9. Függvények

9.1. Ábrázolja a megadott függvényeket, és vizsgálja meg a függvények korlátosságát, monotonitását, konvexitását, paritását, előjelét, zérushelyeit, periodicitását és határozza meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, melyen értelmezhetők:

$x \to \sin x$	$x \to \cos x$	$x \to \mathrm{tg}\, x$	$x \to \mathrm{ctg}\, x$
$x \to \arcsin x$	$x \to \arccos x$	$x \to \mathrm{arctg}\, x$	$x \to \mathrm{arcctg}\, x$
$x \to \mathrm{sh}\, x$	$x \to \mathrm{ch}\, x$	$x \to \mathrm{th}\, x$	$x \to \mathrm{cth}\, x$
$x \to \mathrm{arsh}\, x$	$x \to \mathrm{arch}\, x$	$x \to \mathrm{arth}\, x$	$x \to \mathrm{arcth}\, x$
$x \to e^x$	$x \to 0{,}5^x$	$x \to x^3$	$x \to x^4$
$x \to \ln x$	$x \to \log_{0,5} x$	$x \to \sqrt{x}$	$x \to \sqrt[3]{x}$
$x \to 2^x$	$x \to e^{-x}$	$x \to \lvert x \rvert$	$x \to \lvert \sin x \rvert$
$x \to \log_2 x$	$x \to \sqrt{x^2}$	$x \to \dfrac{1}{x}$	$x \to \dfrac{1}{x^2}$

9.2. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

a, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x}{1+x}, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$

b, $f(x) = \begin{cases} \log_2 \dfrac{1}{x}, & \text{ha} \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

c, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 2 \\ \dfrac{1}{1-x^2}, & \text{ha} \quad x \ge 2 \end{cases}$

d, $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{x}{2}, & \text{ha} \quad 0 < x < \pi \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

e, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$

f, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(2+x), & \text{ha} \quad -2 \le x < -1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{2}(1-x), & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

g, $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x < 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$

9.3. Ábrázolja síkbeli polár koordinátarendszerben a következő függvényeket:

a, $r(\varphi) = 5$, $\varphi \in [0,2\pi]$

b, $r(\varphi) = \varphi$, $\varphi \in [0,2\pi]$

c, $r(\varphi) = 3(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in [0,2\pi]$

d, $r(\varphi) = \lvert \sin 4\varphi \rvert$, $\varphi \in [0,2\pi]$

e, $r(\varphi) = 2\cos 2\varphi$, $\varphi \in [0,2\pi]$

f, $r(\varphi) = \sin^3(\varphi/3)$, $\varphi \in [0,3\pi]$

9.4. Ábrázolja a következő $t\to(x(t),y(t))$ típusú vektorértékű függvényeket (síkgörbéket) a megadott halmazon :

a, $\begin{cases} x(t) = 3 + \cos t \\ y(t) = 4 + \sin t \end{cases}$ b, $\begin{cases} x(t) = -2 + 6t \\ y(t) = 1 - 5t \end{cases}$ c, $\begin{cases} x(t) = 2(t - \sin t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

d, $\begin{cases} x(t) = t^2 - t + 1 \\ y(t) = t^2 + t + 1 \end{cases}$ e, $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{|t|} \end{cases}$ f, $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

9.5. Ábrázolja a következő $t\to(x(t),y(t),z(t))$ típusú vektorértékű függvényeket (térgörbéket) a megadott halmazon :

a, $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t, \\ z(t) = 2t \end{cases}$ $t\in[0,4\pi]$ b, $\begin{cases} x(t) = 3t - 2 \\ y(t) = t \\ z(t) = 2t + 1 \end{cases}$ c, $\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = t^2 \end{cases}$

d, $\begin{cases} x(t) = 4 \\ y(t) = 3 + 3\cos t, \\ z(t) = 1 + 2\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ e, $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos t}{t^2} \\ y(t) = \dfrac{\sin t}{t^2}, \\ z(t) = t \end{cases}$ $t\in[0,4\pi]$

9.6. Ábrázolja a következő $(u,v)\to(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ vektorértékű függvényeket (felületeket):

a, $\begin{cases} x(u,v) = 1 + u + v \\ y(u,v) = 2u + v \\ z(u,v) = 3 - u + 2v \end{cases}$ b, $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = u^2 + v^2 \end{cases}$ c, $\begin{cases} x(u,v) = 1 \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \sin v \end{cases}$

9.7. Határozza meg a következő $(u,v)\to(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ vektorértékű függvények (felületeket) paramétervonalait:

a, $\begin{cases} x(u,v) = \cos u \cdot \cos v \\ y(u,v) = \cos u \cdot \sin v, \\ z(u,v) = \sin u \end{cases}$ $u\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $v\in[0,2\pi]$ b, $\begin{cases} x(u,v) = \cos v \\ y(u,v) = \sin v \\ z(u,v) = u \end{cases}$

c, $\begin{cases} x(u,v) = (1 + \cos u)\cdot \cos v \\ y(u,v) = (1 + \cos u)\cdot \sin v, \\ z(u,v) = \sin u \end{cases}$ $u\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $v\in[0,2\pi]$ d, $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = uv \end{cases}$

9.8. Határozza meg a következő kétváltozós függvények szintvonalait és a paramétervonalait:

a, $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ b, $f(x,y) = 4-x^2-y^2$ c, $f(x,y) = 3$

d, $f(x,y) = 2x-5y-1$ e, $f(x,y) = xy$ f, $f(x,y) = y$

g, $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$ h, $f(x,y) = \sin y$ i, $f(x,y) = |x+y|$

9.9. Határozza meg a következő háromváltozós függvények szintfelületeit:

a, $f(x,y,z) = x^2+y^2$

b, $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$

c, $f(x,y,z) = x+2y+3z$

d, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

e, $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$

f, $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2$

9.10.Határozza meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi függvények értemezhetők:

a, $x \to \dfrac{1}{x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

b, $x \to \dfrac{1-\lg x}{\lg(\sqrt{x}-2)}$

c, $x \to \lg(\cos x)$

d, $x \to \sqrt{\lg x}$

e, $x \to \ln(x^2-16)$

f, $x \to \sqrt{12x-12-3x^2}$

g, $x \to \arcsin\dfrac{3-x^2}{x^2+5x+6}$

h, $x \to \lg\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-10x+16}$

i, $x \to \lg(x^2-5x+4)$

j, $x \to \operatorname{arcth}(x^2-3)$

k, $x \to \lg\left(\ln\dfrac{2x-10}{3x+27}\right)$

l, $x \to \arcsin\dfrac{3-2x}{5+x}$

m, $x \to \lg(\sin^2 x)$

n, $x \to \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

o, $x \to \operatorname{arth}\dfrac{x+2}{x+3}$

p, $x \to \operatorname{arth}\sqrt{\dfrac{2^x}{1-2^x}}$

q, $x \to \operatorname{arcth}(\log_3 x)$

r, $x \to \arcsin\sqrt{x^2+3x-4}$

9.11.Határozza meg az $\mathbf{R}^2$ halmaz azon legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvények értelmezhetők:

a, $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

b, $f(x,y) = \ln(x+y+1)$

c, $f(x,y) = \arcsin(x-y) \cdot \arccos(x+y)$

9.12.Számítsa ki a következő kifejezések pontos értékét a trigonometrikus és a hiperbolikus függvényekre vonatkozó azonosságok felhasználásával:

a, $\operatorname{sh}(\operatorname{arsh}2 - \operatorname{arch}3)$

b, $\sin(2\operatorname{arctg}5)$

c, $\cos(\operatorname{arctg}0{,}5 - \arcsin 0{,}7)$

d, $\sin(\operatorname{arch}1)$

e, $\operatorname{ch}(\ln 2)$

f, $\operatorname{th}(\operatorname{arsh}0{,}6 + \operatorname{arch}1{,}2)$

g, $\cos(\arcsin(-1/2))$

h, $\operatorname{sh}\left(\dfrac{\operatorname{arch}5}{2}\right)$

i, $\operatorname{ch}\left(\dfrac{\operatorname{arch}2{,}3}{2}\right)$

j, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2)$

k, $\arcsin x + \arccos x$

9.13. Az azonosságok felhasználásával hozza olyan alakra az alábbi kifejezéseket, amelyben nem szerepelnek trigonometrikus ill. hiperbolikus függvények,:

a, $\text{sh}\,(\ln x^2)$ b, $\cos\,(2\arcsin x)$ c, $\text{th}\,(2\,\text{arch}x)$

d, $\sin\,(\text{arctg}x - \arcsin x)$ e, $\text{sh}\,(\text{arth}x)$ f, $e^{\text{arth}x}$

g, $e^{\text{arch}x}$

9.14. Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket:

a, $\text{tg}\, x = \text{ctg}\, x$ b, $-\sin x = -\frac{1}{2}$ c, $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

d, $\sin^2\left(\frac{x-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ f, $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g, $\text{tg}\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ h, $\text{ctg}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ i, $\sin 2x = \cos x$

j, $\sin x = \cos x$

9.15. Határozza meg a következő függvények inverzét a megadott intervallumon:

a, $f(x) = 1 + \log_3(x + 2)$, $x \in]-2,\infty[$

b, $f(x) = \log_2 \frac{6}{2x+1}$, $x \in [-1/2,\infty[$

c, $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3}$, $x \in]0,\infty[$

d, $f(x) = \text{arch}\sqrt[3]{3x - 2}$, $x \in [1,\infty[$

e, $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$, $x \in [2,\infty[$

f, $f(x) = -\frac{1}{2}\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x^2\right)$, $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right[$

g, $f(x) = \text{th}\frac{3x-4}{5} + 3$, $x \in \mathbf{R}$

h, $f(x) = \ln\frac{3+x}{3-x}$, $x \in]-3,3[$

i, $f(x) = 3 - 10^x$, $x \in \mathbf{R}$

j, $f(x) = 2 \cdot \log_{0,5}(4x+6) - 8$, $x \in]-3/2,\infty[$

k, $f(x) = 6e^{\frac{2}{3x+5}} + 4$, $x \in]5,\infty[$

l, $f(x) = \text{arch}\sqrt{x - 1}$, $x \in [2,\infty[$

m, $f(x) = \frac{1}{2}\text{ch}(x^2 + 4)$, $x \in [0,\infty[$

n, $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}$, $x \in [-1/4,\infty[$

o, $f(x) = \arccos(0{,}5 - 2x) + 1$, $x \in \left[\frac{1}{4} - \frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\right]$

p, $f(x) = -\frac{1}{2}\text{arth}\frac{3}{2x-1} + 5$, $x \in [2,\infty[$

q, $f(x) = 3e^{3x+1}$, $x \in \mathbf{R}$

9.16. Határozza meg a következő polinomok zérushelyeit, előjelét és a határértékét a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben, továbbá a kapott eredmények felhasználásával vázolja a függvényeket ! (Egyes polinomoknál néhány gyök meg van adva, ezek a számolásban felhasználhatók):

polinom	ismert gyök(ök)
a, $P(x) = -3x^2 + 6x + 105$	
b, $P(x) = 4x^2 + 12x + 9$	
c, $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$	
d, $P(x) = -6x^5 + 36x^4 + 240x^3$	
e, $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$	
f, $P(x) = x^6 - 19x^3 - 216$	
g, $P(x) = -x^5 + 11x^4 + 22x^3 - 128x^2 + 96x$	$x_1 = 1,\ x_2 = 2$
h, $P(x) = x^4 + x^3 - 65x^2 - 9x + 504$	$x_1 = 3,\ x_2 = -3$
i, $P(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 16x + 5$	$x_1 = -5$
j, $P(x) = 3x^4 - 30x^3 - 32x^2 - 10x - 11$	
k, $P(x) = 2x^5 + 2x^4 - 75x^3 + 69x^2 + 37x - 35$	

9.17. Határozza meg a következő racionális törtfüggvények zéróhelyeit, szakadási helyeit és a határétéket a $(+\infty)$-ben, a $(-\infty)$-ben és a szakadási helyek jobb és bal oldalán, továbbá a kapott eredmények felhasználásával vázolja a függvényeket !

a, $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x - 3}$

b, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$

c, $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$

d, $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 - x^4}$

e, $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^3 + 8x^2}{x^2 - 2x}$

f, $f(x) = x \cdot \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1}$

g, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$

h, $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 8x^2}$

i, $f(x) = \dfrac{3x - 6}{x^2 - 6x + 9}$

j, $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{1 - x}$

k, $f(x) = \dfrac{4x^3 - 2x^2 - 30x}{x^3 - 9x}$