17. Vektorértékű függvények differenciálszámítása

17.1. Határozza meg az alábbi $t \to (x(t),y(t))$ vektorértékű függvények (síkgörbék) esetén a $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{d^2t}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{d^2t}, \frac{dy}{dx}$ és a $\frac{d^2y}{d^2x}$ függvényeket és azok értékét a megadott pontokban:

a, $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}, \\ y(t) = \dfrac{2t}{t^2-1} \end{cases}$ $t_o=3$

b, $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases},$ $t_o=\dfrac{\pi}{3}$

c, $\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$

d, $\begin{cases} x(t) = \mathrm{ctgt} \\ y(t) = \mathrm{tg}^2 t \end{cases},$ $t_o=\dfrac{\pi}{4}$

e, $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2(1+\cos t)} \\ y(t) = \sqrt{1+\cos t} \end{cases}$

f, $\begin{cases} x(t) = \mathrm{arctg}\sqrt[4]{t} \\ y(t) = \ln\dfrac{1}{1+\sqrt{t}} \end{cases}$

g, $\begin{cases} x(t) = 2^{\sin t} \\ y(t) = \mathrm{tg}^2 t + \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

h, $\begin{cases} x(t) = e^{\mathrm{tgt}} \\ y(t) = \lg^2 t - e^2 \end{cases}$

i, $\begin{cases} x(t) = t^2 + t + 1 \\ y(t) = t^3 - t \end{cases},$ $t_o=1$

j, $\begin{cases} x(t) = t + \sqrt{t} \\ y(t) = \sqrt[3]{t+2} \end{cases},$ $t_o=2$

17.2. Határozza meg az alábbi $t \to (x(t),y(t),z(t))$ vektorértékű függvények (térgörbék) esetén a $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{d^2t}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{d^2t}, \frac{dz}{dt}$ és a $\frac{d^2z}{d^2t}$, függvényeket és azok értékét a megadott pontokban:

a, $\begin{cases} x(t) = t^2 \sin t \\ y(t) = 3e^{2t} \\ z(t) = \mathrm{arctg}\sqrt{t} \end{cases}$ $t_o=0$

b, $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1+t}{1-t} \\ y(t) = \mathrm{tg}5t \\ z(t) = \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ $t_o=0$

c, $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t+t^3} \\ y(t) = t \arcsin t \\ z(t) = -\mathrm{sh}\dfrac{1+t^2}{1+t} \end{cases}$ $t_o=1/2$

d, $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1+t} \\ y(t) = -\mathrm{arctg}2t \\ z(t) = (2t+3)^4 \end{cases}$ $t_o=1$

17.3. Határozza meg az alábbi $t \to (x(t),y(t))$ vektorértékű függvények (síkgörbék) megadott pontbeli érintővektorát, görbületét, érintési paramétereit, továbbá írja fel az érintő egyenes, a normális egyenes és a simulókör egyenletét:

a, $\begin{cases} x(t) = t^2 - 3t + 4 \\ y(t) = t^2 - 4t + 1 \end{cases},$ $t_o= 3$

b, $\begin{cases} x(t) = 2(t - \sin t) \\ y(t) = 2(1 - \cos t) \end{cases},$ $t_o= \pi/4$

c, $\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos 4t \end{cases},$ $t_o= \pi/12$

d, $\begin{cases} x(t) = 2\ln t \\ y(t) = 3t^2 - 2 \end{cases},$ $t_o=e$

17.4. Határozza meg az alábbi $t \to (x(t),y(t),z(t))$ vektorértékű függvények (térgörbék) megadott pontbeli érintővektorát, görbületét, torzióját, továbbá írja fel az érintő egyenletét:

a, $\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{t+1} \\ y(t)=\dfrac{t+1}{t} \\ z(t)=t^2 \end{cases}$ $t_o=1$

b, $\begin{cases} x(t)=t+3 \\ y(t)=t^2+1 \\ z(t)=t^2 \end{cases}$ $t_o=2$

c, $\begin{cases} x(t)=(t+1)^2 \\ y(t)=\dfrac{t}{t+1} \\ z(t)=\dfrac{t+1}{t} \end{cases}$ $t_o=1$

d, $\begin{cases} x(t)=3t^2 \\ y(t)=2t+3 \\ z(t)=3t^3 \end{cases}$ $t_o=-1$

e, $\begin{cases} x(t)=1-2t^2 \\ y(t)=t^2-2 \\ z(t)=\dfrac{1}{t} \end{cases}$ $t_o=-1$

f, $\begin{cases} x(t)=4\cos t \\ y(t)=2\sin t \\ z(t)=2t \end{cases}$ $t_o=\dfrac{\pi}{3}$

g, $\begin{cases} x(t)=\mathrm{cht} \\ y(t)=\mathrm{sht} \\ z(t)=t \end{cases}$ $t_o=0$

h, $\begin{cases} x(t)=\cos^2 t \\ y(t)=\sin^2 t \\ z(t)=\sin 2t \end{cases}$ $t_o=\dfrac{\pi}{6}$

i, $\begin{cases} x(t)=e^t \\ y(t)=e^{-t} \\ z(t)=t \end{cases}$ $t_o=0$

j, $\begin{cases} x(t)=3\sin t \\ y(t)=3\cos t \\ z(t)=4t \end{cases}$ $t_o=\dfrac{\pi}{6}$

17.5. Mely pontban párhuzamos a $t\to\left(\dfrac{1}{1+t},\dfrac{2}{2-t},\dfrac{3}{3+t}\right)$ térgörbe érintője a (-6,3-2) vektorral?

17.6. Mely pontban merőleges a $t\to\left(\dfrac{t^4}{4},\dfrac{t^3}{3},\dfrac{t^2}{2}\right)$ térgörbe érintője a (1,3,2) vektorra?

17.7. Mely pontban merőleges a $t\to(t^2+2,t^3,1-t)$ térgörbe érintője az (1,1,0) vektorra?

17.8. Mely pontban merőleges a $t\to(\sin t-t\cos t,\cos t+t\sin t,t^2+1)$ térgörbe érintője az (1,0,0) vektorra?

17.9. Mekkora szöget zárnak be egymással a $t\to(t^2+1,(t+1)^2,(t-1)^3)$ térgörbe $t_1=0$ és a $t_2=1$ paraméterű pontjaihoz tartozó érintői?

17.10. Mekkora szöget zárnak be egymással a $t\to(\sin t-t\cos t,\cos t+t\sin t,t+1)$ térgörbe $t_1=0$ és a $t_2=\dfrac{\pi}{2}$ paraméterű pontjaihoz tartozó érintői?

17.11. Határozza meg az alábbi $t\to(x(t),y(t),z(t))$ vektorértékű függvények (térgörbék) megadott pontbeli érintőjének, főnormálisának, binormálisának, érintősíkjának, normálsíkjának és rektifikáló síkjának egyenletét:

a, $\begin{cases} x(t)=t+3 \\ y(t)=\dfrac{t^3}{3} \\ z(t)=t^2-5 \end{cases}$ $t_o=1$

b, $\begin{cases} x(t)=t^3-2t^2 \\ y(t)=3t+2 \\ z(t)=t^2-5 \end{cases}$ $t_o=1$

c, $\begin{cases} x(t) = e^t \sin t \\ y(t) = e^t \cos t \\ z(t) = e^t \end{cases}$ $t_o=0$

d, $\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-t} \\ z(t) = t \end{cases}$ $t_o=0$

17.12. Igazolja, hogy a $t \to \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{t}{1+t}\right)$ görbe síkgörbe!

17.13. Adja meg az alábbi $t \to (x(t),y(t),z(t))$ vektorértékű függvények közelítő értékét a $\mathbf{t_1}$ és a $\mathbf{t_2}$ helyeken a függvényeket a legközelebbi egész koordinátájú helyen lineárisan közelítve:

a, $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{t+1}{t} \\ z(t) = t^2 \end{cases}$ $t_1=1.02$, $t_2=-3.1$

b, $\begin{cases} x(t) = (t+1)^2 \\ y(t) = \dfrac{t}{t+1} \\ z(t) = \dfrac{t+1}{t} \end{cases}$ $t_1=1.97$, $t_2=3.05$

c, $\begin{cases} x(t) = t+3 \\ y(t) = t^2+1 \\ z(t) = t^2 \end{cases}$ $t_1=0.02$, $t_2=-2.03$

d, $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t+3 \\ z(t) = 3t^3 \end{cases}$ $t_1=-0.999$, $t_2=0.98$

17.14. Határozza meg az alábbi $(x,y) \to (\mathbf{f}(x,y),\mathbf{g}(x,y),\mathbf{h}(x,y))$ függvények esetén a parciális deriváltakból álló $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$ mátrixot a megadott helyen:

a, $\begin{cases} f(x,y) = x^3 + xy \\ g(x,y) = \dfrac{xy}{x+5} \\ h(x,y) = y^2(x+y) \end{cases}$ $P_o=(1,-1)$

b, $\begin{cases} f(x,y) = 1 \\ g(x,y) = 1+x \\ h(x,y) = 1+x+y \end{cases}$ $P_o=(-2,3)$

c, $\begin{cases} f(x,y) = (x+3y)^4(x-y)^2 \\ g(x,y) = \dfrac{x}{y} \\ h(x,y) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ $P_o=(2,-1)$

d, $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{1}{xy} \\ g(x,y) = \dfrac{2y+1}{\sqrt{3+x^2}} \\ h(x,y) = (y+4)\sqrt{x-1} \end{cases}$ $P_o=(1,1)$

17.15. Adja meg az alábbi $(x,y) \to (\mathbf{f}(x,y),\mathbf{g}(x,y),\mathbf{h}(x,y))$ függvények által meghatározott felületek megadott pontbeli érintősíkjának egyenletét (P_o az értelmezési tartománybeli, Q_o felületi pontot jelöl)

a, $\begin{cases} f(x,y) = x^3 - 2y^2 \\ g(x,y) = xy^2 \\ h(x,y) = x^2y - x \end{cases}$ $P_o=(2,-1)$

b, $\begin{cases} f(x,y) = x^4 \\ g(x,y) = 3xy^2 \\ h(x,y) = y^3 \end{cases}$ $P_o=(2,1)$

c, $\begin{cases} f(x,y) = x\cos y \\ g(x,y) = x\sin y \\ h(x,y) = 3y \end{cases}$ $Q_o=(1,\sqrt{3},\pi)$

d, $\begin{cases} f(x,y) = x + y \\ g(x,y) = x^2 + y^2 \\ h(x,y) = x^3 + y^3 \end{cases}$ $Q_o=(2,2,2)$

17.16. Írja fel az alábbi (x,y)→(**f**(x,y),**g**(x,y),**h**(x,y)) függvények teljes differenciálját a megadott pontban és számítsa ki annak értékét a (dx,dy)=(0.2,-0,1) és a (dx,dy)=(0.01,0) eltérésre

a, $\begin{cases} f(x,y) = x^3 + xy \\ g(x,y) = \dfrac{xy}{x+5} \\ h(x,y) = y^2(x+y) \end{cases}$ $P_o=(1,-1)$

b, $\begin{cases} f(x,y) = 1 \\ g(x,y) = 1 + x \\ h(x,y) = 1 + x + y \end{cases}$ $P_o=(-2,3)$

c, $\begin{cases} f(x,y) = (x+3y)^4(x-y)^2 \\ g(x,y) = \dfrac{x}{y} \\ h(x,y) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ $P_o=(2,-1)$

d, $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{1}{xy} \\ g(x,y) = \dfrac{2y+1}{\sqrt{3+x^2}} \\ h(x,y) = (y+4)\sqrt{x-1} \end{cases}$ $P_o=(1,1)$

17.17. Határozza meg az alábbi (x,y,z)→(**f**(x,y,z),**g**(x,y,z),**h**(x,y,z)) vektormezők divergenciáját, rotációját és a parciális deriváltakból álló $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$ mátrixot a megadott pontban:

a, $\begin{cases} f(x,y,z) = x + y^2 + z^3 \\ g(x,y,z) = x^3 + y + z^2 \\ h(x,y,z) = x^2 + y^3 + z \end{cases}$ $P_o=(2,-1,-1)$

b, $\begin{cases} f(x,y,z) = 3x \\ g(x,y,z) = x - 2y \\ h(x,y,z) = z - x \end{cases}$ $P_o=(0,1,2)$

c, $\begin{cases} f(x,y,z) = e^{xy} \\ g(x,y,z) = e^{yz} \\ h(x,y,z) = e^{xz} \end{cases}$ $P_o=(1,1,1)$

d, $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 - y^2 \\ g(x,y,z) = y^2 - z^2 \\ h(x,y,z) = z^2 - x^2 \end{cases}$ $P_o=(3,2,-1)$

e, $\begin{cases} f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} \\ g(x,y,z) = \dfrac{y}{z} \\ h(x,y,z) = \dfrac{z}{x} \end{cases}$ $P_o=(1,1,1)$

f, $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^3 \\ g(x,y,z) = 3(4xy^2 - x) \\ h(x,y,z) = xyz^2 \end{cases}$ $P_o=(1,0,2)$

g, $\begin{cases} f(x,y,z) = 3x + 2y \\ g(x,y,z) = -(5x + z^2) \\ h(x,y,z) = x^2 + 6y \end{cases}$ $P_o=(2,2,1)$

h, $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2yz \\ g(x,y,z) = xy^2z \\ h(x,y,z) = xyz^2 \end{cases}$ $P_o=(1,1,1)$

i, $\begin{cases} f(x,y,z) = \ln\dfrac{yz}{x} \\ g(x,y,z) = \ln\dfrac{xz}{y} \\ h(x,y,z) = \ln\dfrac{xy}{z} \end{cases}$ $P_o=(1,3,2)$

j, $\begin{cases} f(x,y,z) = \mathrm{sh}^2 x \\ g(x,y,z) = \mathrm{ch} xy \\ h(x,y,z) = \ln yz \end{cases}$ $P_o=(1,2,1)$

k, $\begin{cases} f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ g(x,y,z) = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ h(x,y,z) = \dfrac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$ $P_o=(3,4,1)$

17.18. Vizsgálja meg, hogy forrás- ill. örvénymentesek-e az alábbi vektormezők:

a, $\begin{cases} f(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ g(x,y,z) = \dfrac{y}{x^2+y^2} \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$

b, $\begin{cases} f(x,y,z) = \dfrac{x}{yz} \\ g(x,y,z) = \dfrac{y}{xz} \\ h(x,y,z) = -\dfrac{(x+y)\ln x}{xy} \end{cases}$

c, $\begin{cases} f(x,y,z) = xy^2 \\ g(x,y,z) = x^2y \\ h(x,y,z) = -(x^2+y^2) \end{cases}$

d, $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2y + y^3 \\ g(x,y,z) = x^3 - xy^2 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$

e, $\begin{cases} f(x,y,z) = xy^2z^2 \\ g(x,y,z) = -y^2z^2e^x \\ h(x,y,z) = \dfrac{z^3}{3}e^{2x} \end{cases}$

f, $\begin{cases} f(x,y,z) = \sqrt{x} \\ g(x,y,z) = 2yz \\ h(x,y,z) = y^2+1 \end{cases}$

g, $\begin{cases} f(x,y,z) = yz \\ g(x,y,z) = xz \\ h(x,y,z) = xy + 2z \end{cases}$

17.19. Írja fel az alábbi (x,y,z)→(**f**(x,y,z),**g**(x,y,z),**h**(x,y,z)) vektormezők teljes differenciálját a megadott pontban és számítsa ki annak értékét a (dx,dy,dz) = (0.1,0.05,-0.2) eltérésre:

a, $\begin{cases} f(x,y,z) = x + y^2 + z^3 \\ g(x,y,z) = x^3 + y + z^2 \\ h(x,y,z) = x^2 + y^3 + z \end{cases}$ $P_o=(2,-1,-1)$

b, $\begin{cases} f(x,y,z) = 3x \\ g(x,y,z) = x - 2y \\ h(x,y,z) = z - x \end{cases}$ $P_o=(0,1,2)$

c, $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 - y^2 \\ g(x,y,z) = y^2 - z^2 \\ h(x,y,z) = z^2 - x^2 \end{cases}$ $P_o=(3,2,-1)$

d, $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 + y^3 \\ g(x,y,z) = 3(4xy^2 - x) \\ h(x,y,z) = xyz^2 \end{cases}$ $P_o=(1,0,2)$

e, $\begin{cases} f(x,y,z) = 3x + 2y \\ g(x,y,z) = -(5x + z^2) \\ h(x,y,z) = x^2 + 6y \end{cases}$ $P_o=(2,2,1)$

f, $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2yz \\ g(x,y,z) = xy^2z \\ h(x,y,z) = xyz^2 \end{cases}$ $P_o=(1,1,1)$