9. Függvények

9.18. A paraméterek mely értéke esetén folytonosak az alábbi függvények:

a,
$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{1+x^3}-\frac{1}{1+x}, & \text{ha} \quad x<-1\\ p, & \text{ha} \quad x=-1\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{|x|-1}, & \text{ha} \quad -1<x<1\end{cases}$$

b,
$$f(x)=\begin{cases}3x^2-1, & \text{ha} \quad x<0\\ cx+d, & \text{ha} \quad 0\le x\le 1\\ \sqrt{x+8}, & \text{ha} \quad x>1\end{cases}$$

c,
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}, & \text{ha} \quad x\ge -1, x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

d,
$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{ha} \quad x>-1, x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

e,
$$f(x)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin\frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

f,
$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\ln x, & \text{ha} \quad x>0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

g,
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{7x+2}-\sqrt{6x+4}}{x-2}, & \text{ha} \quad x\ge\frac{2}{7}, x\ne 2\\ p, & \text{ha} \quad x=2\end{cases}$$

h,
$$f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{ha} \quad x<0\\ p+x, & \text{ha} \quad x\ge 0\end{cases}$$

i,
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{tg}2x}{x}, & \text{ha} \quad x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

j,
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x^2}}, & \text{ha} \quad x\ne 0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

k,
$$f(x)=\begin{cases}x^x, & \text{ha} \quad x>0\\ p, & \text{ha} \quad x=0\end{cases}$$

9.19. Létezik-e az alábbi függvényeknek a megadott pontokban határértéke, bal oldali határértéke ill. jobb oldali határértéke? Ha létezik, adja is meg ezeket az értékeket! Folytonosak-e a függvények a megadott pontokban?

a,
$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{ha} \quad x<0\\ 0, & \text{ha} \quad x=0\\ 1, & \text{ha} \quad x>0\end{cases} \qquad x_1=-1,\; x_2=0,\; x_3=1$$

b,
$$f(x)=x^{|\mathrm{sgn}x|} \qquad x_1=-1,\; x_2=0,\; x_3=1$$

c,
$$f(x)=\frac{1}{0{,}5+\mathrm{sgn}(x+3)} \qquad x_1=-3,\; x_2=0,\; x_3=3$$

d,
$$f(x)=x^{\mathrm{sgn}x}, \qquad x_1=-1,\; x_2=0,\; x_3=1$$

e,
$$f(x)=[x] \qquad x_1=1,\; x_2=1{,}5$$

f,
$$f(x)=\frac{(x+1)^2(x+2)}{(x+1)(x+2)^2} \qquad x_1=-2,\; x_2=-1,\; x_3=0$$

g,

$$f(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x<-1 \\ 1, & \text{ha} \quad x=-1 \\ -2x, & \text{ha} \quad -1<x\le 0 \\ \sqrt{x}, & \text{ha} \quad 0<x<1 \\ \frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x\ge 1 \end{cases} \qquad x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=1,\ x_5=2$$

m,

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{ha} \quad x<0 \\ 1, & \text{ha} \quad x=1 \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{ha} \quad x>0 \end{cases} \qquad x_1=-\pi,\ x_2=0,\ x_3=\pi$$

h,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, & \text{ha} \quad x\ne 1 \\ 3, & \text{ha} \quad x=1 \end{cases} \qquad x_1=-2,\ x_2=1$$

n,

$$f(x)=\begin{cases} \log_{1/2} x, & \text{ha} \quad 0<x<1 \\ \log_2 x, & \text{ha} \quad 1\le x \end{cases} \qquad x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$$

i,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{(x^2+1)\mathrm{tg}x}{x^3+x}-\frac{x^2-x}{x^2+x}, & \text{ha} \quad x\ne 0 \\ 2, & \text{ha} \quad x=0 \end{cases}$$

$x_1=0$

o,

$$f(x)=\begin{cases} 7x-2, & \text{ha} \quad x\ge 2 \\ 3x+5, & \text{ha} \quad x<2 \end{cases} \qquad x_1=2$$

j,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & \text{ha} \quad x\ne 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x=0 \end{cases} \qquad x_1=0$$

p,

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{ha} \quad x\ge 2 \\ 2x-1, & \text{ha} \quad 1<x<2 \\ x-1, & \text{ha} \quad x\le 1 \end{cases} \qquad x_1=1,\ x_2=2$$

k,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x-2+x^2\mathrm{tg}x-x\mathrm{tg}x}{(x-1)\mathrm{tg}x}, & \text{ha} \quad x\ne 1 \\ 6, & \text{ha} \quad x=1 \end{cases} \qquad x_1=1$$

l, $$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-15+x^2\sin 3x-3x\sin 3x}{(x-3)\sin 3x}, & \text{ha} \quad x\ne 3 \\ 6, & \text{ha} \quad x=3 \end{cases}, \qquad x_1=3$$

9.20. Definiálja az alábbi függvényeket a megadott szakadási helyeken úgy, hogy ezeken a helyeken folytonossá váljanak, amennyiben ez lehetséges:

a, $f(x)=\frac{x}{|x|}$, x=0

b, $f(x)=\frac{x^2+x}{x}$, x=0

c, $f(x)=\begin{cases} \mathrm{tg}x, & \text{ha} \quad 0<x<\pi/2 \\ \mathrm{ctg}x, & \text{ha} \quad \pi/2<x<\pi \end{cases}$, x=$\frac{\pi}{2}$

d, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{|x|}}$, x=0

e, $f(x)=\begin{cases} \mathrm{tg}x, & \text{ha} \quad 0<x<\pi/4 \\ \mathrm{ctg}x, & \text{ha} \quad \pi/4<x<\pi/2 \end{cases}$, x=$\frac{\pi}{4}$

9.21. A $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ határérték ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+10}{4x^3+10x-2}$

b, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^3+x^2-x}{7x^3+15}$

c, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{x^3}$

d, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{-x+2}$

e, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x^3}{10x+x^2}$

f, $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4+10x^3-x^2+5}{x^3-3x^4+1}$

g, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$

h, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x-1}{10}$

i, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{x}{x^2-2x+3}\right)$

j, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4x^3}{3+6x^3}\cdot\frac{x}{2x+5}\right)$

k, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+\sqrt{x^4+x^2}+x}{-2x^2+4x-3}$

l, $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{2+\sqrt[3]{8x^5+1}}$

m, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x-1)^2+x^6}+2x^2}$

n, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[5]{x^4+6x+2}\right)$

o, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$

p, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

q, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

r, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

s, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x-1}-3x\right)$

t, $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$

u, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt[3]{2x}}$

ü, $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{x^3+6}}{\sqrt[3]{x^2+3x-2}}$

v, $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{5x-8x^4}{(x^2+2)(3x^2-5)}}$

w, $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^5(18x+17)^{15}}{(6x+5)^{20}}$

x, $\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^4-4}-x^2)}$

9.22. A $\lim_{x\to\infty}q^x=0$ (0<q<1) határérték ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}}{3^x+4^{x-1}}$

b, $\lim_{x\to\infty}\frac{10^x+10^2}{5^x+2^x+10^5}$

c, $\lim_{x\to\infty}\frac{3^{2x+5}-4\cdot5^{x+1}}{2^{1+3x}+9^{x+2}}$

d, $\lim_{x\to\infty}\frac{6\cdot7^x+7^{-x}}{9\cdot7^x-7^{-x}}$

9.23. A $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$ és a $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$ ($k\in\mathbf{R}$) határértékek ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

b, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3-x}$

c, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+5}\right)^{6x+7}$

d, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+7}\right)^{\frac{x}{2}+5}$

e, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4}{3x-6}\right)^{x+2}$

f, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+3}\right)^{x^2+5}$

g, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^3+7}$

h, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2-x+1}\right)^{3x+1}$

i, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x}{6x+1}\right)^{\frac{-2x+2}{4x}}$

j, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+x^2}{1+x^2}\right)^{x}$

k, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}\right)^{\sqrt{x}}$

l, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-1}+2}{\sqrt{x^3}}\right)^{x}$

9.24. Számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-5x^2+7x+1}{2x^2-9x-5}$

b, $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

c, $\lim_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x+2}$

d, $\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

e, $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-x^2+1}{x^4-10}$

f, $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$

g, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+10x-5}$

h, $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$

i, $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4-2x^2-3}$

j, $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{-x^2+2x+15}$

k, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x}}$

l, $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

m, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x^3}-1}{7x^3}$

n, $\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{2x}-2}$

o, $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{11x+3}-\sqrt{4x+17}}{x^2-5x+6}$

p, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

q, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

r, $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2+4x+8}}$

s, $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

t, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-4x^2}}{7x}$

9.25. A $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ határérték ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 4x}{x^2}$

b, $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}7x}{\mathrm{tg}9x}$

c, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x+\sin 3x}{x}$

d, $\lim_{x\to 0}\frac{3\mathrm{tg}x-3\sin x}{5x^3}$

e, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

f, $\lim_{x\to \pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$

g, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

h, $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{\cos 2x\cdot\sin^2 2x}$

i, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+2\sin x}{3x\cos x}$

j, $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}2x}{3x}$

k, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x+\sin x}}$

l, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}}{\sin x}$

m, $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{1-\left(\dfrac{\pi}{x}\right)^2}$

n, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$

o, $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x}$

p, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot \operatorname{tg}2x}{x^2}$

q, $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{1}{x}$

9.26. A $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ határérték ismeretében számítsa ki a következő határértékeket:

a, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

b, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\frac{x}{3}}-1}{4x}$

c, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{5^x-1}$

d, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{3x}-1}{3^{4x}-1}$

e, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-5^x}{2^x-4^x}$

f, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^x}{4^x-3^x}$

g, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{6^{5x}-1}$

h, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{2x-2}-4}{4x^2-8x}$

9.27. Számítsa ki a következő határértékeket:

1, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$

2, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+5x)$

3, $\lim\limits_{x\to \infty}x^2\sin\dfrac{1}{x}$

4, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{4\sin^2 x+4\sin x-3}$

5, $\lim\limits_{x\to 0}(2+\operatorname{tg}^2 x)^{3\operatorname{ctg}^2 x}$

6, $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$

7, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3 x}$

8, $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

9, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}{x-a}$

10, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

11, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

12, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

13, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}$

14, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

15, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

16, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

17, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{x^3-x}-\dfrac{e^{2x}-1}{2x^2+2x}$

18, $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$

19, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$

20, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2\pi x}{3x+1}\right)$

21, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$

22, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

23, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^4}$

24, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$

25, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

26, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

27, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

28, $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$

29, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

30, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

31, $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

32, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

33, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg}x\right)^{\operatorname{tg}2x}$

34, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$

35, $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-\ln x]$

36, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

37, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

38, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]$

39, $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$

40, $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}$