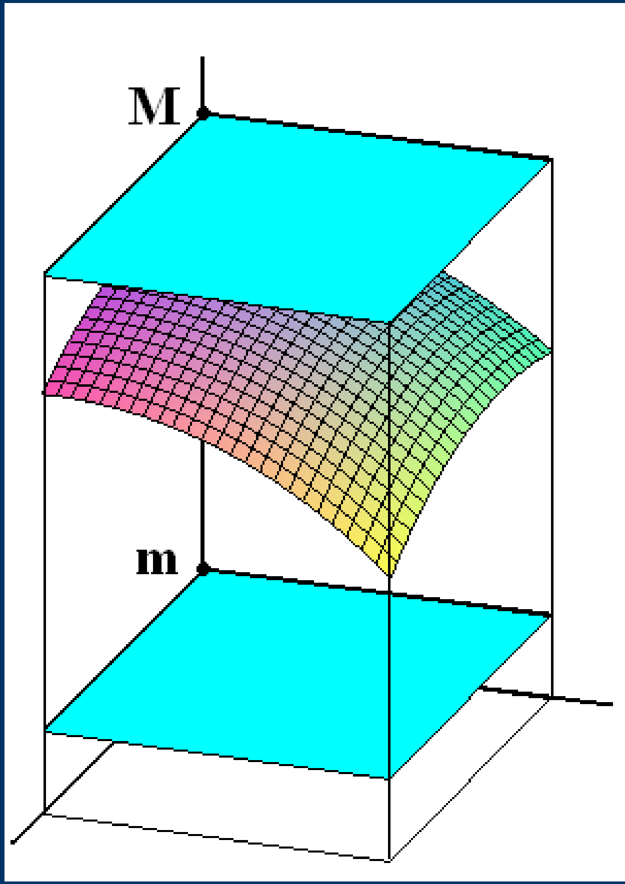
Ha az $f:I\rightarrow \mathbf{R}$ és a $g:I\rightarrow \mathbf{R}$ függvények integrálhatók, és $f(x) \leq g(x)$, ha $x \in I$, akkor

$$\int_I f \leq \int_I g$$

Tétel: az integrálszámítás középértéktétele

Ha az $f:I\to\mathbb{R}$ függvény integrálható, $m,M\in\mathbb{R}$ és $m \le f(x) \le M$, ha $x\in I$, akkor

$$m \cdot v(I) \le \int_a^b f \le M \cdot v(I)$$



Tétel: az integrál kiszámítása intervallumon

Legyen $I = [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n] \subseteq \mathbf{R}^n$ n dimenziós zárt intervallum.

Ha az $f:I\to\mathbf{R}$ folytonos, akkor az f függvény I-n vett integrálja kiszámítható n db egyváltozós integrál kiszámításával az alábbiak szerint:

$$\int_I f = \int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \int_{x_1=a_1}^{b_1}\left(\int_{x_2=a_2}^{b_2}\ldots\left(\int_{x_n=a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_n\right)\ldots dx_2\right)dx_1$$

Például egy három változós függvény esetén speciálisan :

Ha $I = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3] \subseteq \mathbf{R}^3$, $f: I \to \mathbf{R}$ folytonos, akkor:

$$\int_I f = \int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{x=a_1}^{b_1} \left(\int_{y=a_2}^{b_2} \left(\int_{z=a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

Példa: $f(x,y,z) = x^3z - 5yz^2 + 6z - 3, \quad I = [1,3]\times[0,4]\times[2,5]$

$$\int_I f = \int_{[1,3]\times[0,4]\times[2,5]} (x^3z - 5yz^2 + 6z - 3)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left(\int_{y=0}^{4} \left(\int_{z=2}^{5} (x^3z - 5yz^2 + 6z - 3)\, dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left(\int_{y=0}^{4} \left[x^3 \frac{z^2}{2} - 5y\frac{z^3}{3} + 6\frac{z^2}{2} - 3z \right]_{z=2}^{5} dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left(\int_{y=0}^{4} \left(\frac{25}{2}x^3 - \frac{725}{3}y + 75 - 15 \right) - \left(2x^3 - \frac{40}{3}y + 12 - 6 \right) dy \right) dx =$$

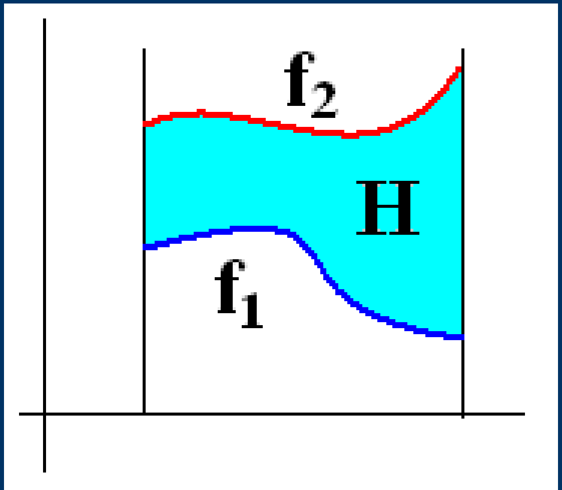
$$= \int_{x=1}^{3} \left(\int_{y=0}^{4} \left(\frac{21}{2}x^3 - \frac{685}{3}y + 54 \right) dy \right) dx = \int_{x=1}^{3} \left[\frac{21}{2}x^3y - \frac{685}{3}\cdot\frac{y^2}{2} + 54y \right]_{y=0}^{4} dx =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left[\frac{21}{2} x^3 y - \frac{685}{3} \cdot \frac{y^2}{2} + 54y \right]_{y=0}^{4} dx =$$

$$= \int_{x=1}^{3} \left(\left(\frac{84}{2} x^3 - \frac{5480}{3} + 216 \right) - 0 \right) dx = \int_{x=1}^{3} \left(\frac{84}{2} x^3 - \frac{4832}{3} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{84}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{4832}{3} \cdot x \right]_{x=1}^{3} = \left(\frac{1701}{2} - 4832 \right) - \left(\frac{21}{2} - \frac{4832}{3} \right) = \frac{-7144}{3}$$

Definíció: normál tartomány R^2-ben

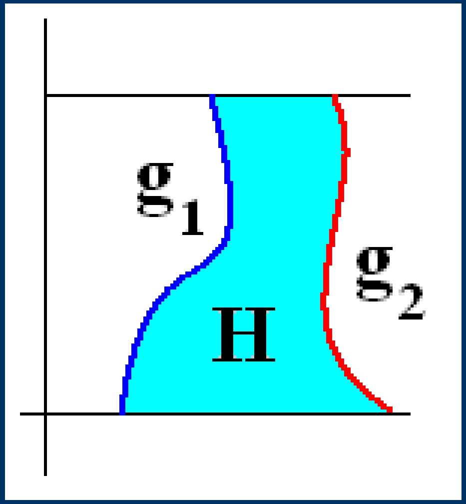


Ha f_1, f_2 : $[a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvények és $f_1(x) \le f_2(x)$, ha $x \in [a,b]$, akkor a

$$H = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le x \le b \,,\, f_1(x) \le y \le f_2(x) \}$$

halmaz az „x” tengelyre vonatkozó normál tartománynak nevezzük

Definíció: normál tartomány R^2-ben



Ha g_1 , g_2 : $[a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvények és $g_1(x) \le g_2(x)$, ha $y \in [a,b]$, akkor a

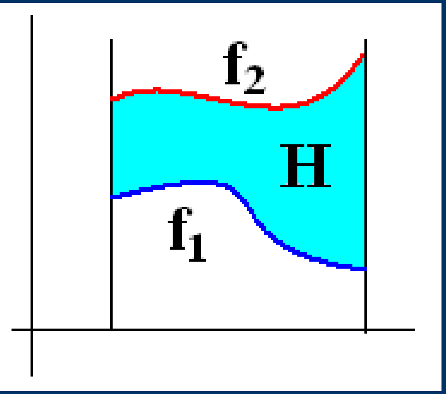
$$H = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \le y \le b , g_1(y) \le x \le g_2(y) \}$$

halmaz az „y" tengelyre vonatkozó normál tartománynak nevezzük

Tétel: az integrál kiszámítása normál tartományon

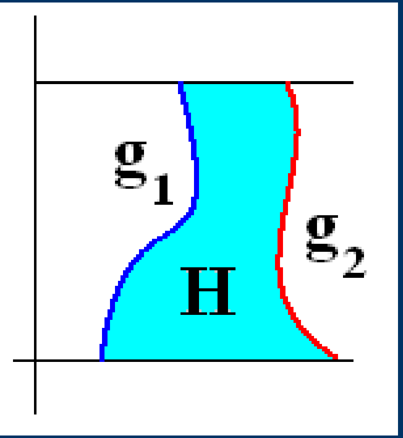
„x” tengelyre vonatkozó normál tartomány esetén:

$$\int_H f = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



„y” tengelyre vonatkozó normál tartomány esetén:

$$\int_H f = \int_{y=a}^{b} \left(\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

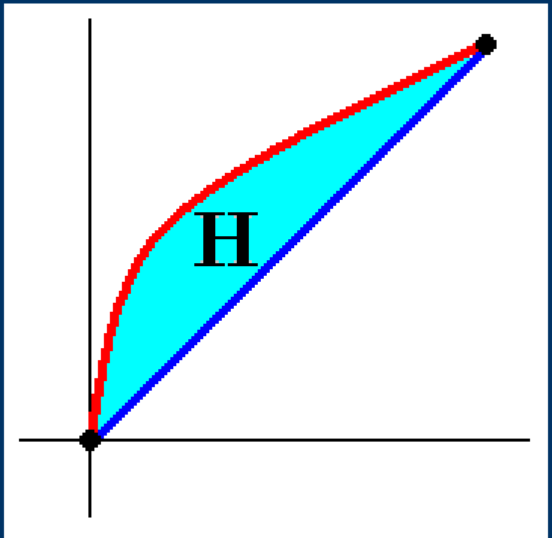


Példa:

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2y - x$ függvény integrálját a

$$H = \left\{ (x,y) \,|\, 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{x} \right\}$$

halmazon!



$$\int_H f = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x}^{\sqrt{x}} (x^2y - x)\,dy \right) dx =$$

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=x}^{\sqrt{x}}(x^2y-x)\,dy\right)dx=\int_{x=0}^{1}\left[x^2\cdot\frac{y^2}{2}-x\cdot y\right]_{y=x}^{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_{x=0}^{1}\left(\left(\frac{1}{2}x^3-x^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{2}x^4-x^2\right)\right)dx=$$

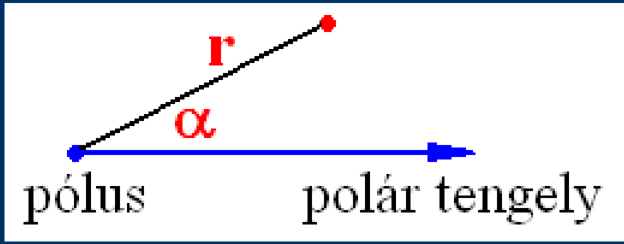
$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1}=$$

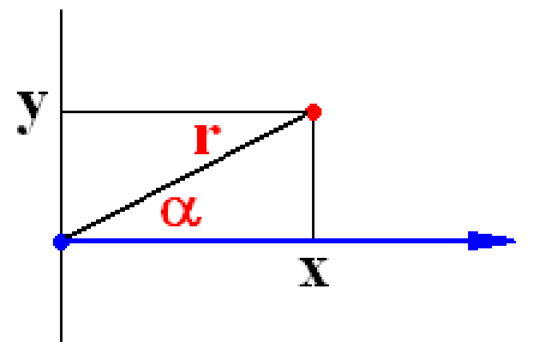
$$=\frac{1}{8}-\frac{2}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{3}=\frac{-5}{120}$$

Tétel: az integrál kiszámítása polárkoordinátákkal megadott tartomány esetén (integráltranszformáció)

Ha az $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény integrálható a H halmazon, akkor

$$\int_H f(x,y)\,dx\,dy = \int_H \big(f(r\cdot\cos\alpha, r\cdot\sin\alpha)\cdot r\big)\,dr\,d\alpha$$



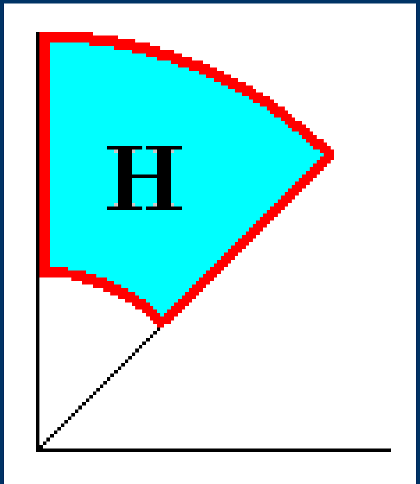


$$x = r\cdot\cos\alpha$$

$$y = r\cdot\sin\alpha$$

Példa:

Határozzuk meg az f(x,y) = x - 2y függvény integrálját a (rajzon látható) H halmazon!



A H halmazt derékszögű koordinátákkal nehéz előállítani, polárkoordinátákkal viszont „téglalap tartománnyá" egyszerűsödik:

$$H = \{ (r,\alpha) \mid 1 \leq r \leq 3 , \pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2 \}$$

így az integrált a transzformációs formulával célszerű kiszámítani.

$$\int_H (x-2y)\,dx\,dy = \int_H \big((r\cdot\cos\alpha - 2r\cdot\sin\alpha)\cdot r\big)dr\,d\alpha =$$

$$= \int_H r^2\cdot\big(\cos\alpha - 2\sin\alpha\big)dr\,d\alpha = \int_{\alpha=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=1}^{3} r^2\cdot\big(\cos\alpha - 2\sin\alpha\big)dr \right) d\alpha =$$

$$= \int_{\alpha=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\big(\cos\alpha - 2\sin\alpha\big)\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=1}^{3} \right) d\alpha = \frac{26}{3}\cdot \int_{\alpha=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos\alpha - 2\sin\alpha\big)d\alpha =$$

$$= \frac{26}{3}\cdot\big[\sin\alpha + 2\cos\alpha\big]_{\alpha=\pi/4}^{\pi/2} = \frac{26}{3}\cdot\left(1 - 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$