15. Többváltozós függvények differenciálszámítása

15.1. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények elsőrendű parciális derivált függvényeit és a gradiens függvényét, valamint ezek értékét a megadott pontban:

1, $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, $P_o=(1,1)$

2, $f(x,y)= \operatorname{arctg}(x/y)$, $P_o=(1,1)$

3, $f(x,y)= \cos(y^x)$, $P_o=(1,2\pi)$

4, $f(x,y)= \operatorname{tg}(x^2-2y)$, $P_o= (2,2)$

5, $f(x,y)= e^{xy}$, $P_o=(1,0)$

6, $f(x,y)= 2^{-x/y}$, $P_o=(0,1)$

7, $f(x,y) = \arcsin\frac{x-y}{x+y}$, $P_o=(1,1)$

8, $f(x,y)= x^2-6x^2y+y^3$, $P_o=(3,-2)$

15.2. Határozza meg az alábbi háromváltozós függvények elsőrendű parciális derivált függvényeit és a gradiens függvényét, valamint ezek értékét a megadott pontban:

1, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $P_o=(1,2,3)$

2, $f(x,y,z) = (xy)^z$, $P_o=(2,2,1)$

3, $f(x,y,z) = \sin(x+y+z)$, $P_o=(\pi,\pi,2\pi)$

4, $f(x,y,z) = \ln(xyz)$, $P_o=(3,2,-1)$

5, $f(x,y,z) = z^{xy}$, $P_o=(1,-1,1)$

6, $f(x,y,z) = \arccos\frac{z}{xy}$, $P_o=(1,1,2)$

15.3. Mely pontokban nullvektor az alábbi függvények gradiense:

1, $f(x,y)= 3x^2-4xy+2x+y^2+1$

2, $f(x,y,z)= 2x^2+y^2-z^2+2xy -3x+2y+z$

3, $f(x,y)= x^2+xy+2y^2 -5x+y+3$

15.4. Számítsa ki a parciális deriváltakat:

$f(x,y) = (x^2+3y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$ $\quad f_x'(4, 9) = ?$ $\quad f_y'(4, 9) = ?$

$f(x,y) = \frac{3x+y}{xy}$ $\quad f_{xx}''(1, 2) = ?$ $\quad f_{yy}''(2, 1) = ?$

15.5. Számítsa ki a parciális az f_{xx}'' és az f_{yy}'' derivált függvényeket az alábbi függvények esetén:

$f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$ $\quad f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$

$f(x, y) = \sin y \cdot \cos x$ $\quad f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$

15.6. Számítsa ki az $f(x, y, z) = \frac{yz}{x}$ függvény gradiensét alábbi helyeken

1, grad f(1, 1, –1) 2, grad f(–1, 1, 1) 3, grad f(1, –1, 1)

4, grad f(–1, 1, –1) 5, grad f(1, 2, 3)

15.7. Számítsa ki az $f(x,y,z,w) = \frac{1}{x+y+z+w}$ függvény gradiensét alábbi helyeken grad f(–2, –1, 0, 2)   grad f(–1, 0, 1, 2)

grad f(1, 2, 3, 4)   grad f(0, 1, 2, 3)

15.8. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények teljes differenciálját a megadott pontban és számítsa ki annak értékét a $(\Delta x,\Delta y)= (0.02,0.05)$ és a $(\Delta x,\Delta y)= (0.1,-0.1)$ eltérésekre:

1, $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $P_o= (4,1)$

2, $f(x,y) = x\cdot y\cdot \ln^2(x+y)$ $P_o= (1,1)$

3, $f(x,y)=x^2\arccos\dfrac{1}{xy}$ $P_o= (1/\pi,2/\pi)$

4, $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ $P_o= (4,2)$

5, $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ $P_o= (0,1)$

6, $f(x,y) = 2^{xy}$ $P_o= (2,1)$

7, $f(x,y) = \sin^2 x + x\cdot\cos y$ $P_o= (\pi/2,\pi/2)$

8, $f(x,y)= x^2-xy+2y^2$ $P_o= (2,-1)$

9, $f(x,y)=\dfrac{x+y}{xy}$ $P_o= (-1,-2)$

10, $f(x,y) = e^x\cdot\ln y$ $P_o= (0,1)$

15.9. Határozza meg az alábbi háromváltozós függvények teljes differenciálját és számítsa ki annak értékét a megadott pontban a $(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = (-0.02,0.01,0.02)$ és a $(\Delta x,\Delta y,\Delta z) = (0.1,0.05,-0.2)$ eltérésekre:

1, $f(x,y,z)= x^2y-xyz+z^3$ $P_o= (1,2,-1)$

2, $f(x,y,z)= 2xy^2z^3$ $P_o= (1,-1,2)$

3, $f(x,y,z)= e^{xyz}$ $P_o= (1,1,1)$

4, $f(x,y,z)= \sin\dfrac{xy}{z}$ $P_o= (\pi,1/2,1)$

5, $f(x,y,z)= \ln(x+y+z)$ $P_o= (-1,2,1)$

15.10. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények iránymenti differenciálhányadosának értékét a megadott pontban és irányban:

1, $f(x,y)=\dfrac{1}{\cos^2(x-y)}$ $P_0=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ $v=(-\sqrt{3},-1)$

2, $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ $P_0=\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ $v=(\sqrt{3},1)$

3, $f(x,y)=\lg\sqrt[3]{2xy+y^2}+y^x$ $P_o=(0,1)$ $v=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4, $f(x,y) = \cos\frac{\pi y}{x^2+y^2}$ $P_o=(2,2)$ $v=(1,1)$

5, $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+y^2}$ $P_o=(1,2)$ $v=(1,-\sqrt{3})$

6, $f(x,y) = \ln(x^2y) + \ln\frac{x^2}{y}$ $P_o=(\sqrt{2},\sqrt{2})$ $v=(-1,1)$

7, $f(x,y) = \sqrt{x^3y + xy^2}$ $P_o=(1,3)$ $v=(1,1)$

$f(x,y) = \sqrt{xy}\cdot e^{x+y}$ $P_0 = (1, 4)$ $v = (6, 8)$

15.11. Határozza meg az alábbi háromváltozós függvények iránymenti differenciálhányadosának értékét a megadott pontban és irányban:

1, $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ $P_o=(\pi,1/2,1/2)$, $v = (-1/3,2/3,2/3)$

2, $f(x,y,z) = 2^x yz$ $P_o=(1,-1,1)$ $v = (0,1-1)$

3, $f(x,y,z) = xe^{y^2}z$ $P_o=(2,1,0)$ $v = (1,-1,\sqrt{2})$

4, $f(x, y, z) = xy + yz$ $P_0 = (1, 2, 3)$ $v = (2, 4, 4)$

5, $f(x, y, z) = x^2y + y^2z$ $P_0 = (1, 2, 3)$ $v = (2, 4, 4)$

15.12. Határozza meg az f függvény érintősíkjának egyenletét az (x_0, y_0) helyen!

1, $f(x, y) = \frac{x+y}{x+2} + 2y$ $(x_0, y_0) = (2, 3)$

2, $f(x, y) = \frac{x+2}{x+y} + 2x$ $(x_0, y_0) = (3, 2)$

15.13. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények érintősíkjának és normális egyenesének egyenletét a megadott helyen:

1, $f(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x-y)}$ $P_0 = \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

2, $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ $P_0 = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$

3, $f(x,y) = \lg\sqrt[3]{2xy+y^2} + y^x$ $P_o=(0,1)$

4, $f(x,y) = \cos\frac{\pi y}{x^2+y^2}$ $P_o = (2,2)$

5, $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+y^2}$ $P_o = (1,2)$

6, $f(x,y) = \ln(x^2y) + \ln\frac{x^2}{y}$ $P_0 = \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

7, $f(x,y)=\sqrt{x^3y+xy^2}$ $\quad P_o=(1,3)$

8, $f(x,y) = \cos(x-2y)$ $\quad P_0=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$

15.14. Adja meg az alábbi kifejezések közelítő értékét egy megfelelően kiválasztott két- vagy háromváltozós függvényt egy megfelelően kiválasztott pontjában lineárisan közelítve:

1, $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$ $\quad$ 2, $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98}\sqrt[4]{1{,}05^3}}$ $\quad$ 3, $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$

4, $\sin 29^o\cdot \mathrm{tg} 46^o$ $\quad$ 5, $0{,}969^{1{,}05}$

15.15. Lineáris közelítés alkalmazásával oldja meg az alábbi problémákat:

1, Egy körhenger sugara 5cm±0.5mm, magassága 30cm±0,6mm. Milyen pontossággal számítható ezekből az adatokból a henger felszíne és térfogata?
2, Egy derékszögű háromszög két befogója 3m±2cm és 4m±1cm. . Milyen pontossággal számítható ezekből az adatokból a háromszög területe és kerülete?
3, Egy téglatest alakú tartály három élének hossza 1,5m±3cm , 2,8m±2cm , 4,2m±4cm. . Milyen pontossággal számítható ezekből az adatokból a tartály térfogata és felszíne?

15.16. Határozza meg a következő függvények lokális maximumainak helyét és értékét, ha létezik!

1, $f(x,y)=x^2+y^2-10x-6y+38$
2, $f(x,y)=-3x^3-3y^3+x+4y+1$
3, $f(x,y)=xy+\dfrac{10}{x}+\dfrac{4}{y}$
4, $f(x,y)=-x^2-y^2+8x+16y+33$

15.17. Határozza meg a következő függvények lokális minimumainak helyét és értékét, ha létezik!

1, $f(x,y)=x^2+y^2-10x-6y+38$
2, $f(x,y)=-3x^3-3y^3+x+4y+1$
3, $f(x,y)=xy+\dfrac{10}{x}+\dfrac{4}{y}$
4, $f(x,y)=x^2+y^2-8x-16y+33$

15.18. Határozza meg az f függvény összes helyi szélsőértékét! ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$)

1, $f(x,y,z)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y^2}{2x}+\dfrac{4z^2}{y}+\dfrac{1}{z}$

2, $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z}$

15.19. Határozza meg az alábbi függvények helyi szélsőértékeit:

1，$f(x,y)=x^2+(y-1)^2$

2，$f(x,y)=x^2-(y-1)^2$

3，$f(x,y)=(x-y+1)^2$

4，$f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$

5，$f(x,y)=x^2y^2(6-x-y)$

6，$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

7，$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$

8，$f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

9，$f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}\ (x>0,y>0)$

10，$f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$

11，$f(x,y)=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$

12，$f(x,y)=e^{x^2-y}(5-2x+y)$

13，$f(x,y)=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$

14，$f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

15，$f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$，　$(x>0,y>0)$

16，$f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$，　$\left(0\le x\le\frac{\pi}{2};0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$

17，$f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$，　$(0\le x\le\pi;0\le y\le\pi)$

18，$f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ ，　$x^2y^2\ne 0$

19，$f(x,y)=x+y+4\sin x\sin y$

20，$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$

21，$f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$

22，$f(x,y,z)=xy^2z^2(a-x-2y-3z)$，　$(a>0)$

23，$f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$　$(x>0,y>0,z>0)$

24，$f(x,y,z)=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b}$　$(x>0,y>0,z>0,a>0,b>0)$

25，$f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$　$(0\le x\le\pi;0\le y\le\pi;0\le z\le\pi)$

15.20. Oldja meg az alábbi geometriai szélsőérték-feladatokat:

1, Egy téglatest egy csúcsba összefutó élei hosszának összege 24. Mekkora élhosszak esetén lesz a téglatest térfogata maximális?
2, Egy r sugarú, m magasságú egyenes körkúpba írható téglatestek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata? (A téglatest egyik lapja a kúp alaplapjára illeszkedik)
3, Egy adott a pozitív számot bontsa fel n pozitív tényező szorzatára úgy, hogy a tényezők reciprokösszege minimális legyen.
4, Egy adott a pozitív számot bontsa fel n pozitív tag összegére úgy, hogy a tagok négyzetösszege minimális legyen.
5, Egy adott a pozitív számot bontsa fel n tényező szorzatára úgy, hogy a tényezők hatványösszege adott pozitív kitevők mellett a lehető legkisebb legyen.
6, Legyen a síkon adva n tömegpont: $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,.....,$P_n(x_n,y_n)$, amelyek tömege rendre $m_1,m_2,....,m_n$. A sík mely P(x,y) pontjára vonatkozóan lesz a rendszer tehetetlenségi nyomatéka a lehető legkisebb?
7, Egy felül nyitott, téglatest alakú kád térfogata adott V érték. Milyen méretek mellett lesz a kád felülete a lehető legkisebb?
8, Egy félhenger alakú, felül nyitott kád felszíne adott S érték. Milyen méretek esetén lesz a térfogat maximális?
9, Az $x^2+y^2+z^2=1$ gömbfelületen határozzuk meg azt a pontot, amelyre a tér adott n pontjától, az $M_i(x_i,y_i,z_i)$ (i=1,2,...,n) pontoktól mért távolságok négyzetösszege a lehető legkisebb.
10, Melyik az a téglalap, amelynek kerülete 2p, és amelyet valamelyik oldala körül megforgatva, a lehető legnagyobb térfogatú forgástestet kapjuk?
11, Határozzuk meg azt a háromszöget, amelynek kerülete 2p, és amelyet valamelyik oldala körül megforgatva, maximális térfogatú forgástestet kapunk.
12, Az R sugarú félgömbbe írjunk maximális térfogatú téglatestet.
13, Adott egyenes körkúpba írjunk lehető legnagyobb térfogatú téglatestet.
14, Az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ egyenletű ellipszoidba írjunk maximális térfogatú téglatestet.
15, Egy egyenes körkúp L hosszúságú alkotója α szöggel hajlik az alaplap síkjához. Írjunk be a kúpba maximális felszínű téglatestet.
16, A $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $z=c$ egyenletekkel megadott elliptikus paraboloidszeletbe írjuk be a lehető legnagyobb térfogatú téglatestet.
17, Legyen adva a síkon n darab pont: $P_i=(x_i,y_i)$, (i=1,2,....,n). Hogyan helyezkedik el az az $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ egyenletű egyenes, amelyre e pontok egyenestől mért távolságainak négyzetösszege a lehető legkisebb?

15.21. Határozza meg az alábbi függvények legkisebb és legnagyobb és értékét:

1, $f(x;y)=x-2y-3$, $(x;y)\in\{(x;y): x;y\in[0,1], x+y\le 1\}$

2, $f(x;y)=x^2+y^2-12x+16y$, $(x;y)\in\{(x;y): x^2+y^2\le 25\}$

3, $f(x;y)=x^2-xy+y^2$, $(x;y)\in\{(x;y): |x|+|y|\le 1\}$

4, $f(x;y,z)=x^2+2y^2+3z^2$, $(x;y,z)\in\{(x;y,z): x^2+y^2+z^2\le 100\}$

5, $f(x;y,z)=x+y+z$, $(x;y,z)\in\{(x;y,z): x^2+y^2\le z\le 1\}$

15.22. Határozza meg az f függvény feltételes helyi szélsőérték helyeit a megadott feltételek mellett:

függvény feltétel

1, $f(x,y)=xy$	$x+y=1$
2, $f(x,y)=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $(a>0,b>0)$	$x^2+y^2=1$
3, $f(x,y)=x^2+y^2$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $(a>0,b>0)$
4, $f(x,y)=x^2+12xy+2y^2$	$4x^2+y^2=25$
5, $f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$	$x-y=\frac{\pi}{4}$
6, $f(x,y,z)=x-2y+2z$	$x^2+y^2+z^2=1$
7, $f(x,y,z)=x^m y^n z^p$, $(x,y,z,m,n,p>0)$	$x+y+z=a$, $(a>0)$
8, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a>b>c>0)$
9, $f(x,y,z)=xy^2z^3$, $(x,y,z>0)$	$x+2y+3z=a$, $(a>0)$
10, $f(x,y,z)=xyz$	$x^2+y^2+z^2=1$; $x+y+z=0$
11, $f(x,y,z)=xy+yz$, $(x>0;y>0;z>0)$	$x^2+y^2=2$ és $y+z=2$
12, $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z$, $(x>0;y>0;z>0)$	$x+y+z=\frac{\pi}{2}$