Vektoranalízis

Vektor értékű függvények

A korábbi fejezetekben tanulmányoztuk azokat a függvényeket, amelyek értékkészlete a valós számok halmazának egy részhalmaza.

Ezek egyrészt az

$R \to R$ típusú

egyváltozós, valós értékű függvények, másrészt az

$R^n \to R$ típusú

n változós, valós értékű függvények voltak.

Ebben a részben olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek értékkészlete az R^m halmaz egy részhalmaza (m>1, egész szám). Mivel R^m m dimenziós lineáris tér, úgy is fogalmazhatunk, hogy az értékkészletben m dimenziós vektorok vannak.

A vektor értékű függvényen általában az

$$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

alakú függvényeket értjük, és bizonyos alapvető fogalmakat ezekre adunk meg, de a geometriai és a fizikai alkalmazások szempontjából az alábbi függvénytípusok a legfontosabbak:

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ **(síkgörbék)**

$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ **(térgörbék)**

$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$

$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ **(vektormezők)**

Definíció: koordinátafüggvények

Az $R^n \to R^m$ típusú

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to$$

$$\to (f_1(x_1,x_2,\dots,x_n), f_2(x_1,x_2,\dots,x_n), \dots , f_m(x_1,x_2,\dots,x_n))$$

függvény koordinátafüggvényei az

$$f_1, f_2, \dots , f_m : R^n \to R$$

n változós, valós értékű függvények.

Az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ típusú

$$t \to (\, f_1(t) \,,\, f_2(t) \,,\, f_3(t) \,)$$

függvény (térgörbe) koordinátafüggvényei speciálisan az

$$f_1, f_2, f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

egyváltozós, valós értékű függvények.

A koordinátafüggvények értékei adják a függvényértékek koordinátáit.

Az $R^3 \to R^3$ típusú

$$(x_1, x_2, x_3) \to$$

$$\to (f_1(x_1, x_2, x_3) , f_2(x_1, x_2, x_3) , f_3(x_1, x_2, x_3))$$

függvény (vektormező) koordinátafüggvényei speciálisan az

$$f_1, f_2, f_3 : R^3 \to R$$

háromváltozós, valós értékű függvények.

A koordinátafüggvények értékei adják a függvényértékek koordinátáit.

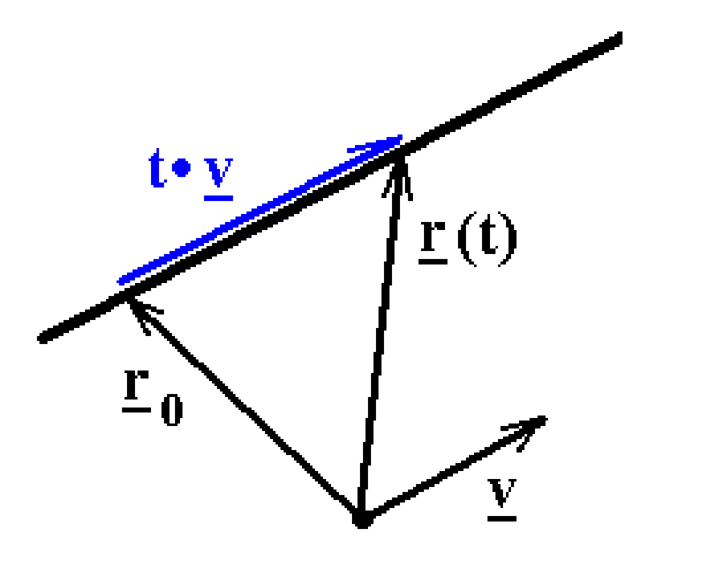
Egyenes előállítása R→R^3 függvénnyel

Az $\underline{r}_0$ helyzetvektor által meghatározott ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenest állítja elő a következő függvény:

$$\boxed{\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t \cdot \underline{v} \;,\quad t \in \mathbf{R}}$$

Megjegyzés:

A t paraméterértékek és az egyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést jelent a fenti függvénykapcsolat.



Legyen

$$\underline{r} = (x, y, z), \quad \underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \underline{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Ekkor a fenti vektorfüggvény koordinátákra bontva (az egyenes paraméteres egyenletrendszere):

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_1 \cdot t \\ y(t) &= y_0 + v_2 \cdot t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z(t) &= z_0 + v_3 \cdot t \end{aligned}$$

$\underline{r}_0$ $\underline{v}$

Példa: $\underline{r}_0 = (2,5,3)$, $\underline{v} = (4,-3,1)$. Ekkor az egyenes:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 2 + 4 \cdot t \\ y(t) &= 5 - 3 \cdot t \quad , \quad t \in \mathbf{R} \\ z(t) &= 3 + 1 \cdot t \end{aligned}}$$

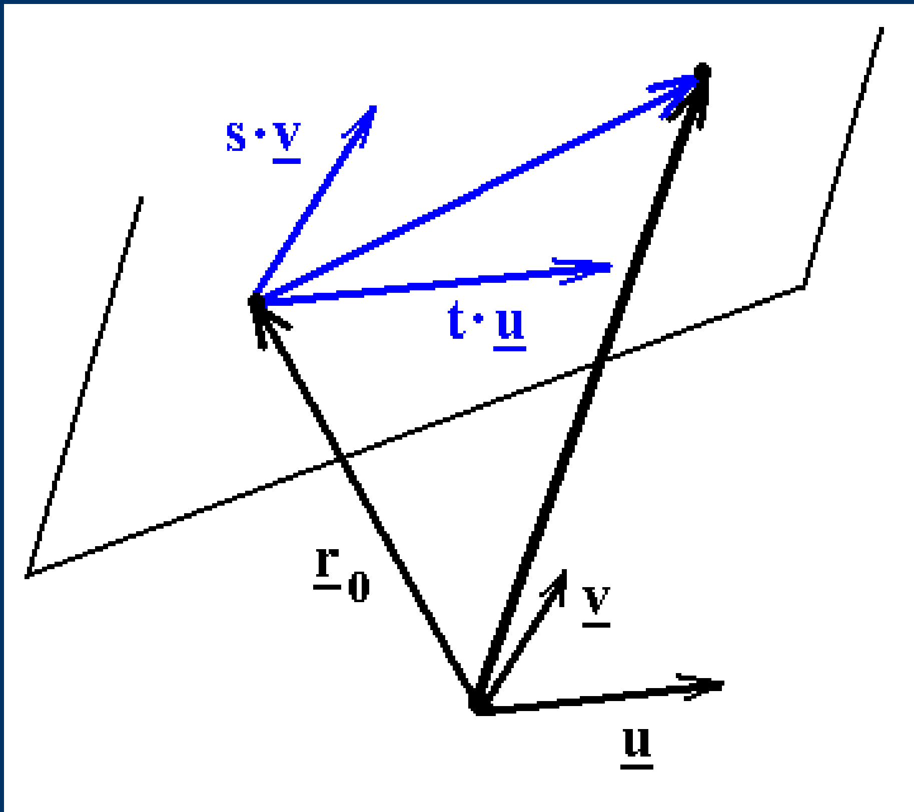
Az egyenes néhány pontja és a hozzá tartozó paraméterérték:

$t_1 = 0 \longleftrightarrow P_1 = (2,5,3)$

$t_2 = 2 \longleftrightarrow P_2 = (10,-1,5)$

$t_3 = -1 \longleftrightarrow P_3 = (-2,8,2)$

Sík előállítása $R^2 \to R^3$ függvénnyel



Az $\underline{r}_0$ helyzetvektor által meghatározott **ponton átmenő**, az $\underline{u}$ és a $\underline{v}$ **vektorokkal párhuzamos** síkot állítja elő a következő függvény:

$$\underline{r}(t,s) = \underline{r}_0 + t \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}\,, \quad (t,s) \in R^2$$

Legyen $\underline{r} = (x,y,z)$, $\underline{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$,
$\underline{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\underline{v} = (v_1,v_2,v_3)$.

Ekkor a fenti vektorfüggvény koordinátákra bontva:

$$\begin{aligned} x(t,s) &= x_0 + u_1 \cdot t + v_1 \cdot s \\ y(t,s) &= y_0 + u_2 \cdot t + v_2 \cdot s , \qquad t,s \in \mathbf{R} \\ z(t,s) &= z_0 + u_3 \cdot t + v_3 \cdot s \end{aligned}$$

$\underline{r}_0$ $\underline{u}$ $\underline{v}$

Példa: $\underline{r}_0 = (2,5,3)$, $\underline{u} = (4,-3,1)$, $\underline{v} = (1,2,7)$. Ekkor a sík:

$$\begin{aligned} x(t,s) &= 2 + 4\,t + 1 \cdot s \\ y(t,s) &= 5 - 3 \cdot t + 2 \cdot s\,, \qquad t,s \in \mathbf{R} \\ z(t,s) &= 3 + 1 \cdot t + 7 \cdot s \end{aligned}$$

A sík néhány pontja és a hozzá tartozó paraméterérték:

$(t_1,s_1) = (0,0) \longleftrightarrow P_1 = (2,5,3)$

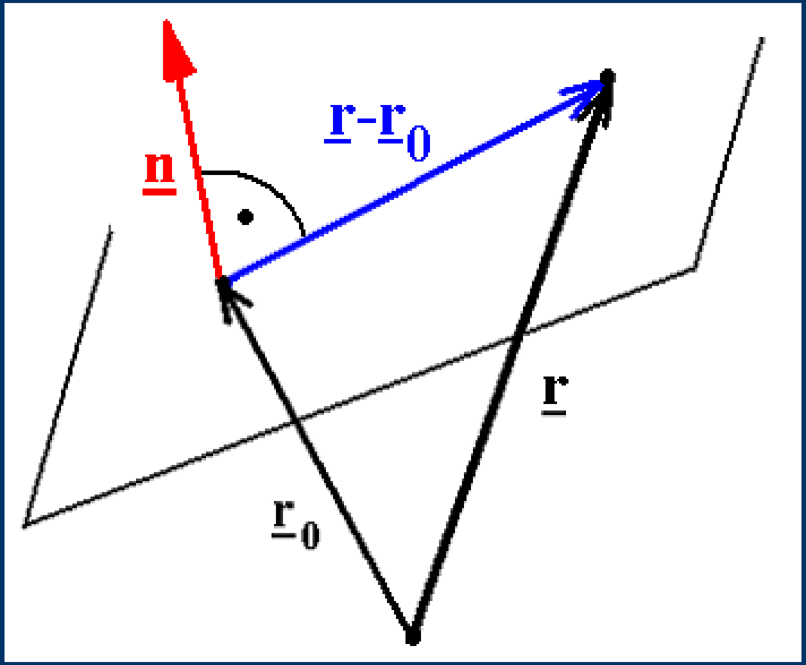
$(t_2,s_2) = (1,2) \longleftrightarrow P_2 = (8,6,18)$

$(t_3,s_3) = (-1,1) \longleftrightarrow P_3 = (-1,10,9)$

Sík normálvektoros előállítása

Az $\underline{r}_0$ helyzetvektor által meghatározott **ponton átmenő**, az $\underline{n}$ normálvektorú sík egyenlete:

$$\boxed{\langle\, \underline{r} - \underline{r}_0 \,,\, \underline{n} \,\rangle = 0}$$



(A < > jel skaláris szorzást jelöl.)

Legyen $\underline{r} = (x,y,z)$, $\underline{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$, $\underline{n} = (A,B,C)$

Ekkor a fenti egyenlet:

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0 , \underline{n} \rangle = 0$$

$$\langle (x,y,z) - (x_0, y_0, z_0) , (A,B,C) \rangle = 0$$

$$\langle (x-x_0 , y-y_0, z-z_0) , (A,B,C) \rangle = 0$$

$$A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) + C\cdot(z-z_0) = 0$$

$$A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + (-A\cdot x_0 - B\cdot y_0 - C\cdot z_0) = 0$$

$$A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$$

$$A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) + C\cdot(z-z_0) = 0$$

formula a sík általános egyenlete. A változók együtthatói a sík egy normálvektorának koordinátái.

Az általános egyenletet elosztva a n=(A,B,C) normálvektor hosszával a sík normál egyenletét kapjuk:

$$a\cdot(x-x_0) + b\cdot(y-y_0) + c\cdot(z-z_0) = 0$$

ahol

$$a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$c = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad d = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Megjegyzés:

A normál egyenlet különlegessége: a

$$P = (p_1, p_2, p_3)$$

pont távolsága az

$$a\cdot(x-x_0) + b\cdot(y-y_0) + c\cdot(z-z_0) = 0$$

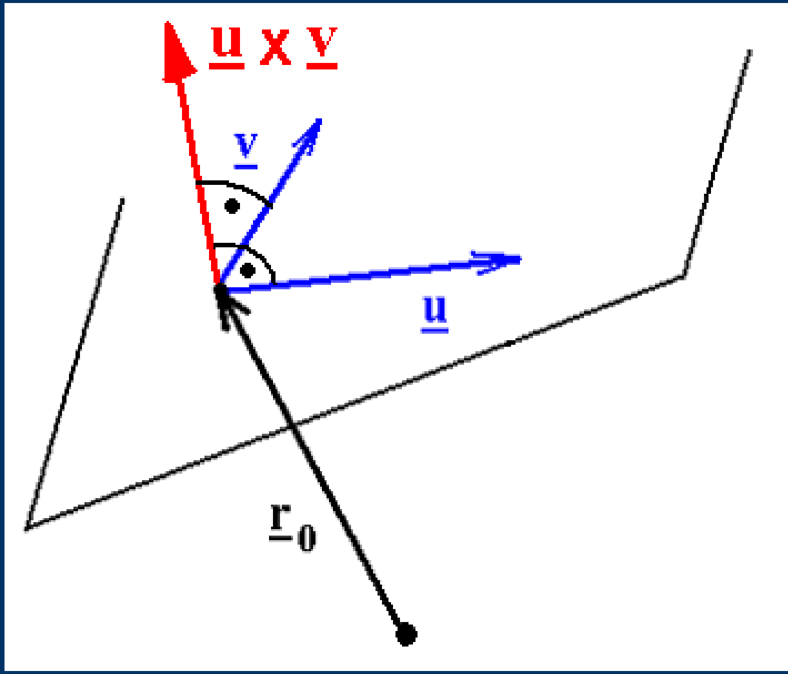
normál egyenletű síktól:

$$d(P,e) = | a \cdot (p_1 - x_0) + b \cdot (p_2 - y_0) + c \cdot (p_3 - z_0) |$$

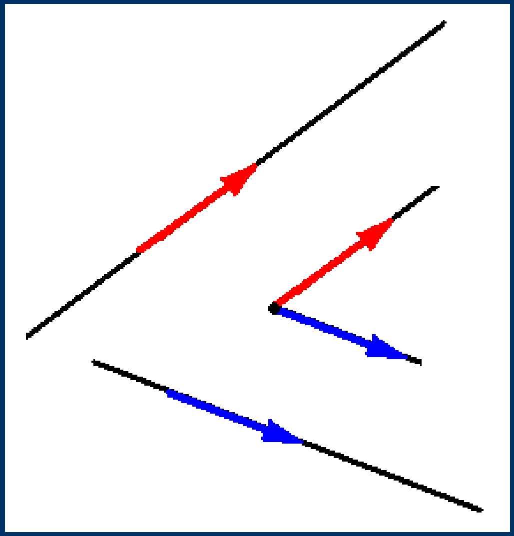
Megjegyzés:

Kapcsolat egy sík adatai (és így közvetve a kétféle egyenlete) között:

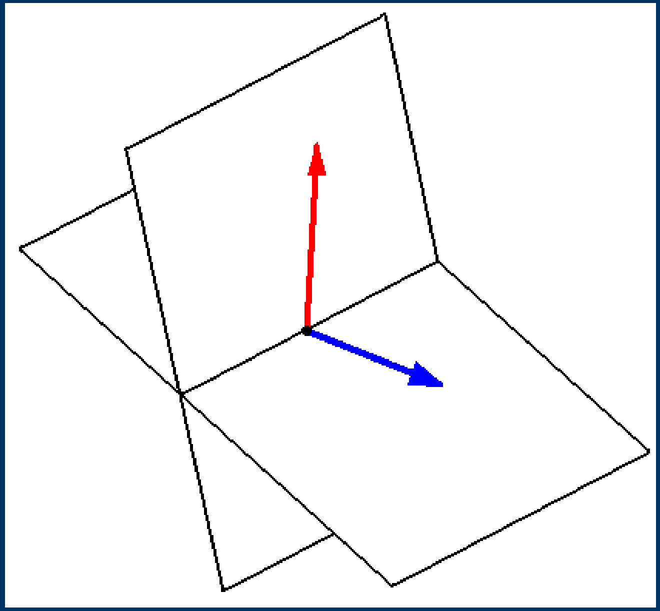
Ha $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy síkkal párhuzamos vektorok (de egymással nem párhuzamosak), akkor $\underline{u}\times\underline{v}$ a sík normálvektora.



Szögfeladatok

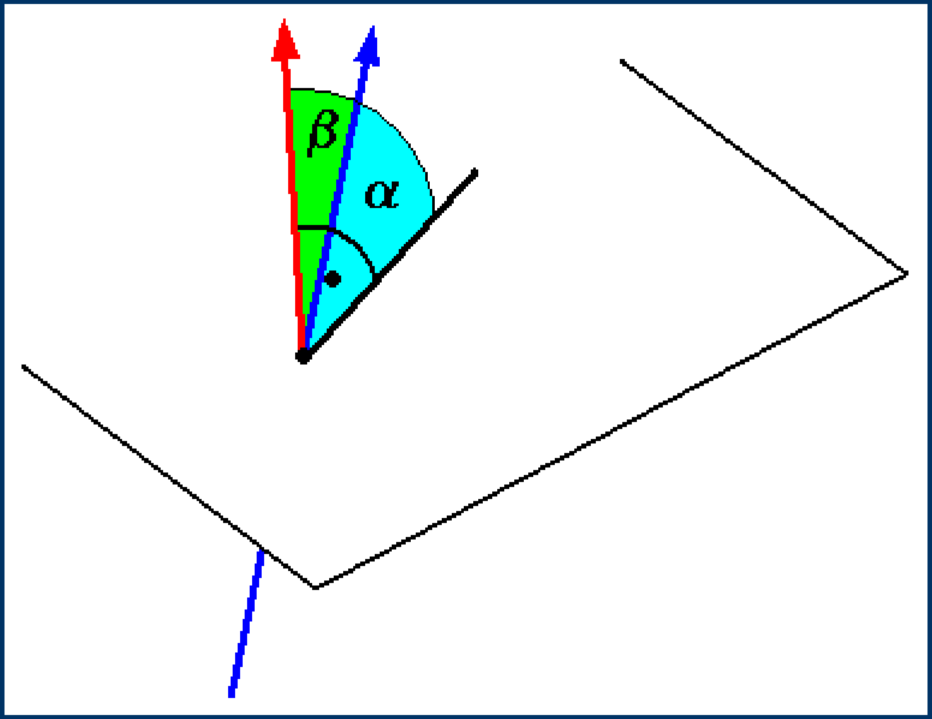


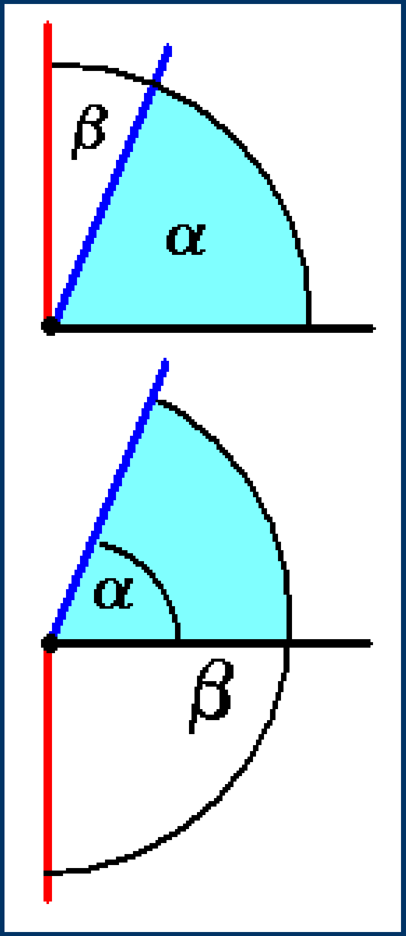
Egyenesek szöge egyenlő az irányvektoraik szögével.



Síkok szöge egyenlő a normálvektoraik szögével.

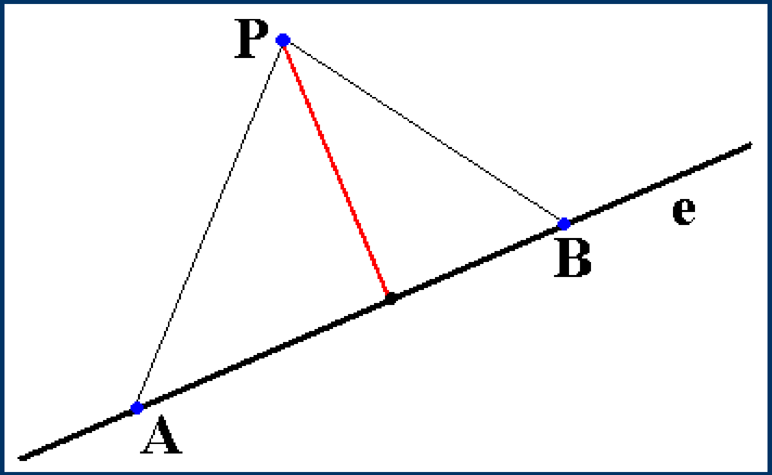
Egyenes és sík szöge az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának szögéből számítható.





Távolságfeladatok

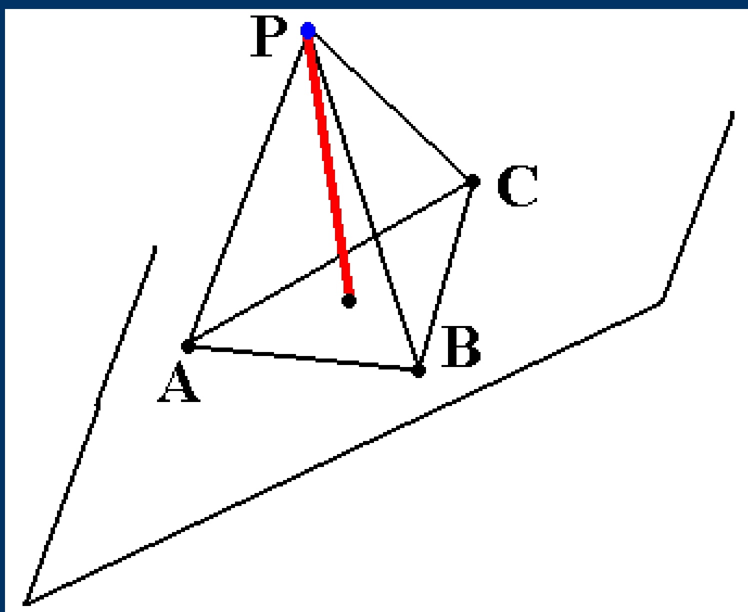
A d(P,e) távolság kiszámítható a következőképpen:



$$T_{ABP} = \frac{d(A,B)\cdot d(P,e)}{2}$$

$$d(P,e) = \frac{2\cdot T_{ABP}}{d(A,B)}$$

A d(P,S) távolság kiszámítható a következőképpen:



$$V_{ABCP} = \frac{T_{ABC} \cdot d(P,S)}{3}$$

$$d(P,S) = \frac{3 \cdot V_{ABCP}}{T_{ABC}}$$

Az $R^n \to R^m$ típusú függvények differenciálása

Definíció: $R^n \to R^m$ típusú lineáris függvények

Az

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

alakú függvényeket, ahol A egy (m×n) típusú mátrix, $R^n \to R^m$ típusú lineáris függvényeknek nevezzük.

Az A mátrix az f függvény mátrixa.

Definíció: differenciálhányados

Az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^m$ függvény differenciálható a D értelmezési tartomány P_0 belső pontjában, ha van olyan $A:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0) - A(P - P_0)}{\|P - P_0\|} = 0$$

Ekkor az A függvényt az f függvény P_0 helyen vett differenciálhányadosának nevezzük.

Tétel

A differenciálhányados mátrixa a koordináta-függvények parciális deriváltjaiból áll:

$$f'(P_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(P_0) & \dots & \partial_n f_1(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(P_0) & \dots & \partial_n f_m(P_0) \end{pmatrix}$$

A differenciálhányados mátrixa speciális esetekben:

$R^3 \to R^3$ típusú függvények (vektormezők)

$$f'(P_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(P_0) & \partial_2 f_1(P_0) & \partial_3 f_1(P_0) \\ \partial_1 f_2(P_0) & \partial_2 f_2(P_0) & \partial_3 f_2(P_0) \\ \partial_1 f_3(P_0) & \partial_2 f_3(P_0) & \partial_3 f_3(P_0) \end{pmatrix}$$

$R^n \to R$ típusú függvények (n változós függvények)

$$f'(P_0) = \operatorname{grad} f(P_0) = \\ = \left(\partial_1 f(P_0), \partial_2 f(P_0), \dots, \partial_n f(P_0)\right)$$

$R \to R^n$ típusú függvények (görbék)

$$f'(P_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(P_0) \\ \partial_1 f_2(P_0) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1(P_0) \\ f'_2(P_0) \\ \vdots \\ f'_m(P_0) \end{pmatrix}$$

Definíció: differenciál

Ha az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^m$ függvény differenciálható a P_0 pontban, akkor az f P_0 pontbeli, P ponthoz tartozó differenciálja: $f'(P_0) \cdot (P-P_0) = f'(P_0) \cdot \Delta P$.

Definíció: lineáris közelítés

Ha az $f:D(\subseteq \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^m$ függvény differenciálható a P_0 pontban, akkor az f P_0 pontbeli **lineáris közelítése**:

$$f(P) \approx f(P_0) + f'(P_0) \cdot (P-P_0) = f(P_0) + f'(P_0) \cdot \Delta P,$$

avagy: $f(P) - f(P_0) \approx f'(P_0) \cdot \Delta P.$

Az $R^3 \to R^3$ típusú függvények differenciálása

Definíció

Az

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

alakú függvények az $R^3 \to R^3$ típusú lineáris függvények.

Az

$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow$

$\rightarrow (\, f_1(x_1, x_2, x_3)\,,\, f_2(x_1, x_2, x_3)\,,\, f_3(x_1, x_2, x_3)\,)$

függvény (vektormező) koordinátafüggvényei az

$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

háromváltozós, valós értékű függvények.

A differenciálhányados speciálisan:

$$f'(P_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(P_0) & \partial_2 f_1(P_0) & \partial_3 f_1(P_0) \\ \partial_1 f_2(P_0) & \partial_2 f_2(P_0) & \partial_3 f_2(P_0) \\ \partial_1 f_3(P_0) & \partial_2 f_3(P_0) & \partial_3 f_3(P_0) \end{pmatrix}$$

Példa

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_3^4 + x_2 \cdot x_3 \, , \, x_1^3 - x_3^2 \, , \, 6 \cdot x_2)$$

- **határozzuk meg az függvény differenciálhányadosát;**
- **írjuk fel a lineárist közelítést a $P_0 = (2,4,1)$ helyen;**
- **számoljuk ki az f függvény közelítő értékét a $P = (2.1 \, , \, 3.8 \, , \, 1.3)$ helyen!**

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_3^4 + x_2 \cdot x_3 \,,\, x_1^3 - x_3^2 \,,\, 6 \cdot x_2), \qquad P_0=(2,4,1)$$

$$f'(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3^4 & x_3 & 4x_1x_3^3 + x_2 \\ 3x_1^2 & 0 & -2x_3 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f'(P_0) = f'(2,4,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f'(P_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(P_0) & \partial_2 f_1(P_0) & \partial_3 f_1(P_0) \\ \partial_1 f_2(P_0) & \partial_2 f_2(P_0) & \partial_3 f_2(P_0) \\ \partial_1 f_3(P_0) & \partial_2 f_3(P_0) & \partial_3 f_3(P_0) \end{pmatrix}$$

A lineáris közelítés formulája: $f(P) \approx f(P_0) + f'(P_0) \cdot (P - P_0)$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_3^4 + x_2 \cdot x_3\ ,\ x_1^3 - x_3^2\ ,\ 6 \cdot x_2) \Rightarrow$$

$$f(P_0) = f(2,4,1) = (\ 6\ ,\ 6\ ,\ 24\ )$$

$$f'(P_0) = f'(2,4,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) \approx \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 4 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) \approx \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 4 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$$P = (2.1\ ,\ 3.8\ ,\ 1.3\ )$$

$$f(2.1, 3.8, 1.3) \approx \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.1 - 2 \\ 3.8 - 4 \\ 1.3 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 12 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0.6 \\ -1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.5 \\ 6.6 \\ 22.8 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

Adott vektormező (pl. sebességtér az áramló folyadékban, térerőség az elektromos erőtérben) esetén a differenciálhányados mátrixának elemei függenek a koordinátarendszer megválasztásától.

Az alábbiakban két olyan jellemzőt adunk meg, melyek a differenciálhányados mátrix elemeiből számíthatók, de invariánsak a koordinátarendszer megváltoztatásával szemben, és közvetlen fizikai tartalommal bírnak.

Definíció: vektormező divergenciája

$$\operatorname{div} f(P_0) = \partial_1 f_1(P_0) + \partial_2 f_2(P_0) + \partial_3 f_3(P_0)$$

Megjegyzés

$$f'(P_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(P_0) & \partial_2 f_1(P_0) & \partial_3 f_1(P_0) \\ \partial_1 f_2(P_0) & \partial_2 f_2(P_0) & \partial_3 f_2(P_0) \\ \partial_1 f_3(P_0) & \partial_2 f_3(P_0) & \partial_3 f_3(P_0) \end{pmatrix}$$

A divergencia egyenlő a differenciálhányados mátrix főátlójában lévő elemek összegével.

A divergencia a forrásossággával függ függ össze:
egy vektormező forrásmentes, ha a divergenciája 0.

Példa

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2 x_3^4 + 2x_2\,,\ x_1^3 - 5x_2^2\,,\ 6x_2x_3), \qquad P_0 = (-1,2,1)$$

$$f'(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_3^4 & 2 & 4x_1^2x_3^3 \\ 3x_1^2 & -10x_2 & 0 \\ 0 & 6x_3 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_3^4 - 10x_2 + 6x_2$$

$$f'(-1,2,1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & -20 & 0 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} f(-1,2,1) = -2 - 20 + 12 = -10$$

Definíció: vektormező rotációja

$$f'(P_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(P_0) & \partial_2 f_1(P_0) & \partial_3 f_1(P_0) \\ \partial_1 f_2(P_0) & \partial_2 f_2(P_0) & \partial_3 f_2(P_0) \\ \partial_1 f_3(P_0) & \partial_2 f_3(P_0) & \partial_3 f_3(P_0) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f(P_0) = (\partial_2 f_3(P_0) - \partial_3 f_2(P_0), \\ -\partial_1 f_3(P_0) + \partial_3 f_1(P_0), \partial_1 f_2(P_0) - \partial_2 f_1(P_0))$$

Könnyebben megjegyezhető az alábbi formula:

$$\operatorname{rot} f = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

A determináns formális kifejtésével a rotáció fenti képletét kapjuk.

A rotáció az örvényességgel függ össze:
egy vektormező örvénymentes, ha a rotációja 0 (vektor).

Példa:

Határozzuk meg az

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2x_3^4+2x_2\ ,\ x_1^3-5x_2^2\ ,\ 6x_2x_3)$$

vektormező rotációját!

A parciális derivált függvényekből képzett derivált függvény:

$$f'(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_3^4 & 2 & 4x_1^2x_3^3 \\ 3x_1^2 & -10x_2 & 0 \\ 0 & 6x_3 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f = \det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

Ennek elemeiből összeállítható a rotáció függvény:

$$\operatorname{rot} f(x_1,x_2,x_3) = (\ 6x_3\ ,\ 4x_1^2x_3^3\ ,\ 3x_1^2-2\ )$$

Példa:

Határozzuk meg az

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2x_3^4+2x_2\,,\; x_1^3-5x_2^2\,,\; 6x_2x_3)$$

vektormező rotációját a $P_0 = (-1,2,1)$ helyen!

$$f'(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_3^4 & 2 & 4x_1^2x_3^3 \\ 3x_1^2 & -10x_2 & 0 \\ 0 & 6x_3 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

$$f'(-1,2,1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & -20 & 0 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} f = \det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}$$

A parciális derivált függvények pontbeli értékeiből kiszámítható a rotáció pontbeli értéke:

$$\operatorname{rot} f(-1,2,1) = (\,6-0\,,\; -0+4\,,\; 3-2\,) = (\,6\,,\; 4\,,\; 1\,)$$

Jelölés: nabla operátor

$$\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$$

A nabla operátor segítségével röviden felírhatók a differenciál operátorok:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{f} = \partial_1 \mathrm{f}_1 + \partial_2 \mathrm{f}_2 + \partial_3 \mathrm{f}_3 = \nabla \cdot \mathrm{f}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{f} = (\partial_2 \mathrm{f}_3 - \partial_3 \mathrm{f}_2, -\partial_1 \mathrm{f}_3 + \partial_3 \mathrm{f}_1, \partial_1 \mathrm{f}_2 - \partial_2 \mathrm{f}_1) = \nabla \times \mathrm{f}$$

Megjegyzések

$$\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} D = \rho$$

$$\operatorname{div} B = 0$$

A divergencia és a rotáció megjelenik az elektromágneses tér jellemzői közti összefüggéseket megadó Maxwell egyenletek differenciális alakjában:

E: elektromos térerősség

D: elektromos eltolódás

H: mágneses térerősség

J: áramsűrűség

ρ: elektromos töltéssűrűség

Az $R \to R^3$ típusú függvények (térgörbék) differenciálása

Definíció: koordinátafüggvények

Az

$$t \to (\, f_1(t)\,,\, f_2(t)\,,\, f_3(t)\,)$$

függvény koordinátafüggvényei az f_1, f_2, f_3 : $R \to R$ egyváltozós, valós értékű függvények.

A térgörbék vizsgálatához általában elegendő a koordinátafüggvényekkel való számolás.

Tétel

Az **f**$=(f_1,f_2,f_3):[a,b] \to \mathbf{R}^3$ függvény **differenciálható** a $t_0 \in [a,b]$ helyen, ha az f_1, f_2, f_3 : $[a,b] \to \mathbf{R}$ koordinátafüggvényei differenciálhatók a t_0 helyen.

Ha az $f = (f_1 , f_2 , f_3) : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ differenciálható a t_0 helyen, akkor a differenciálhányadosa:

$$f'(P_0) = \begin{pmatrix} f'_1(P_0) \\ f'_2(P_0) \\ f'_3(P_0) \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

Az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ típusú függvényeket szokás r-rel, a differenciálást pedig vessző helyett ponttal jelölni:

$$r'(t) = \dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}$$

A fizikában előforduló $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ függvényeknél a t paraméter (változó) általában az idő, így a pont az idő szerinti deriválásra utal.

Példa

Határozzuk meg az

$$\mathbf{r}(t) = (\,3t^4\,,\,5t^2-7t\,,\,6t-t^3\,)$$

függvény differenciálhányadosát a $t_0=2$ helyen!

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} 12t^3 \\ 10t-7 \\ 6-3t^2 \end{pmatrix}$$

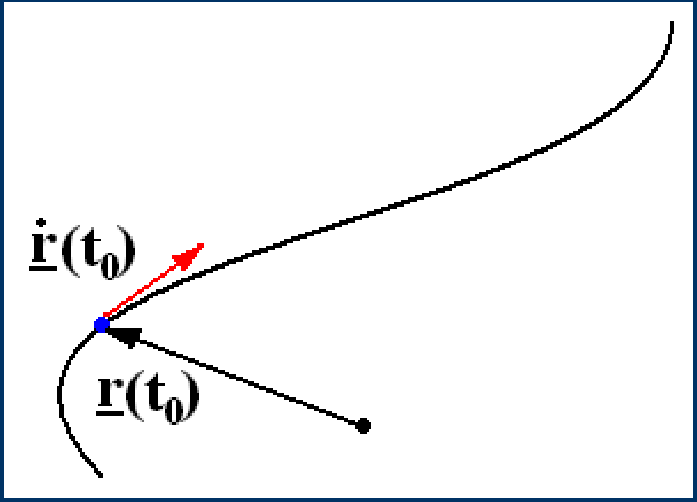
$$\dot{r}(2) = \begin{pmatrix} 96 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Definíció: érintő vektor

Az $\dot{r}(t)$ **vektort érintő vektornak, az egységnyi**

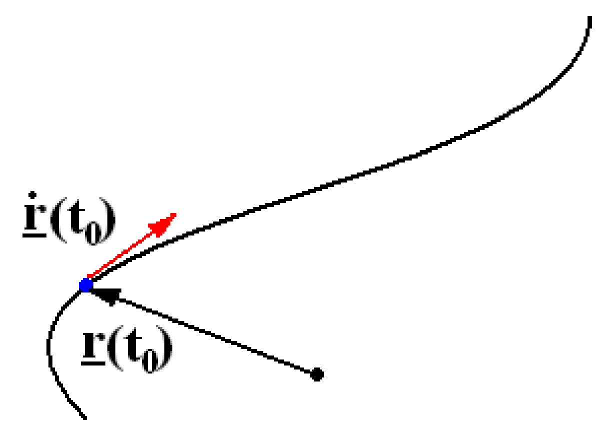
hosszúságúra normált $e = \dfrac{\dot{r}(t)}{\left|\dot{r}(t)\right|}$ **vektort érintő**

egységvektornak nevezzük.



Definíció: érintő egyenes

Differenciálható térgörbe érintő egyenese (lineáris közelítése):



$$r(t) \approx e(t) = r(t_0) + \dot{r}(t_0)(t - t_0)$$

Példa

Határozzuk meg az $r(t) = (3t^4 , 5t^2-7t , 6t-t^3)$ függvény érintő egyenesét a $t_0=2$ helyen!

$$r(t) \approx e(t) = r(t_0) + \dot{r}(t_0)(t - t_0)$$

$$r(2) = \begin{pmatrix} 48 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \dot{r}(2) = \begin{pmatrix} 96 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$e(t) = \begin{pmatrix} 48 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 96 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix}(t-2) = \begin{pmatrix} -144+96t \\ -22+14t \\ 16-6t \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: $R \to R^2$ függvények differenciálása

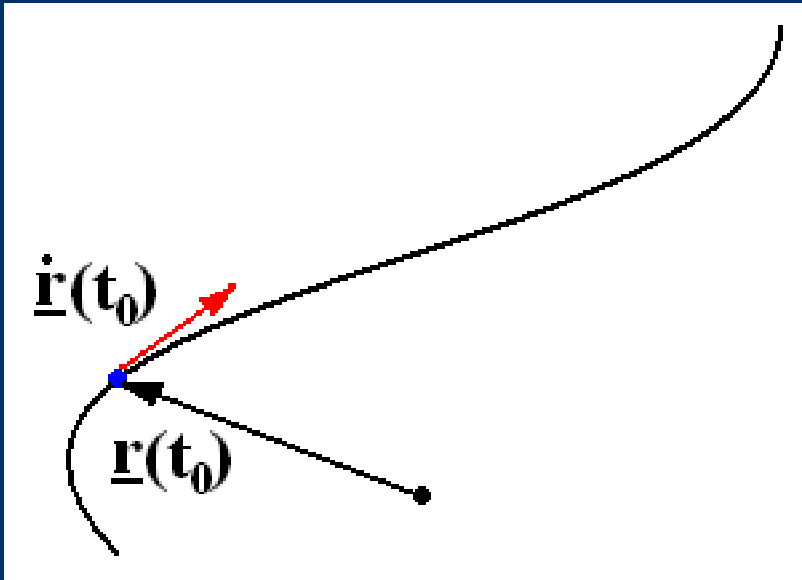
Az $R \to R^3$ függvények differenciálásáról leírtak egyszerűen átvihetők az $R \to R^3$ függvényekre. Minden fogalom és formula érvényes, a különbség csupán annyi, hogy három helyett két koordinátafüggvénnyel kell dolgozni.

Míg az $R \to R^3$ függvények a térgörbék (térbeli pályák), addig az $R \to R^2$ függvények a síkgörbék (síkbeli pályák) vizsgálatában játszanak fontos szerepet.

A differenciálhányados fizikai jelentése

Ha a $t \to \underline{r}(t)$ függvény egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor a differenciálhányados vektor adott időpontban érvényes **pillanatnyi sebesség**:

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$$



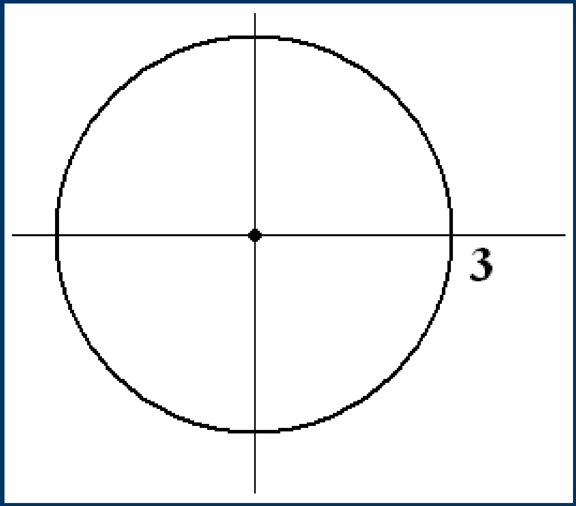
Példa:

Tekintsünk a következő síkbeli mozgást, melynek hely-idő függvénye:

$$\underline{r}(t) = (3 \cdot \cos t, 3 \cdot \sin t)$$

(a síkbeliség miatt ez egy $R \rightarrow R^2$ ***függvény)***

Mivel $|\underline{r}(t)|=3$, a mozgás pályája az origó középpontú, 3 egység sugarú.



A hely-idő függvény:

$$\underline{r}(t) = (3\cdot\cos t, 3\cdot\sin t)$$

A sebesség függvény:

$$\underline{v}(t) = (-3\cdot\sin t, 3\cdot\cos t)$$

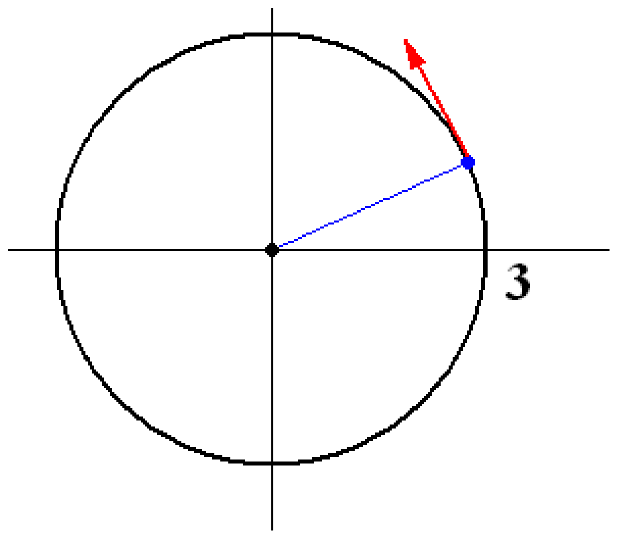
A sebesség nagysága:

$$v = \sqrt{9\cdot\cos^2 x + 9\cdot\sin^2 x} = 3$$

azaz itt egy egyenletes körmozgásról van szó, 3 egység nagyságú sebességgel.

$$\underline{v}(t) = (-3 \cdot \sin t, 3 \cdot \cos t)$$

A pillanatnyi sebesség a t=π/6 időpontban:



$$\underline{v}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-3 \cdot \cos\frac{\pi}{6}, 3 \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

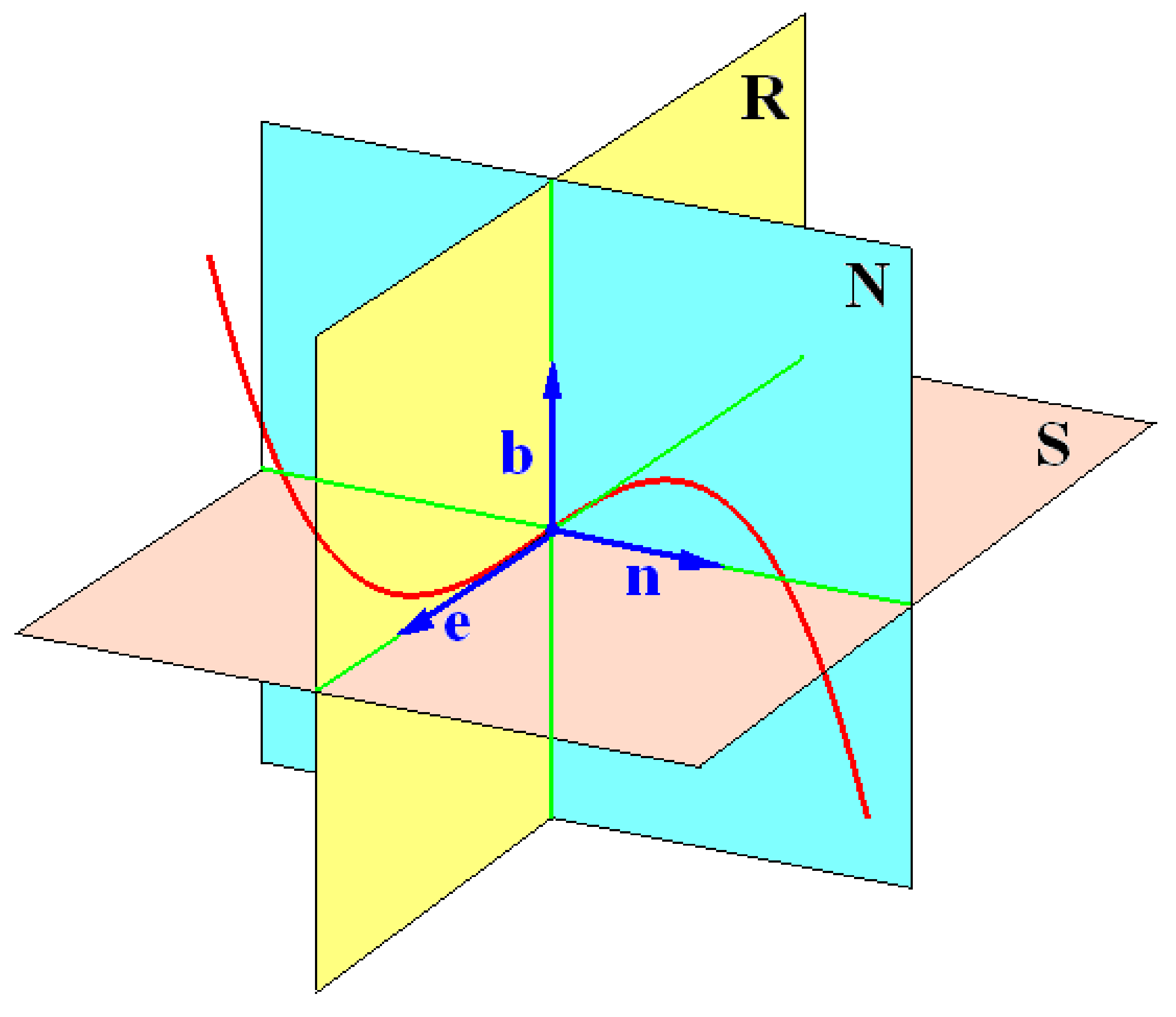
Definíció: binormális egységvektor

A $$b = \frac{\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)}{\left|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\right|}$$ **vektort binormális egységvektornak nevezzük, ha** $\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t) \neq 0$

Definíció: főnormális egységvektor

Az érintő vektor és a binormális egységvektor vektori szorzatát főnormális egységvektornak nevezzük:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e} \times \mathbf{b}$$


R
N
S
b
n
e

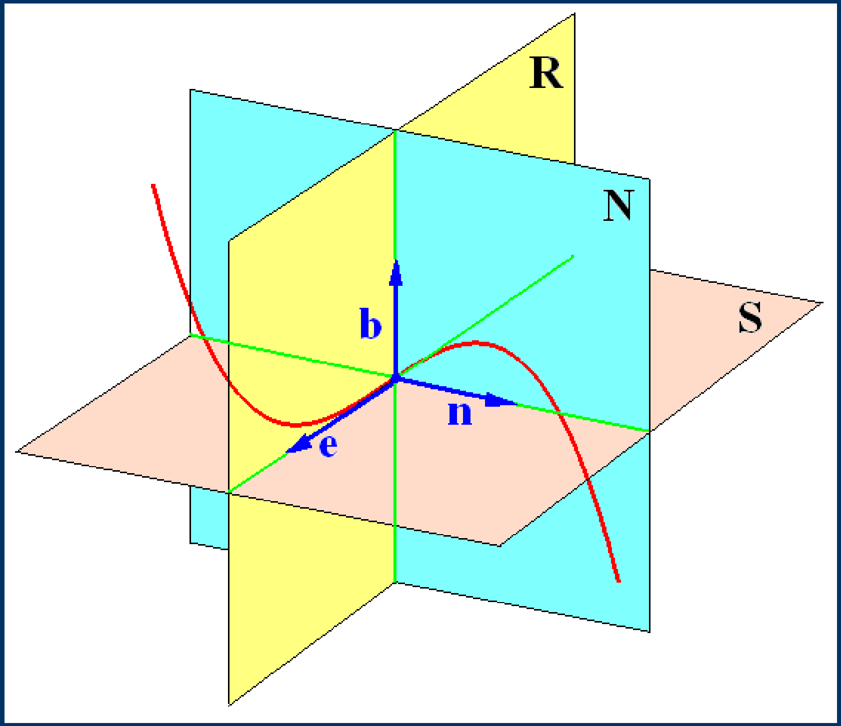
Definíció: kísérő triéder

Az érintő, a főnormális és a binormális egységvektorok a görbe bármely pontjában (ahol nem tűnnek el) ortonormált vektorrendszert alkotnak. Az (e,n,b) hármast a görbe kísérő triéderének nevezzük.

A görbék vizsgálatában a kísérő triéder által meghatározott koordinátarendszer alapvető fontosságú.

Definíció: simulósík

Az e és az n vektorok által kifeszített sík a görbe simulósíkja.



Definíció: normális sík

Az n és a b vektorok által kifeszített sík a görbe normális síkja.

Definíció: rektifikáló sík

Az e és a b vektorok által kifeszített sík a görbe rektifikáló síkja.

Definíció: görbület

Azt, hogy egy görbe egy adott helyen mennyire „tér el” az egyenestől a görbülettel mérjük. A görbület az érintő vektor irányának megváltozásával függ össze.

Ha a görbe kétszer differenciálható és az első deriváltja nem tűnik el, akkor a görbület:

$$\kappa(t) = \frac{\left|\dot{r}(t) \times \ddot{r}(t)\right|}{\left|\dot{r}(t)\right|^3}$$

Megjegyzések

Egyenes görbülete nulla.

Kör görbülete a sugár reciproka.

Definíció: torzió

Azt, hogy egy görbe mennyire csavarodik a torzióval mérjük. A torzió a binormális vektor irányának változásával függ össze: a görbe mennyire „tér el” a simulósíkjától.

Ha a görbe háromszor differenciálható és a első és a második deriváltak vektori szorzata nem tűnik el, akkor a torzió:

$$\tau(t) = \frac{\dot{\mathrm{r}}(t)\ddot{\mathrm{r}}(t)\dddot{\mathrm{r}}(t)}{\left|\dot{\mathrm{r}}(t)\times\ddot{\mathrm{r}}(t)\right|^2}$$

Megjegyzés

Síkgörbe a saját simulósíkjában van, így a torziója nulla.

Az állítás megfordítása is igaz, így a torzió eltűnése a síkgörbék jellemzője:

Egy háromszor differenciálható görbe pontosan akkor síkgörbe, ha a torziója nulla.

Síkgörbék differenciálásával kapcsolatos megjegyzések

Egy t→(x(t),y(t)) síkgörbe vizsgálatakor szükség lehet az x és az y kapcsolatát leíró jellemzőkre:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

mivel a síkgörbék jellemzőit megadó számos formula (pl. érintő egyenlete, érintési paraméterek, simulókör, görbület) ezeket az értékeket tartartalmazza.

Ezek a differenciálhányadosok kiszámíthatók a t→x(t) és a t→y(t) függvények deriváltjaival a következők szerint:

Ha t→x(t) deriváltja nem tűnik el egy adott helyen, akkor ott

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{\left(\dot{x}(t)\right)^3}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$$