Gyakorló feladatok 1.

Gauss - Jordan elimináció, LU felbontás

KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozzuk meg az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét Gauss - Jordan módszerrel!

$\boxed{\textbf{Megoldás}}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az első sort leosztjuk 2 - vel.
A második sorhoz hozzáadjuk az első sor -2 - szeresét.
A harmadik sorhoz hozzáadjuk az első sor -3 - szorosát.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az első sorhoz hozzáadjuk a második sor -1/4 - szeresét.
A második sort leosztjuk -2 - vel.
A harmadik sorhoz hozzáadjuk a második sor -2 - szeresét.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Az első sorhoz hozzáadjuk a harmadik sor 1/4 - szeresét.
A második sorhoz hozzáadjuk a harmadik sor -1/2 - szeresét.
A harmadik sort leosztjuk -2 - vel.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 & -3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$\boxed{\textbf{Ellenőrzés}}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5/4 & -3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∎

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert Gauss - Jordan eliminációval:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Megoldás

1	2	-1	2
2	1	0	3
-1	1	2	4

A második sorhoz hozzáadjuk az első sor -2 - szeresét.
A harmadik sorhoz hozzáadjuk az első sort.

1	2	-1	2
0	-3	2	-1
0	3	1	6

Az első sorhoz hozzáadjuk a harmadik sort.
A második sorhoz hozzáadjuk a harmadik sor -2 - szeresét.

1	5	0	8
0	-9	0	-13
0	3	1	6

Az első sorhoz hozzáadjuk a második sor 5/9 - szeresét.
A második sort leosztjuk -9 - cel.
A harmadik sorhoz hozzáadjuk a második sor 1/3 - szorosát.

1	0	0	7/9
0	1	0	13/9
0	0	1	5/3

$\Longrightarrow$

$x_1 = 7/9$
$x_2 = 13/9$
$x_3 = 5/3$

Ellenőrzés

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7/9 \\ 13/9 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

■

3. Oldjuk meg LU felbontással a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 20 \\ 6x_1 & - & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 16 \end{array}$$

Megoldás

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Először hozzuk A - t LU alakra, ahol L alsó -, U feső $\triangle$ mátrix.
A első oszlopának elemeit osszuk le a_{11} - gyel, ezek lesznek az L mátrix első oszlopának elemei és L főátlója csupa 1 - esekből áll. Az U első sora megegyezik az A mátrix első sorával.

Tehát :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$L \cdot U = A \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & -1 & 2 \\ & & & 0 & u_{22} & u_{23} \\ & & & 0 & 0 & u_{33} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & l_{32} & 1 & 6 & -7 & 8 \end{array} \qquad \Longrightarrow$$

$$2 \cdot (-1) + 1 \cdot u_{22} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{u_{22} = 1}$$

$$3 \cdot (-1) + l_{32} \cdot 1 = -7 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{l_{32} = -4}$$

$$2 \cdot 2 + 1 \cdot u_{23} = 6 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{u_{23} = 2}$$

$$3 \cdot 2 + (-4) \cdot 2 + 1 \cdot u_{33} = 8 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{u_{33} = 10}$$

Tehát : $$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Az $LU\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert két lépésben oldjuk meg:

1. $L\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{b}}$

2. $U\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}$

1.

$$\begin{array}{ccc|c} & & & y_1 \\ & & & y_2 \\ & & & y_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 20 \\ 3 & -4 & 1 & 16 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \boxed{y_1 = 6} \\ 2 \cdot 6 + 1 \cdot y_2 = 20 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y_2 = 8} \\ 3 \cdot 6 + (-4) \cdot 8 + 1 \cdot y_3 = 16 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y_3 = 30} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad \underline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 30 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{array}{ccc|c} & & & x_1 \\ & & & x_2 \\ & & & x_3 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} 10 \cdot x_3 = 30 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_3 = 3} \\ 1 \cdot x_2 + 2 \cdot 3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_2 = 2} \\ 2 \cdot x_1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 30 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_1 = 1} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ellenőrzés

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

■

GYAKORLÓ FELADATOK

1. Határozzuk meg a következő mátrixok inverzét Gauss - Jordan módszerrel!

a.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

b.)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

c.)

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Hozzuk LU alakra a következő mátrixokat!

a.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

b.)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

c.)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

d.)

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e.)

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

f.)

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

g.)

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Oldjuk meg Gauss - Jordan eliminációval és LU felbontással a következő egyenletrendszereket!

a.)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

b.)

$$\begin{array}{rcrcrcl} -8x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 16 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 7 \end{array}$$

c.)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 33x_1 & + & 25x_2 & + & 23x_3 & = & 78 \\ 20x_1 & + & 17x_2 & + & 14x_3 & = & 51 \\ 25x_1 & + & 20x_2 & + & 17x_3 & = & 62 \end{array}$$

d.)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 5x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -4 \\ -x_1 & + & 10x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 12 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & = & 8 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 10x_4 & = & 34 \end{array}$$