LÁNG CSABÁNÉ

KOMBINATORIKA

Példák és megoldások

Lektorálta: Burcsi Péter

ELTE IK Budapest
2006-09-07
1. kiadás

Tartalomjegyzék

1. Elméleti összefoglalók, példák

1.1. Alapvető fogalmak

1.1.1. Permutáció

1.1-1. Hányféle sorrendje van az a, b, c betűknek?
Megoldás.
Hatféle, ezek:

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$$

■

Definíció. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tetszőleges n elemű halmaz, ahol $n \in \mathbb{N}$. Az n elem valamely sorrendben való felsorolása az A halmaz egy *permutációja.* Keressük az A halmaz összes permutációinak számát. Ezt a számot jelöljük P_n-nel.

•

A problémát másként is megfogalmazhatjuk. Legyen $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ az A halmaz egy permutációja.

Tekintsük a következő φ leképezést:

$$a_1 \to a_{i_1}$$
$$a_2 \to a_{i_2}$$
$$\vdots$$
$$a_n \to a_{i_n}$$

Ez A-nak önmagára történő bijektív leképezése.

Az összes ilyen leképezések halmaza legyen $S_n = \{\varphi|\varphi : A \to A, \text{bijektív}\}$. Ezzel a jelöléssel élve a keresett $P_n = |S_n|$.

Mivel a feladat szempontjából közömbös, hogy milyen elemekből áll az A halmaz, feltehetjük, hogy az első n természetes számot tartalmazza, tehát $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

Bevezetjük az $n!$ jelölést az első n természetes szám szorzatára, tehát

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Kényelmi szempontból megállapodunk abban, hogy $0! = 1$ legyen. Ezt a választásunkat indokolja az, hogy általában $n! = n \cdot (n-1)!$, és ha 0!-t is értelmezni akarjuk, akkor $1! = 0! \cdot 1 = 1$-nek teljesülnie kell.

n **elemű halmaz permutációinak száma** $P_n = n!$.

1.1.2. Variáció

1.1-2. Hányféle kétjegyű számot képezhetünk az 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha mindegyiket legfeljebb egyszer használhatjuk fel?
Megoldás. 12 ilyen szám létezik, ezek:

12	13	14
21	23	24
31	32	34
41	42	43

■

Definíció. Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz *k-ad osztályú variációinak* nevezzük az elemeiből képezhető k tagú, különböző elemekből álló sorozatokat. V_n^k jelölje az összes k-ad osztályú variáció számát.

•

n elemű halmaz k-adosztályú variációinak a száma:
ha $n < k$, akkor nyilván $V_n^k = 0$,
ha $n \geq k$, akkor

$$V_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1) \qquad (k \text{ tényezős szorzat})$$

1.1.3. Kombináció

1.1-3. Öt testvér közül alkalmanként hárman mennek szinházba bérlettel. Hányféleképpen fordulhat ez elő?
Megoldás. Jelöljék az 5 testvért az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek. A következő 10 lehetőség van arra, hogy hármat kiválasszanak maguk közül:

123	124	125
134	135	145
234	235	245
345		

■

Definíció. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz k elemet tartalmazó részhalmazait a halmaz *k-ad osztályú kombinációinak* nevezzük. A kombinációk számát C_n^k-val jelöljük.

•

Vezessük be az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

jelölést. Mivel $0! = 1$, ezért

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1, \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1,$$

ha $n < k$, akkor legyen $\binom{n}{k} = 0$

n elem k-adosztályú kombinációinak száma:
ha $n < k$, akkor $C_n^k = 0$
ha $n \geq k$, akkor

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

1.1.4. Ismétléses variáció

1.1-4. Hányféle kétjegyű számot képezhetünk az 1, 2, 3, 4 számjegyekből?
Megoldás. A korábbi feladattal ellentétben most nem kötöttük ki, hogy egy szám legfeljebb egyszer fordulhat elő. Felsoroljuk az összes 16-féle lehetőséget.

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

■

Definíció. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz *k-ad osztályú ismétléses variációinak* nevezzük a halmaz elemeiből készíthető k tagú sorozatokat, melyekben ugyanaz az elem többször is előfordulhat. $V_n^{k,i}$ jelölje az ilyen sorozatok számát.

•

n elemű halmaz k-adosztályú ismétléses variációinak a száma

$$V_n^{k,i} = n^k.$$

1.1.5. Ismétléses kombináció

1.1-5. 3-féle fagylaltból hányféleképpen választhatunk 3 gombócot?
Megoldás. A feladat megengedi azt is, hogy akár mind a három gombóc ugyanolyan fajtájú legyen. Ha 1, 2, 3 jelöli a fagylaltfajtákat, akkor a következő 10 lehetőségünk van.

111	112	113
122	123	133
222	223	233
333		

■

Definíció. n elem *k-ad osztályú ismétléses kombinációját* kapjuk, ha az n elem közül k elemet kiválasztunk, az elemek többször is kiválaszthatók, a sorrendre viszont nem vagyunk tekintettel. Az ilyen kombinációk számát $C_n^{k,i}$-vel jelöljük.

•

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz valamely k-ad osztályú ismétléses kombinációját is megadhatjuk úgy, hogy a k elemet tetszőleges sorrendben felsoroljuk, például növekvően. Így látható, hogy az ismétléses kombinációk száma az n elemből képezhető k elemű monoton növekvő (s nem szigorúan monoton növekvő) sorozatok számával egyezik meg.

n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak a száma:

$$C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^k$$

1.1.6. Ismétléses permutáció

1.1-6. Hányféleképpen tudunk 3 piros és 2 kék golyót sorba rakni?
Megoldás. Az összes lehetőség az alábbi 10-féle:

pppkk	*ppkpk*	*ppkkp*
pkppk	*pkpkp*	*pkkpp*
kpppk	*kppkp*	*kpkpp*
kkppp		

■

Definíció. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_r$ különböző elemek. Tekintsük az ezekből alkotható olyan sorozatokat, amelyekben az a_1 i_1-szer, a_2 i_2-ször, ..., a_r pedig i_r-szer fordul elő. Legyen $n = i_1 + i_2 + \ldots + i_r$. Az így kapott sorozatokat n elemű *ismétléses permutációknak* nevezzük.

•

Megengedjük az $i_k = 0$ esetet is. $P_n^{i_1, i_2 \cdots, i_r}$ fogja jelölni az ilyen sorozatok számát.

r különböző elem n, i_1, i_2, ..., i_r paraméterekkel megadott ismétléses permutációinak száma

$$P_n^{i_1, i_2, \ldots, i_r} = \frac{n!}{i_1! i_2! \cdots i_r!}$$

.

1.1.7. Összefoglaló táblázat

ismétlés nélküli	permutáció	$P_n = n!$
	variáció	$V_n^k = 0, \text{ ha } n < k$ $V_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1), \text{ ha } n \geq k$
	kombináció	$C_n^k = 0, \text{ ha } n < k$ $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}, \text{ ha } n \geq k$
ismétléses	variáció	$V_n^{k,i} = n^k.$
	kombináció	$C_n^{k,i} = C_{n+k-1}^k$
	permutáció	$P_n^{i_1,i_2,\ldots,i_r} = \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_r!}$

1.2. Skatulyaelv

1.2-1. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egész számhoz található olyan k pozitív egész szám, amelyre az $n \cdot k$ szorzat a tízes számrendszerben felírva csupa egyesből és nullából áll.
Megoldás.

Például $n = 2$ esetén $k = 5$ megfelel, mert $nk = 10$; $n = 3$ esetén $k = 37$ alkalmas szám, mert $3 \cdot 37 = 111$, választhatjuk azonban $k = 370$-et is, hiszen $3 \cdot 370 = 1110$.

Tekintsük azokat az $1, 2, 3, \ldots, n$ jegyű számokat, amelyek csupa egyesből állnak.

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 11 \quad a_3 = 111 \quad \ldots \quad a_n = 111\ldots1$$

Osszuk el őket sorban n-nel. Ha valamelyik osztható n-nel, akkor a kapott hányados a keresett k érték.

Ha egyik sem osztható n-nel, akkor a maradék az $1, 2, \ldots, n-1$ értékek közül kerül ki. Tehát az n különböző szám maradéka legfeljebb $n-1$ különböző érték lehet. A skatulya-elv szerint van (legalább) két szám, melyek maradéka azonos. Legyenek ezek az a_i és a_j számok. Legyen például $i > j$. Nézzük a különbségüket, $b = a_i - a_j$-t. Egyrészt b $i - j$ számú egyesből és j számú nullából áll, másrészt n-nel osztva nulla maradékot ad, tehát osztható n-nel. A b és az n hányadosa a keresett k érték. ∎

1.2-2. Mutassuk meg, hogy a $\pi, 2\pi, \ldots, 100\pi$ számok között van leg-

alább egy olyan, amelyik valamely egész számtól $\frac{1}{100}$ -nál kevésbé különbözik.
Megoldás.

A számegyenest tekerjük az 1 egység kerületű körvonalra. Ekkor az egész koordinátájú pontok a 0-ba kerülnek. Osszuk a körvonalat 100 egyenlő részre. Ha a 0 két oldalán lévő $\frac{1}{100}$ hosszúságú ívek valamelyikébe esik $k\pi$ koordinátájú pont, akkor ez a $k\pi$ egy egészhez $\frac{1}{100}$ -nál közelebb van. (Mivel π nem racionális, osztópontra nem kerülhet $k\pi$ koordinátájú pont.)

Tegyük fel, hogy nincs ilyen pont. Ekkor a 98 többi ív egyikébe legalább két pont kerül, például $m\pi$ és $s\pi$. Ebből $(s-m)\pi = s\pi - m\pi = p + t$, ahol p egész, és $-\frac{1}{100} < t < \frac{1}{100}$. Ez azt mutatja, hogy $(s-m)\pi$ mégis elég közel van egy egész számhoz, tehát mindenképpen kerül pont a 0 két oldalán lévő $\frac{1}{100}$ hosszúságú ívek valamelyikébe. ■

1.3. Permutáció, variáció, kombináció alkalmazása

1.3-3. A 90 számos lottószelvényen a 90 számból 5-öt kell megjelölni, és 5 számot húznak. A találatok száma a kihúzott, illetve a bejelölt számok halmazában az azonos elemek mennyisége.

Ha az összes lehetséges módon kitöltjük a 90 számos lottószelvényt, hány lesz közöttük

a. pontosan 5 találatos,
b. pontosan 4 találatos,
c. pontosan 3 találatos,
d. pontosan 2 találatos,
e. pontosan 1 találatos,
f. olyan, amelyen egyetlen találat sincs?

Megoldás.

a. 1.

b. Az 5 kihúzott szám közül 4-et $\binom{5}{4}$-féleképpen választhatunk ki, a 85 nem kihúzott számból $\binom{85}{1}$-féleképpen választhatunk egyet. Ezek a választások egymástól függetlenek, így a lehetőségek száma összeszorzódik. Az összes lehetőség száma $\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} = 425$.

c. $\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2} = 35\ 700$

d. $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} = 987\ 700$

e. $\binom{5}{1} \cdot \binom{85}{4} = 10\ 123\ 925$

f. $\binom{85}{5} = 32\ 801\ 517$

■

1.3-4.

a. Hány kilencjegyű szám képezhető az 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5 számjegyekből?

b. Hány kezdődik ezek közül 125-tel?

Megoldás.

a. A 9 számjegyet 9!-féleképpen permutálhatjuk, ez azonban nem lesz mind különböző megoldás. Ha a három 2-est egymás között permutáljuk, ami 3! lehetőség, ugyanazt a sorozatot adják. Hasonló a helyzet, ha a három darab 3-ast permutáljuk. Az összes lehetőség száma a következő (ismétléses permutáció):

$$\frac{9!}{3! \cdot 3!}$$

b. Lerakjuk a 125-öt a szám elejére, és azt számoljuk ki, hogy a 2, 2, 3, 4, 4, 4 számjegyekből hány hatjegyű szám képezhető:

$$\frac{6!}{2! \cdot 3!}$$

■

1.3-5.

Hány olyan hatjegyű szám van, amelyik 5-tel osztható?

Megoldás.

Az első helyre 9 számjegyet tehetünk, mert a 0 nem kerülhet a szám elejére. Az utolsó helyre a 0 és az 5-ös kerülhetnek. A közbülső négy hely mindegyikére a 10 számjegy bármelyike kerülhet. Ezek a választások egymástól függetlenek, tehát az összes lehetőség számát megkapjuk, ha az egyenkénti lehetőségeket összeszorozzuk:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 9 \cdot 10^4 \cdot 2 = 180\ 000$$

■

1.3-6.

a. Hány csupa különböző jegyből álló hatjegyű szám képezhető?

b. Ezek között a számok között hány olyan van, amelyikben pontosan négy páratlan számjegy fordul elő?

Megoldás.

a. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136\ 080$

b. A megfelelő esetek számát többféleképpen is kiszámíthatjuk.

1. *megoldás.*

Számoljuk ki először az összes eset számát, a nullával kezdődőeket is vegyük bele. $\binom{5}{4}$-féleképpen választhatjuk ki az 5 páratlan számjegyből a 4 párosat, $\binom{5}{2}$-féleképpen vehetjük ki az 5 páros számjegyből a szükséges 2 jegyet, és az így kapott 6 jegyet 6!-féleképpen permutálhatjuk. Ezek a választások egymástól függetlenek, tehát az esetek számát össze kell szoroznunk.

Most számoljuk ki azt, hogy az előzőekben hány olyan sorozat van, amelyik 0-val kezdődik. $\binom{5}{4}$-féleképpen választhatjuk ki az 5 páratlan számjegyből a szükséges 4-et, 4-féleképpen vehetjük ki a 0 mellé a másik páros számjegyet, és az így kapott 5 jegyet 5!-féleképpen permutálhatjuk. Ezek a választások egymástól függetlenek, tehát az esetek számát megint össze kell szoroznunk.

Az összes eset számából levonjuk a nullával kezdődőek számát:

$$\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot 6! - \binom{5}{4} \cdot 4 \cdot 5! = 5 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 6! - 5 \cdot 4 \cdot 5! = 5!(300 - 20) = 33\ 600$$

összes eset	$-$	nullával kezdődőek
$\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot 6!$	$-$	$\binom{5}{4} \cdot 4 \cdot 5!$

2. *megoldás.*

Most számoljuk ki azt, hogy hány számban van benne a 0, és adjuk hozzá azoknak a számát, amelyekben nincs benne a 0.

Nézzük először azt az esetet, amikor benne van a 0. A 4 páratlan számjegyet az 5 lehetséges közül $\binom{5}{4}$-féleképpen vehetjük ki, a 0 mellé a másik párosat 4-féleképpen, ebből a 6 számjegyből az első helyre 5-öt rakhatunk, mert a 0 nem kerülhet oda, a többi 5 helyre a maradék 5 jegyet 5!-féleképpen rendezhetjük el.

Nézzük most azt az esetet, amikor benne van a 0. A 4 páratlan számjegyet az 5 lehetséges közül $\binom{5}{4}$-féleképpen vehetjük ki, a 0-tól különböző 2 párosat

$\binom{4}{2}$-féleképpen választhatjuk, a kapott 6 jegyet 6!-féleképpen rendezhetjük el:

$$\binom{5}{4} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5! + \binom{5}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot 6! = 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5! + 5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 6! =$$

$$= 5!(100 + 180) = 33\ 600$$

benne van a 0	+	nincs benne a 0
$\binom{5}{4} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5!$	+	$\binom{5}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot 6!$

3. *megoldás.*

Az előzőekhez hasonló meggondolással számíthatjuk ki azoknak a számát, amelyekben az első helyen páratlan szám áll, és ezt hozzáadhatjuk azoknak a számához, amelyekben az első helyen páros szám áll.

első helyen páratlan szám áll	+	első helyen páros szám áll
$\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4 \cdot 5!$	+	$4 \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{4}{1} \cdot 5!$

■

1.3-7. Egy 28-as létszámú osztályban 4 jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen történhet ez, ha

a. a jutalmak egyenlők, és egy tanuló legfeljebb egy jutalmat kaphat;

b. a jutalmak egyenlők, és egy tanuló több jutalmat is kaphat;

c. a jutalmak különbözők, és egy tanuló legfeljebb egy jutalmat kaphat;

d. a jutalmak különbözők, és egy tanuló többet is kaphat?

Megoldás.

a. $\binom{28}{4}$

b. A válasz a következő ismétléses kombináció.

$$C_{28}^{4,i} = \binom{31}{4} = \frac{31!}{4!27!} = 31 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 7 = 31\ 465$$

Ez az érték kiszámolható másként is. Négy különböző tanuló $\binom{28}{4}$-féleképpen kaphat ajándékot. 3 különböző tanuló $3 \cdot \binom{28}{3}$-féleképpen kaphatja meg, 2 különböző tanuló $3 \cdot \binom{28}{2}$-féleképpen, egyetlen tanuló pedig 28-féleképpen kaphatja meg a négy ajándékot. Ezek az esetek kizárják egymást, így az összes lehetőség száma ezeknek az értékeknek az összege.

$$\binom{28}{4} + 3 \cdot \binom{28}{3} + 3 \cdot \binom{28}{2} + 28$$

c. $V_{28}^{4} = \frac{28!}{24!} = 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 491\ 400$

d. $V_{28}^{4,i} = 28^4 = 614\ 656$ ■

1.3-8. Egy hegy csúcsára 5 út vezet. Két ember felmegy és lejön. Hányféleképpen történhet ez, ha a két embert személy szerint nem különböztetjük meg, és

a. egy utat egy ember használhat legfeljebb egyszer;

b. egy út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban;

c. nincs semmi megszorítás az útra?

A d, e, f kérdések ugyanazok, mint az a, b, c, azzal a különbséggel, hogy most a két embert személy szerint megkülönböztetjük.

Megoldás.

	a két embert nem különböztetjük meg	a két embert megkülönböztetjük
egy utat egy ember használhat legfeljebb egyszer	a. $C_5^2 \cdot C_3^2 =$ $= \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30$	d. $V_5^2 \cdot V_3^2 =$ $= 120$
egy út kétszer is igénybe vehető, de csak különböző irányban	b. $(C_5^2)^2 =$ $= \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 100$	e. $(V_5^2)^2 =$ $= 400$
nincs semmi megszorítás az útra	c. $(C_5^{2,i})^2 =$ $= \binom{6}{2}^2 = 225$	f. $(V_5^{2,i})^2 =$ $= 625$

■

1.3-9. Képezzük az összes olyan hatjegyű számot, amelyikben az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek mindegyike szerepel. Mekkora az így nyert hatjegyű számok összege?

Megoldás.

1. *megoldás*

Írjuk fel képzeletben az összes ilyen számot egymás alá. Egy adott oszlopban pl. az 1-es 5! alkalommal szerepel (ahányféleképpen a többi 5 helyre a többi 5 elemet el lehet helyezni). Tehát ebben az oszlopban az 1-esek összege $5! \cdot 1$. Hasonlóan a 2-esek összege $5! \cdot 2$. Az összes szám összege ebben az oszlopban $5! \cdot (1+2+3+4+5+6)$. Ez azonban mindegyik oszlopra igaz, így – a helyi értéket is figyelembe véve – az összes oszlop összege

$$5! \cdot (1+2+3+4+5+6) \cdot (1+10+100+1\,000+10\,000+100\,000) =$$

$$= 5! \cdot (1+2+3+4+5+6) \cdot 111\,111 = 120 \cdot 21 \cdot 111\,111 = 279\,999\,720$$

2. *megoldás*

Nézzük a következő összeget:

$$123\,456$$

$$+654\,321$$

$$= 777\,777.$$

Ehhez hasonlóan a többi számot is tudjuk párosítani úgy, hogy két-két szám összege 777 777 legyen. Mivel 6! szám van, a párok száma $\frac{6!}{2}$, a párok összege pedig $\frac{6!}{2} \cdot 777\,777 = 279\,999\,720$ ∎

1.3-10. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyiknek a jegyei

a. szigorúan monoton nőnek (mindegyik számjegy nagyobb az előtte levőnél);

b. monoton nőnek (mindegyik számjegy nagyobb vagy egyenlő, mint az előtte levő);

c. szigorúan monoton csökkennek (mindegyik számjegy kisebb az előtte levőnél);

d. monoton csökkennek (mindegyik számjegy kisebb vagy egyenlő, mint az előtte levő)?

Megoldás.

a. A felhasználható számjegyek 1 és 9 között lehetnek (0-val nem kezdődhet a szám) tehát 9 szám közül választhatjuk ki azt az 5-öt, amelyiket felhasználunk. Ha azonban a 9 szám közül kiválasztunk 5-öt, azokat pontosan egyféleképpen tudjuk úgy elhelyezni, hogy szigorúan monoton növő sorozatot kapjunk. Tehát az ilyen számok száma annyi, ahányféleképpen 9 számból 5-öt kiválaszthatunk, vagyis $\binom{9}{5}$.

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 14 \cdot 9 = 126$$

b. Annyi az ilyen számok száma, ahányféleképpen 9 számjegyből 5-öt ismétléssel ki lehet választani:

$$C_9^{5,i} = C_{13}^5 = \binom{13}{5} = 1\ 287$$

c. Most a 0-t is felhasználhatjuk, tehát 10 számból kell 5-öt kiválasztani, melyeket pontosan egyféleképpen rakhatunk le szigorúan monoton csökkenő módon. Az ilyen számok száma tehát

$$\binom{10}{5} = 252.$$

d. A monoton csökkenő számok számát megkapjuk, ha kiszámítjuk azt, hogy 10 számból 5-öt hányféleképpen választhatunk ki ismétléssel, és ebből levonunk 1-et, mert a csupa nulla nem felel meg a feladat feltételeinek:

$$C_{10}^{5,i} - 1 = \binom{14}{5} - 1 = 2001$$

■

1.3-11. Hány ötjegyű számot képezhetünk a

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

számjegyekből, ha páros helyen páros, páratlan helyen páratlan számjegy áll, s egy elem

a. csak egyszer fordul elő?

b. többször is előfordulhat?

Megoldás.

a. Az 5 páros számjegyből kettőt kell kiválasztanunk, miközben a sorrend is számít, ezt V_5^2-féleképpen tehetjük meg (ismétlés nélküli variáció). A 4 páratlan számjegyből 3-at, a sorrendet is figyelembe véve V_4^3 féle módon választhatunk ki. A két választás egymástól független, így a lehetőségek száma összeszorzódik. A válasz:

$$V_5^2 \cdot V_4^3 = (5 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) = 20 \cdot 24 = 480$$

b. A megoldás hasonló az előzőhöz, de most, mivel ugyanaz a szám többször is előfordulhat, ismétléses variációt kell alkalmaznunk:

$$V_5^{2,i} \cdot V_4^{3,i} = 5^2 \cdot 4^3 = 20^2 \cdot 4 = 400 \cdot 4 = 1600$$

■

1.3-12. Hányféleképpen lehet tíz számot öt párba rendezni?
Megoldás.

1. *megoldás.* Rakjuk sorba a tíz számot, és az elsőt párosítsuk a másodikkal, a harmadikat a negyedikkel, stb. A tíz számot 10!-féleképpen tudjuk sorba rendezni, de mivel a párok egymás közötti sorrendje nem számít, ezt osztjuk 2^5-nel, valamint, mivel a párok egymáshoz viszonyított sorrendje sem számít, osztjuk 5!-sal. A keresett érték:

$$\frac{10!}{2^5 \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2^5} = 945$$

2. *megoldás.* Az egyik számot válasszuk ki a tíz közül. Ehhez párt 9-féleképpen választhatunk.

Most a többiből újra válasszunk ki egyet, ehhez párt 7-féleképpen választhatunk.

A maradékból megint kiválasztunk egyet, hozzá párt 5-féleképpen választhatunk.

A maradékból ismét kiválasztunk egyet, hozzá párt 3-féleképpen választhatunk.

A maradék kettő egymás párja lesz.

Ezek a lehetőségek összeszorzódnak, tehát a válasz:

$$9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 945.$$

■

1.3-13. Hányféleképpen lehet 100 rekeszben 30 golyót elhelyezni, ha minden rekeszben vagy pontosan 6 golyó van, vagy egy sem és

a. a golyók egyformák;

b. a golyók különbözők, és minden rekeszben figyelembe vesszük a golyók sorrendjét is;

c. a golyók különbözők, de nem vesszük figyelembe a golyók sorrendjét a rekeszeken belül?

Megoldás.

a. $\binom{100}{5}$

b. $\binom{100}{5} \cdot 30!$

c. $\binom{100}{5} \cdot 30! \cdot \frac{1}{6!^5}$ ■

1.3-14. Határozzuk meg, hogy hány metszéspontja van egy n oldalú konvex sokszög átlóinak. (Csak a sokszög belsejében levő metszéspontokat tekintjük.) Feltételezzük, hogy a sokszögnek nincs három olyan átlója, amelyiknek közös pontja lenne.
Megoldás. Az átlók végpontjai egyértelműen meghatározzák a metszéspontot. Az n csúcsból az egymást metsző átlók 4 végpontját

$$\binom{n}{4}$$

különböző módon lehet kiválasztani. ■

1.3-15. Ha az egymástól különböző elemek számát 2-vel megnöveljük, akkor a permutációk száma 90-szer nagyobb. Mekkora az elemek száma?
Megoldás. Jelölje az elemek számát n. Ekkor:

$$(n+2)! = n! \cdot 90$$

Ebből

$$(n+1)(n+2) = 90$$
$$n^2 + 3n + 2 - 90 = 0$$
$$n^2 + 3n - 88 = 0$$

Oldjuk meg ezt a másodfokú egyenletet.

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{9+352}}{2} = \frac{-3 \pm 19}{2}$$

Csak a pozitív megoldás jöhet most szóba, így

$$n = 8.$$

■

1.3-16. Hány zérus van 1 000! végén?
Megoldás. Képzeljük el 1 000! törzstényezős felbontását. Egy 2-es és egy 5-ös összeszorzásával 10-et kapunk, ami a végeredményben egy nullát eredményez. A kettesek száma több, mint az 5-ösök száma, tehát, ha az 5-ösöket

összeszámoljuk a törzstényezős felbontásban, akkor megkapjuk a nullák számát az 1 000! végén. Minden ötödik szám osztható öttel (számuk $\left[\frac{1000}{5}\right]$), tehát minden ötödik szám legalább eggyel növeli az 5-ösök számát. Minden 25-ödik szám osztható 25-tel számuk $\left[\frac{1000}{25}\right]$, tehát minden 25-ödik szám még fejenként eggyel növeli az 5-ösök számát. A 125-ödik számok (számuk $\left[\frac{1000}{125}\right]$) és a 625-ödik számok (számuk $\left[\frac{1000}{625}\right]$) szintén még egy-egy ötössel járulnak hozzá a végeredményhez. Tehát 1 000! végén a nullák száma:

$$\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{25}\right]+\left[\frac{1000}{125}\right]+\left[\frac{1000}{625}\right]=200+40+8+1=249$$

■

1.3-17. Osztható-e a

$$\frac{3400!}{(1700!)^2}$$

szám 1599-cel?

Megoldás. Nézzük 1599 törzstényezős felbontását:

$$\begin{array}{r|l} 1599 & 3 \\ \hline 533 & 13 \\ 41 & 41 \end{array}$$

Tehát $1599 = 3 \cdot 13 \cdot 41$.

Most vizsgáljuk meg, hogy 3400!-ban a 41 hányszor fordul elő tényezőként.

Minden 41-edik szám osztható 41-gyel, $\left[\frac{3400}{41}\right]$ ilyen szám van. Minden 41^2-edik szám osztható 41^2-nel, tehát ezek még egy-egy 41-es tényezővel gyarapítják 3400! törzstényezős felbontását. $41^3 > 3400$, ezért ezzel nem kell foglalkoznunk.

3400!-ban a 41

$$\left[\frac{3400}{41}\right]+\left[\frac{3400}{41^2}\right]=82+2=84$$

alkalommal fordul elő tényezőként.

Most azt nézzük meg, hogy 1700!-ban a 41 hányszor fordul elő tényezőként.

$$\left[\frac{1700}{41}\right]+\left[\frac{1700}{41^2}\right]=41+1=42$$

1700!-ban a 41 42-szer szerepel, $1700!^2$-ben pedig $2 \cdot 42 = 84$-szer.

Mivel a számlálóban és a nevezőben is ugyanannyiszor szerepel 41, egyszerűsítés után nem szerepel, tehát

$$\frac{3400!}{(1700!)^2}$$

nem osztható 41-gyel és így 1599-cel sem. ■

1.3-18. Hányféleképpen lehet 2 fekete, 3 fehér, 4 vörös golyót egy sorba rendezni úgy, hogy fekete golyó ne álljon fehér golyó mellett?

Megoldás. Helyezzük le a négy vörös golyót. Ezután rakjuk le közéjük (eléjük-utánuk) a 2 feketét. Ezt két különböző módon tehetjük meg.

I. A 2 fekete egymás mellett 5-féleképpen helyezhető el a vörösök közé. A 3 fehér a fennmaradó 4 helyre rakható ismétléssel, ezek száma

$$C_4^{3,i} = C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} = 20$$

Tehát összesen

$$5 \cdot 20 = 100$$

ilyen elhelyezés van.

II. Ha a 2 feketét nem rakjuk egymás mellé, akkor ezt

$$\binom{5}{2} = 10$$

féleképpen tehetjük meg. A 3 fehér a fennmaradó 3 helyre rakható ismétléssel, ezek száma

$$C_3^{3,i} = C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$$

Tehát összesen

$$10 \cdot 10 = 100$$

ilyen elhelyezés van. Az I. és a II. esetek száma összesen 200. ■

1.3-19. Valamely játékosnak a sakkversenyen a hetedik forduló után

5 pontja van. Hányféleképpen jöhetett létre ez az eredmény? (Nyerés 1 pont, döntetlen 0,5 pont, vereség 0 pont. A mérkőzések sorrendje is számít.)
Megoldás. Jelölje x a nyerések, y a döntetlenek és z a vesztések számát. A következő összefüggések állnak fenn:

$$0 \le x \le 7, \quad 0 \le y \le 7, \quad 0 \le z \le 7$$

$$x + y + z = 7$$

$$x + 0,5y + 0 \cdot z = 5$$

A nyerések, döntetlenek és vesztések eloszlása a hetedik forduló végére a következő lehet:

	x	y	z	megvalósulások száma
	5		2	$\binom{7}{2} = 21$
	4	2	1	$\binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2} = 105$
	3	4		$\binom{7}{3} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$
összesen				161

■

1.3-20. Hányféleképpen ülhet le négy házaspár egy kerek asztal mellé úgy, hogy
a. két nő ne kerüljön egymás mellé;
b. sem két házastárs, sem két nő nem ülhet egymás mellé?
Megoldás.
a. Az egyik nőt ültessük le (Nő1) a kerek asztal bármelyik székére. Ezzel keletkezik egy viszonyítási pont. A többi nőt a Nő1-hez képest minden második széket felhasználva 3!-féleképpen ültethetjük le. A köztük lévő 4 üres székre a 4 férfi 4!-féleképpen ülhet le. Az összes leültetés száma:

$$3! \cdot 4! = 6 \cdot 24 = 144$$

b. Megint kezdjük Nő1 leültetésével, és a többi nőt a Nő1-hez képest minden második széket felhasználva leültetjük (3!-féle lehetőség). Most ültessük le sorban a köztük lévő 4 üres székre a 4 férfit. Tegyük fel, hogy Nő1-től balra Nő2 ül. Közéjük csak Férfi3-t vagy Férfi4-et ültethetjük. Ültessük le először Férfi3-t. A többi férfi csak egyféleképpen ülhet le. (Próbáljuk ki rajzon!) Ha

Férfi4-et ültetjük Nő1 és Nő2 közé, akkor is ugyanez a helyzet. Tehát a nők közé a férfiakat most kétféleképpen ültethetjük le. Az összes leültetés száma:

$$3! \cdot 2 = 12$$

■

1.3-21. Nyolc labdarúgócsapat egyfordulós körmérkőzést játszik. Mennyi az egy mérkőzésre jutó gólátlag, ha az összes mérkőzésen együtt 42 gólt rúgtak?
Megoldás. Az összes mérkőzés száma:

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

A gólátlag:

$$\frac{42}{28} = 1.5$$

■

1.3-22. Hány tag van a következő kifejezések kifejtett alakjában?
a. $(x+y+z)^6$
b. $(a+2b+5c+d)^4$
c. $(r+s+t+u+v)^6$
Megoldás.
a.
1. *megoldás.* A kifejtett alakban a tagok $x^i y^j z^k$ alakúak, ahol $i+j+k=6$. Annyi ilyen tag van, ahányféleképpen 6-ot három csoportba lehet osztani (lehetnek üres csoportok is), tehát ahányféleképpen 7 helyre 2 elválasztó jelet el lehet úgy helyezni, hogy a jelek egymás mellé is kerülhetnek, a sorrendjük pedig nem számít. Ennek az értéke:

$$C_7^{2,i} = \binom{8}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

2. *megoldás.* Ugyanezt az értéket kapjuk, ha azt számoljuk ki, hogy hányféleképpen lehet a 3 csoportból 6-szor választani ismétléssel, s a sorrend most sem számít:

$$C_3^{6,i} = C_8^6 = \binom{8}{6} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

b.
1. *megoldás.*

$$C_5^{3,i} = C_7^3 = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$$

2. *megoldás.*

$$C_4^{4,i} = C_7^4 = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$$

c.
1. *megoldás.*

$$C_7^{4,i} = C_{10}^4 = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

2. *megoldás.*

$$C_5^{6,i} = C_{10}^6 = \binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

■

1.3-23.
a. Mi az $x^2y^3z^2$ kifejezés együtthatója az $(x+y+z)^7$ kifejtett alakjában?
b. Mi az $x^6y^3z^2$ kifejezés együtthatója az $(x-2y+5z)^{11}$ kifejtett alakjában?
Megoldás.
a.

$$\frac{7!}{2!3!2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 2} = 210$$

b.

$$(-2)^3 \cdot 5^2 \cdot \frac{11!}{6!3!2!} = -8 \cdot 25 \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -200 \cdot 4620 = -924\ 000$$

■

1.3-24. Hányféleképpen tudunk n azonos ajándékot elosztani r gyermek között

a. ha nincs semmi megkötés;

b. ha minden gyermeknek legalább egy ajándékot kell adnunk?

Megoldás.

a. Kiszámítjuk azt, hogy hányféleképpen lehet az n ajándékot legfeljebb r csoportba osztani, miközben lehet üres csoport, kaphat egy gyermek több ajándékot is, és a kiosztás sorrendje nem számít.

1. *megoldás.*

$n + 1$ helyre rakunk le $r - 1$ elválasztó vonalat ismétléssel:

$$C_{n+1}^{r-1,i} = C_{n+r-1}^{r-1} = \binom{n+r-1}{r-1}$$

2. *megoldás.*

r gyerekből választunk n-szer ismétléssel:

$$C_r^{n,i} = \binom{n+r-1}{n}$$

b. Az n ajándékot r csoportba osztjuk, üres csoport nem lehet, a sorrend nem számít.

1. *megoldás.* $n - 1$ helyre rakunk le $r - 1$ elválasztó vonalat:

$$C_{n-1}^{r-1} = \binom{n-1}{r-1}$$

2. *megoldás.* r darab ajándékot előre odaadunk, a többit úgy osztjuk el, hogy az r gyerek közül $n - r$-szer választunk ismétléssel.

$$C_r^{n-r,i} = C_{n-1}^{n-r} = \binom{n-1}{n-r}$$

■

1.3-25. Adott számú könyvből 4 könyvet 210-féleképpen lehet kiválasztani. Mennyi a könyvek száma?

Megoldás. Legyen a könyvek száma n. Az n könyvből 4-et $\binom{n}{4}$-féleképpen lehet kiválasztani, tehát

$$\binom{n}{4} = 210$$

Alakítsuk át ezt a kifejezést.

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = 210$$

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) = 24 \cdot 210$$
$$n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) = 5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$
$$(n^2-3n)\,(n^2-3n+2) = 5040 \qquad (*)$$

Legyen

$$x = n^2 - 3n \qquad (**)$$

Ekkor a (*) kifejezés a következő alakot ölti:

$$x(x+2) = 5040,$$

amiből

$$x^2 + 2x - 5040 = 0.$$

Oldjuk meg ezt az egyenletet.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5041}}{2} = -1 \pm 71$$

Esetünkben csak az $x = 70$ megoldás fogadható el. Helyettesítsük ezt az értéket (**)-ba.

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

Most ezt a másodfokú egyenletet oldjuk meg.

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{3 \pm 17}{2}$$

Csak a pozitív megoldást fogadhatjuk el, így

$$n = 10.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez valóban megoldás. ■

1.4. Relációk, elrendezések száma

1.4-26. Legyen n pozitív egész szám, és A legyen n-elemű halmaz. Az A halmazon nézzük a homogén binér relációkat.

a. Mennyi az összes reláció száma?

b. Hány szimmetrikus reláció van?

c. Hány olyan reláció van, amelyik egyszerre reflexív és szimmetrikus?

Megoldás.

a. A kérdést másként is megfogalmazhatjuk: Mennyi az n pontú olyan irányított gráfok száma, amelyekben nincsenek többszörös élek. (Hurokélek lehetnek.)

1. *megoldás.* Az $|A \times A| = n^2$ elemű halmaz összes részhalmazainak a száma a kérdés, ez pedig:

$$2^{n^2}$$

2. *megoldás.* Érdemes másként is kiszámolni ezt az értéket.

I. Először nézzük azt, hogy egy relációban hányféleképpen lehetnek az elemek önmagukkal relációban (aRa típusú elemek). Mindegyik elem esetében 2 lehetőség van,

1. nincs relációban önmagával,
2. relációban van önmagával.

Ez összesen 2^n lehetőség.

II. Most nézzük, hányféleképpen lehet két különböző elem egymással relációban (aRb típusú elemek). Egy adott a és b pár esetén az alábbi négy eset lehetséges:

1. nincsenek relációban,
2. aRb fennáll,
3. bRa fennáll,
4. aRb és bRa is fennáll.

Mivel $\binom{n}{2}$ pár van, az összes ilyen lehetőség száma: $4^{\binom{n}{2}}$.

Az I. és II. lehetőségek egymástól függetlenül valósulhatnak meg, így az összes reláció száma:

$$2^n \cdot 4^{\binom{n}{2}} = 2^n \cdot 2^{2\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{n^2}$$

b. Nézzük az összes szimmetrikus reláció (az összes irányítatlan, többszörös él nélküli gráf számát.)

I. aRa lehetőségeinek a száma 2^n. (Lásd az a. pontot.)

II. Most nézzük, hányféleképpen lehet két különböző elem egymással relációban ($a\mathrm{R}b$ típusú elemek). Egy adott a és b pár esetén most az alábbi két eset fordulhat:

1. nincsenek relációban,
2. relációban vannak (és ekkor $a\mathrm{R}b$ és $b\mathrm{R}a$ is fennáll).

Ezek száma összesen $2^{\binom{n}{2}}$.

Az I. és II. lehetőségek egymástól függetlenül valósulhatnak meg, így az összes reláció száma:

$$2^n \cdot 2^{\binom{n}{2}} = 2^{n+\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

c.

$$2^{\binom{n}{2}}$$

■

1.4-27. Az állatszelidítő 5 oroszlánt és 4 tigrist akar kivezetni a porondra, de két tigris nem jöhet egymás után.

a. Hányféleképpen állíthatja sorba az állatokat?

b. Hányféleképpen állíthat sorba n oroszlánt és k tigrist?

Az oroszlánok egymás közötti sorrendje is számít, és a tigriseké is, hiszen az állatoknak is van személyiségük.

Megoldás.

a. Először az 5 oroszlánt kell sorba állítani – tegyük fel, hogy hagyják –, ez $P_5 = 5!$-féle lehetőség. Ezután a tigrisek 6 helyre kerülhetnek, a 6 helyből kell számukra 4-et kiválasztani, miközben a sorrend is számít. Ez $V_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ lehetőség. Az oroszlánok egymás közötti elhelyezkedése, és a tigrisek egymás közötti elhelyezkedése független egymástól, így az előbbi két értéket össze kell szoroznunk. Összesen tehát

$$P_5 \cdot V_6^4 = 5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120 \cdot 360 = 43200$$

féle módon állhatnak az állatok sorban.

b. n oroszlán és k tigris esetén akkor van egyáltalán lehetőség az állatok sorba állítására, ha $k \leq n+1$. Ekkor összesen

$$P_n \cdot V_{n+1}^k = n! \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}$$

lehetőség van. ■

1.4-28. Hányféleképpen lehet sorba rendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?
Megoldás.

1. *megoldás.*

Először helyezzük el az n nullát. Ekkor a k egyes számára $n+1$ hely van. Az $n+1$ helyből kell k darabot kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít. Ennek a száma:

$$C_{n+1}^{k} = \binom{n+1}{k}$$

2. *megoldás.*

Először a k egyes közé lerakunk $(k-1)$ nullát, majd a többi $n-k+1$ nullát $k+1$ helyre lerakjuk ismétléssel:

$$C_{k+1}^{n-k+1,i} = C_{k+1+n-k+1-1}^{n-k+1} = C_{n+1}^{n-k+1} = \binom{n+1}{n-k+1} = \binom{n+1}{k}$$

■

1.4-29.

a. A könyvespolcon 12 különböző könyv áll. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani 5-öt úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?

b. Hányféleképpen lehet n könyv közül k darabot kiválasztani úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?
Megoldás.

a. Alkalmazzuk az előző feladat eredményét. A kiválasztott könyvhöz 1-est rendelünk, a többihez 0-t, és két 1-es nem lehet egymás mellett. Tehát 5 db 1-est és 7 db 0-t kell elhelyeznünk az adott módon. A keresett érték:

$$\binom{8}{5} = 56$$

b. Akkor lehet n könyv közül k darabot az adott módon kiválasztani, ha:

$$k \leq n-k+1,$$

vagyis

$$2k-1 \leq n.$$

Ekkor a keresett érték:

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

■

1.4-30.

a. Artúr király kerekasztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük hadilábon áll a szomszédaival. Öt lovagot kell kiválasztani, akik kiszabadítják az elvarázsolt hercegnőt.

Hányféleképpen tehetjük meg ezt úgy, hogy ne legyenek ellenségek az öt lovag között?

b. Ha a kerekasztal körül n lovag ül, hányféleképpen választhatunk ki közülük k lovagot, akik között nincsenek szomszédok?

Megoldás.

a. Visszavezetjük a feladatot az előző előttire. A kerekasztal körül viszonyítási pontot választunk, mépedig Sir Lancelotot. Kétféle helyzetet vizsgálunk meg. Az egyikben Sir Lancelot is a kiválasztott lovagok között van, a másikban nincs.

I. Ha Sir Lancelot a kiválasztott lovagok között van, akkor még további 4 lovagot kell választanunk 9 közül (Sir Lancelot két szomszédja nem választható). Az 5 nem választott lovaghoz rendeljük a 0-t, a 4 választotthoz az 1-et. Az esetek száma:

$$\binom{6}{4}$$

II. Ha Sir Lancelot nincs a kiválasztott lovagok között, akkor 5 lovagot kell választanunk 11 közül. A 6 nem választott lovaghoz rendeljük a 0-t, az 5 választotthoz az 1-et. Az esetek száma:

$$\binom{7}{5}$$

Az összes lehetőség számát megkapjuk, ha az egymást kizáró I. és II. esetek számát összeadjuk:

$$\binom{6}{4}+\binom{7}{5}=15+21=36$$

b. Válasszunk most n lovag közül k nem szomszédos lovagot. Csak akkor tudunk a feltételnek megfelelően k lovagot kiválasztani, ha

$$2k \leq n.$$

I. Ha Sir Lancelot köztük van, akkor még $n-3$ lovag közül kell $k-1$-et választanunk, a nem választott $n-k-2$ lovaghoz rendelünk 0-t, a kiválasztott $k-1$ lovaghoz pedig 1-t. A lehetőségek száma:

$$\binom{n-k-1}{k-1}$$

II. Ha Sir Lancelot nincs köztük, akkor $n-1$ lovag közül kell k lovagot választanunk. A nem választott $n-k-1$ lovaghoz rendelünk 0-t, a kiválasztott k lovaghoz 1-et. A lehetőségek száma:

$$\binom{n-k}{k}$$

Az összes lehetőség számát megkapjuk, ha az egymást kizáró I. és II. esetek számát összeadjuk:

$$\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} = \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}\left(\frac{k}{n-k}+1\right) = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

■

1.5. Bolyongás, számok felbontása, leképezések száma

1.5-31. Bolyongás. Egy szöcske ugrál a számegyenes mentén, egy ugrása 1 egység. Ezt vagy jobbra, vagy balra teszi meg.

a. Hányféleképpen juthat el a 0 pontból a $+8$ pontba, ha 18-at ugrik?

b. Az origóból induló szöcske n ugrás után hányféleképpen juthat el a számegyenes $k \geq 0$ pontjába?

Megoldás.

a. Ha a szöcskének a $+8$-as pontba kell eljutnia, akkor az ugrások közül 8 jobbra ugrás, a többi fele (5) jobbra, fele (szintén 5) balra ugrás. A kérdés az, hogy az összesen 13 jobbra ugrást hányféleképpen lehet kiválasztani a 18 ugrásból. Erre a válasz:

$$\binom{18}{13}$$

De a kérdést feltehetjük úgy is, hogy az 5 balra ugrást hányféleképpen lehet kiválasztani a 18 ugrásból. Erre a válasz

$$\binom{18}{5},$$

ami megegyezik az előzővel.

b. Nyilván $k \leq n$, valamint n és k azonos paritású kell legyen ahhoz, hogy a szöcske meg tudja oldani a feladatot. Most a jobbra ugrások száma:

$$k + \frac{n-k}{2},$$

a balraugrások száma pedig:

$$\frac{n-k}{2}.$$

Az összes lehetőség száma:

$$\binom{n}{k + \frac{n-k}{2}} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

■

1.5-32. Hányféleképpen lehet 100-at három pozitív egész összeadandó összegére felbontani, ha az egymástól csupán az összeadandók sorrendjében eltérő megoldásokat

a. különbözőnek tekintjük;

b. nem tekintjük különbözőnek?

Megoldás.

a. A 100-at jelenítsük meg 100 golyóval, és a köztük lévő 99 hely közül kettőre helyezzünk 2 választóvonalat. Az első választóvonal előtti golyók száma adja az első összeadandót, az első és második választóvonal közöttiek száma a másodikat, és a második választóvonal utániak száma szolgáltatja a harmadik összeadandót. A kérdés az, hogy 99 helyből hányféleképpen választhatunk kettőt a választóvonalak számára (a sorrend nem számít). A válasz:

$$\binom{99}{2} = \frac{99 \cdot 98}{2} = 99 \cdot 49 = 4851$$

b. Az a. pontban összeszámolt felbontások között például az $1 + 2 + 97$ előfordul $2 + 1 + 97$ alakban is, stb., összesen 3!=6 különböző sorrendben. Az ilyen felbontások esetén most a 6 közül csak egy alakra van szükségünk. Az ilyen típusú felbontások (tehát amikor mindhárom összeadandó különbözik) száma legyen u.

Az 1+1+98 felbontás az a. pontban 3-szor lett összeszámolva, mert 3 különböző sorrendben írhatjuk ezeket a számokat. Az ilyen típusú felbontások (tehát amikor két összeadandó azonos, a 3. különbözik tőlük) száma legyen v. Ez az érték annyi, ahány páros szám van 2-től 98-ig, tehát $v = 49$.

Az a. pont eredményét felhasználva

$$6u + 3v = 99 \cdot 49$$

Ebből

$$u = \frac{99 \cdot 49 - 3 \cdot 49}{6} = 49 \cdot \frac{96}{6} = 49 \cdot 16 = 784.$$

Nekünk az $u + v$ értékére van szükségünk, ami

$$u + v = 49 \cdot 16 + 49 = 49 \cdot 17 = 833$$

■

1.5-33. Hány megoldása van az $|x| + |y| < 100$ egyenlőtlenségnek, ha x, y egészek?

Megoldás.

x lehetséges értékei	y számára ennyi lehetőség van
0	$99 \cdot 2 + 1$
± 1	$98 \cdot 2 + 1$
± 2	$97 \cdot 2 + 1$
$\vdots$	$\vdots$
± 98	$1 \cdot 2 + 1$
± 99	$1 \quad (y = 0)$

Összesen tehát

$$99 \cdot 2 + 1 + 4 \cdot \frac{99 \cdot 98}{2} + 2 \cdot 99 = 99(2 + 2 \cdot 98 + 2) + 1 = 99 \cdot 200 + 1 = 19\ 801$$

megoldás van. ∎

1.5-34. Hányféleképpen lehet az egymilliót három pozitív egész tényező szorzatára bontani, ha az egymástól csak a tényezők sorrendjében különböző megoldásokat

a. különbözőknek tekintjük;

b. nem tekintjük különbözőknek? (Szorzótényező az 1 is lehet.)

Megoldás.

a. Most számoljuk ki az összes eset számát, azokét, amelyekben a tényezők sorrendjében különböző megoldásokat is különbözőknek tekintjük.

Nézzük egymillió törzstényezős felbontását:

$$10^6 = 2^6 \cdot 5^6$$

Először a 6 darab 2-es tényezőt osztjuk minden lehetséges módon három csoportba, majd ugyanezt tesszük a 6 darab 5-ös tényezővel is.

A 6 darab 2-es tényezőt rakjuk egymás mellé, és az így keletkező 7 helyre (mindegyik előtt és a 6. után), valahova lerakunk 2 pálcikát, akár mindkettőt ugyanarra a helyre. Ez a két pálcika kijelöl 3 csoportot (az első előttiek, a kettő közöttiek és a második utániak), lehet üres csoport is. Ahány 2-es van egy-egy csoportban, annyi fog a megfelelő tényezőbe kerülni, az üres csoport az egyes szorzótényezőt jelenti. A 7 helyre 2 pálcikát

$$C_7^{2,i} = \binom{8}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

féle módon rakhatok le, mivel ugyanarra a helyre kerülhet mind a kettő, és a sorrend nem számít.

Ugyanerre az eredményre juthatunk az alábbi meggondolással is. Kiszámoljuk azt, hogy hányféle módon tudunk a három helyből 6-szor ismétléssel választani:

$$C_3^{6,i} = \binom{8}{6} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

A 6 darab 5-ös tényező felosztása az előbbitől függetlenül ugyanígy 28 eset, az összes eset száma:

$$28 \cdot 28 = 784$$

b. Most számoljuk ki azon esetek számát, amelyekben csupán a tényezők sorrendjében különböző megoldásokat nem tekintjük különbözőknek.

Legyen u azoknak a száma, amelyekben 3 különböző szorzótényező van. Ezek az előbbi pontban $3! = 6$-szor lettek figyelembe véve.

Legyen v azoknak a száma, amelyekben 2 azonos szorzótényező van, a harmadik más. Ezek az előbbi pontban 3-szor szerepelnek.

Legyen z azoknak a száma, amelyekben 3 azonos szorzótényező van. Ilyen összesen egy van ($z = 1$). Az előbbi pontban ez egyszer lett figyelembe véve.

Számoljuk ki a v értékét. Az ilyen számokban a két azonostól különböző harmadik tényezőben a 2 és az 5 kitevője páros, ezek $(2^{2i} \cdot 5^{2j})$ alakúak. Szerepel benne a $2^0,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^6$ valamelyike, ez 4 lehetőség, és szerepel benne az $5^0, 5^2, 5^4, 5^6$ valamelyike is, ami szintén 4 lehetőség. A két érték szorzatából le kell vonnunk 1-et, mert az ennek megfelelő szám, amikor mindhárom tényező egyforma, a z értékében lett figyelembe véve. Tehát:

$$v = 4 \cdot 4 - 1 = 15$$

Az a. pontban, ezek a számok a következő módon jelentkeznek:

$$6u + 3v + z = 784$$

Ebből:

$$u = \frac{784 - 3 \cdot v - z}{6} = \frac{784 - 3 \cdot 15 - 1}{6} = 123$$

A keresett szám, ahányféleképpen egymilliót 3 tényezőre bonthatjuk úgy, hogy a csupán a tényezők sorrendjében különböző megoldásokat nem tekintjük különbözőknek:

$$u + v + z = 123 + 15 + 1 = 139$$

■

1.5-35.

a. Tegyük fel, hogy $|A| = n$ és $|B| = k$. Hány $A \to B$ függvény van?

b. Tegyük fel, hogy $|A| = |B| = n$. Hány $A \to B$ bijekció van?

c. Tegyük fel, hogy $|A| = n$ és $|B| = k$. Hány $A \to B$ injekció van?

d. Hány szigorúan monoton növő $\{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ függvény van?

Megoldás.

a. A minden egyes eleméhez B bármelyik elemét rendelhetjük a k elem közül. Ezek a hozzárendelések egymástól függetlenek, tehát a lehetőségek számai összeszorzódnak. Az összes hozzárendelés száma:

$$k \cdot k \cdot \ldots \cdot k = k^n$$

b. A elemeit rendezzük valamilyen sorba, és ne változtassunk ezen a sorrenden. B elemeit is rendezzük tetszőleges módon sorba. A és B megfelelő elemeit rendeljük egymáshoz, (A első eleméhez B első elemét, A második eleméhez B második elemét, stb.). Így kapunk egy bijekciót. Most B elemeinek vegyük egy másik sorrendjét, és megint rendeljük egymáshoz A és B megfelelő elemeit. Annyi bijekciót kapunk, ahány sorrendje van B elemeinek, tehát:

$$n!$$

c. Ha $n > k$, akkor nulla az injekciók száma. Legyen most $n \leq k$, és A elemeit rendezzük valamilyen sorba. A első eleméhez B bármelyik elemét rendelhetjük, ez k lehetőség. A második eleméhez nem rendelhetjük azt az elemet, amit az előbb felhasználtunk. Marad $k - 1$ lehetőség. A harmadik eleméhez már csak $k - 2$ elemet rendelhetünk, stb. A lehetőségek számai összeszorzódnak, s így az összes injekció száma:

$$k(k-1)\cdots(k-n+1) = V_k^n = \frac{k!}{(k-n)!}$$

d. B elemei közül válasszunk ki k darabot, és A elemeihez rendeljük hozzá ezeket szigorúan növekvő módon. Annyi ilyen függvény van, ahányféleképpen B elemei közül k darabot ki lehet választani:

$$\binom{n}{k}$$

■

1.5-36.

Hány olyan hatjegyű számsorozat van, amelyikben van valahol egymás mellett két azonos számjegy (0-9-ig bármi)?

Megoldás.

1. *megoldás.* Az összes hatjegyű számsorozat száma:

$$10^6$$

Azoknak a száma, amelyek nem felelnek meg, amelyekben tehát egymás mellett sehol sincs két azonos számjegy:

$$10 \cdot 9^5$$

Az első értékből vonjuk le a másodikat, így megkapjuk a keresett értéket:

$$10^6 - 10 \cdot 9^5 = 409\ 510$$

2. *megoldás.* (Németh László rimaszombati, valamikori ELTE-s hallgató megoldása.)

A feladatot logikai szita módszerrel oldjuk meg.

Képzeljük el az összes, a feltételeknek megfelelő számot, és ha két szomszédos számjegy megegyezik, akkor rakjunk közéjük egyenlőségjelet. Például $0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0$ esetén $0 = 0 = 0 = 0 = 0 = 0$. Van olyan szám, amelyikben csak egy helyen szerepel egyenlőségjel, van olyan, amelyikben 5 helyen is az áll.

Készítsünk ilyen számokat a következőképpen. A 6 szám közé valahova rakjunk egyenlőségjelet, akkor az utána szereplő számjegy meg fog egyezni az előzővel, tehát már csak 5 helyre kell számjegyet írnunk. Ezt

$$5 \cdot 10^5$$

különböző módon tehetjük meg.

Az olyan számokat azonban, amelyekben két helyen is szerepel egyenlőségjel, kétszer is összeszámoltuk, ezeknek a számát tehát le kell vonnunk.

$$-\binom{5}{2} \cdot 10^4$$

Az olyan számokat, amelyekben három helyen is szerepel egyenlőségjel, túl sokszor vontuk le, vissza kell tehát adnunk. ...

A megoldás:

$$5 \cdot 10^5 - \binom{5}{2} \cdot 10^4 + \binom{5}{3} \cdot 10^3 - \binom{5}{4} \cdot 10^2 + \binom{5}{5} \cdot 10$$

■

1.6. Logikai szita

1.6-37. Hány olyan n jegyű szám van ($n \geq 3$), amelyik csupán az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?
Megoldás.

Összesen 3^n n jegyű számot készíthetünk az 1, 2, 3 számjegyek felhasználásával.

Ezek között azonban vannak olyanok, amelyek legfeljebb két számjegy felhasználásával készültek, ezek száma:

$$3 \cdot 2^n.$$

Ezt az értéket az előbbiből le kell vonnunk.

Vannak azonban olyan számok (a csupa 1, csupa 2 és a csupa 3), amelyeket először egyszer vettünk figyelembe, majd kétszer vontunk le. Ezek számát vissza kell adnunk.

A keresett érték:

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

Megjegyzés. Lényegében a logikai szita módszert alkalmaztuk, ahol a résztvevő halmazok a következők:

A_1 azokat a számokat tartalmazza, amelyekben az 1-es nem szerepel,

A_2 azokat, amelyekben a 2-es nem szerepel,

A_3 pedig azokat, amelyekben a 3-as nem szerepel.

■

1.6-38. Egy ismerősünknek el akarunk küldeni nyolc különböző fényképet. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha pontosan 5 különböző borítékot akarunk felhasználni?
Megoldás.

1. *megoldás.* Alkalmazzuk a logikai szita módszert, az A_i halmaz azokat a (nekünk nem megfelelő) eseteket tartalmazza, amikor az i-edik boríték nem kerül felhasználásra.

legfeljebb ennyi borítékot használunk	esetek száma	a felhasznált borítékok hányféleképpen választhatók ki az összes közül
5	5^8	$\binom{5}{5}$
4	4^8	$\binom{5}{4}$
3	3^8	$\binom{5}{3}$
2	2^8	$\binom{5}{2}$
1	1^8	$\binom{5}{1}$

A keresett érték:

$$\binom{5}{5}5^8 - \binom{5}{4} \cdot 4^8 + \binom{5}{3} \cdot 3^8 - \binom{5}{2} \cdot 2^8 + \binom{5}{1} \cdot 1^8 = 126\ 000$$

2. *megoldás.* Rakjuk sorba a borítékokat. Nézzük meg, hogy hányféleképpen tudjuk a nyolc fényképet öt csoportba osztani úgy, hogy mindegyik csoportban legyen legalább egy fénykép. A három lehetőséget az alábbi táblázat első oszlopában látjuk.

Gondolatban írjuk fel a borítékokra, hogy melyikbe hány fénykép fog kerülni. Osszuk el ennek megfelelően a fényképeket (második oszlop), ekkor a csoportok sorrendje is számít.

Majd nézzük meg, hogy az adott számokat a borítékokra hányféleképpen írhatjuk fel (harmadik oszlop).

Az összes eset számát megkapjuk, ha a második és a harmadik oszlopban levő értékeket összeszorozzuk egymással.

hány fénykép kerül egy-egy borítékba	hányféleképpen oszthatjuk el a fényképeket	hányféleképpen kerülhetnek az adott számok a borítékokra	összes lehetőség
4 1 1 1 1	$\frac{8!}{4!}$	5	$\frac{8!}{4!} \cdot 5 = 8\ 400$
3 2 1 1 1	$\frac{8!}{3! \cdot 2!}$	$\frac{5!}{3!}$	$\frac{8!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{3!} = 67\ 200$
2 2 2 1 1	$\frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2}$	$\frac{5!}{3! \cdot 2}$	$\frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2} = 50\ 400$
összesen			126 000

■

1.6-39. Az 5-ös számrendszerben a legfeljebb 8 jegyű számok között hány olyan van, amelyiknek a jegyei között az 1, 2, 3, 4 legalább egyszer előfordul?
Megoldás. Alkalmazzuk a logikai szita módszert. Az 5-ös számrendszerben 5^8 legfeljebb 8 jegyű szám van. Ebből azonban ki kell vonnunk azoknak a számát, amelyekhez az 1, 2, 3, 4 számjegyek közül legfeljebb 3-at használunk fel, s így ők a 0-val együtt legfeljebb 4 számjegyből állnak ($\binom{4}{1}4^8$), vissza kell adnunk azoknak a számát, amelyekhez az 1, 2, 3, 4 számjegyek közül legfeljebb 2-t használunk fel, s így ők a 0-val együtt legfeljebb 3 számjegyből állnak ($\binom{4}{2}3^8$), stb. Összesen a keresett számok száma:

$$5^8 - \binom{4}{1}4^8 + \binom{4}{2}3^8 - \binom{4}{3}2^8 + \binom{4}{4}1^8 = 166\ 824$$

■

1.6-40. Hány $A \to B$ szürjekció van, ha $|A| = n, |B| = k$?
Megoldás. Ha $n > k$, akkor nincs egy sem. Legyen most $n \leq k$, és alkalmazzuk a logikai szita módszerét.

$$k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \binom{k}{3}(k-3)^n + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n$$

■

1.6-41. (Kovács Géza egykori ELTE-s hallgató példája.) 4 házaspár hogyan helyezhető el egy kerek asztal körül úgy, hogy házastársak nem kerülnek egymás mellé.
Megoldás. A logikai szita módszerrel oldjuk meg a feladatot. Az A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ halmazba azok a (számunkra nem kedvező) esetek kerülnek, amelyekben az i-edik férj és feleség egymás mellett ülnek. Az összes eset száma 7!. Ha egy házaspár egymás mellett ül (a többi lehet, hogy egymás mellett ül, lehet, hogy nem), akkor az egymás mellett ülő pár $\binom{4}{1}$-féleképpen választható ki, a pár és a többi 6 ember a kerek asztal körül 6!-féleképpen ülhet le, és a pár egymáshoz képest 2-féleképpen helyezkedhet el, tehát ezeknek az eseteknek a száma $\binom{4}{1}6! \cdot 2$. A többi eset hasonló módon számolható ki. Az összes eset száma:

$$7! - \binom{4}{1}6! \cdot 2 + \binom{4}{2}5! \cdot 2^2 - \binom{4}{3}4!2^3 + \binom{4}{4}3!2^4 =$$

$$= 5040 - 5760 + 2880 - 768 + 96 = 1488$$

■

1.6-42. Hány ötjegyű szám alkotható

a. csupa egyenlő számjegyből;

b. két különböző számjegyből;

c. három különböző számjegyből;

d. négy különböző számjegyből;

e. öt különböző számjegyből?

Megoldás.

a. 9

b. Először vegyük figyelembe azokat a számsorozatokat is, amelyek nullával kezdődnek. Azt a két számjegyet, amelyiket felhasználjuk az ötjegyű számok képzésére, $\binom{10}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. A kiválasztott két jegyből $2^5 - 2$ olyan sorozatot képezhetünk, amelyikben mindkét jegy szerepel. Összesen tehát $\binom{10}{2}(2^5-2)$ sorozatot kaphatunk, ezeknek a $\frac{9}{10}$ -ed része olyan, amelyik nem nullával kezdődik. A megoldás:

$$\frac{9}{10}\binom{10}{2}(2^5 - 2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2}(2^5 - 2) = 81(2^4 - 1) = 81 \cdot 15 = 1\ 215$$

c. Először figyelembe vesszük azokat a számsorozatokat is, amelyek nullával kezdődnek. Azt a három számjegyet, amelyiket felhasználjuk az ötjegyű számok képzésére, $\binom{10}{3}$-féleképpen választhatjuk ki. A kiválasztott három jegyből $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3$ olyan sorozatot képezhetünk, amelyikben mindhárom jegy szerepel. Összesen tehát $\binom{10}{3}(3^5-3\cdot 2^5+3)$ sorozatot kaphatunk, ezeknek a $\frac{9}{10}$ -ed része olyan, amelyik nem nullával kezdődik. A megoldás

$$\frac{9}{10}\binom{10}{3}(3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3) = \frac{9}{10} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3}(3 \cdot 81 - 3 \cdot 32 + 3) = 16\ 200$$

d.

1. *megoldás.* A 10 számból azt a 4-et, amelyiket felhasználunk, $\binom{10}{4}$-féleképpen választhatjuk ki. $\binom{5}{2}$-féle módon választhatjuk ki azt a 2 helyet, melyeken van ismétlődés. 4-féleképpen választhatjuk ki azt a számjegyet, amelyik ismétlődik. A nem ismétlődők 3!-féle módon rendezhetők el:

$$\frac{9}{10}\binom{10}{4}\binom{5}{2}4 \cdot 3! = \frac{9}{10} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 81 \cdot 56 \cdot 10 = 45\ 360$$

2. *megoldás.* Ugyanezt az értéket az alábbi módon is kiszámíthatjuk:

$$\frac{9}{10}\binom{10}{4}\left(4^5-4\cdot 3^5+\binom{4}{2}\cdot 2^5-4\cdot 1\right)$$

e.
1. *megoldás.*

$$9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=27\ 216$$

2. *megoldás.*

$$\frac{9}{10}\binom{10}{5}\left(5^5-\binom{5}{1}\cdot 4^5+\binom{5}{2}\cdot 3^5-\binom{5}{3}\cdot 2^5+\binom{5}{4}\cdot 1^5\right)$$

Megjegyzés. Az összes ötjegyű szám ($9\cdot 10^4$ darab), az előző 5 pont valamelyikében (pontosan egyszer) szerepel, tehát

$$a+b+c+d+e=9\cdot 10^4.$$

Ezt is felhasználhatjuk a számítások során. ■

1.7. Kártya

1.7-43. Az 52 lapos francia kártyában négy szín (kőr, pikk, káró, treff) és mindegyikből 13 darab van. Mindegyik színből négy figura (ász, király, dáma, bubi), kilenc pedig 2-től 10-ig számozott.

a. Négy játékosnak 13-13 lapot osztva hány különböző leosztás van?

b. Hány olyan leosztás van, ahol minden játékosnak van ásza?

c. Hány olyan leosztás van, ahol minden ász egy kézbe került?

Megoldás.

a.

1. *megoldás.* Rakjuk sorba a kártyákat (52! sorrend), és az első 13 lapot az első játékosnak adjuk, a második 13 lap a második játékosé, stb. Mivel mindegy, hogy egy-egy játékos milyen sorrendben kapta a kártyákat, ezért az előbbi értéket osztjuk $(13!)^4$-nel. A keresett érték:

$$\frac{52!}{(13!)^4}=53\ 644\ 737\ 765\ 488\ 792\ 839\ 237\ 440\ 000$$

2. *megoldás.* Ugyanehhez a megoldáshoz eljuthatunk a következő gondolatmenettel is.

Az 52 lapból kiválasztunk 13-at ($\binom{52}{13}$ lehetőség), és az első játékosnak adjuk.

A maradék 39 lapból kiválasztunk újra 13-at ($\binom{39}{13}$ lehetőség), és ezt a második játékos kapja.

A maradék 26 lapból kiválasztunk megint 13-at ($\binom{26}{13}$ lehetőség), ezt a harmadik játékos kapja.

A hátralévő 13 lapból kiválasztunk megint 13-at ($\binom{13}{13}$ lehetőség), ezt a negyedik játékos kapja.

Az esetek száma összeszorzódik, a megoldás:

$$\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13}.$$

b. Mindegyik játékosnak adunk egy-egy ászt (4! lehetőség), és a többi 48 kártyából adunk mindegyik játékosnak 12-12 darabot. Az összes eset száma:

$$4! \cdot \frac{48!}{(12!)^4} = 5\ 659\ 423\ 235\ 091\ 422\ 706\ 737\ 318\ 400$$

c. A 4 ászt odaadjuk az egyik játékosnak (4 lehetőség), a megmaradt kártyákból pedig 9-et megkap ez a játékos, a többinek 13-13 jut:

$$4 \cdot \frac{48!}{(13!)^3 \cdot 9!} = 566\ 715\ 116\ 850\ 301\ 773\ 091\ 584\ 000$$

■

1.8. Binomiális tétel és alkalmazása

Binomiális tétel.

Legyen n természetes szám, x, y pedig tetszőleges komplex számok. Ekkor

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{k}x^ky^{n-k} + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

Helyettesítsünk x és y helyébe is 1-et. Az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Ha az $x = -1$ és az $y = 1$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor pedig a következő összefüggéshez jutunk:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^k \binom{n}{k} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

1.8-44. Határozzuk meg a következő összeget:

$$3\binom{n}{1} + 3^2\binom{n}{2} + \ldots + 3^n\binom{n}{n}$$

Megoldás. Jelölje a keresett összeget S.

$$S = 3\binom{n}{1} + 3^2\binom{n}{2} + \ldots + 3^n\binom{n}{n}$$

A binomiális tételt alkalmazva:

$$S + 1 = (3+1)^n$$

Ebből

$$S + 1 = 4^n$$

$$S = 4^n - 1$$

■

1.8-45. Határozzuk meg a következő összeget:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$$

Megoldás. Jelölje a keresett összeget S.

$$S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$$

Adjuk hozzá S-hez az

$$1! + 2! + 3! + \ldots + n!$$

kifejezést:

$$S + 1! + 2! + 3! + \ldots + n! = 2! + 3! + \ldots + n! + (n+1)!$$

Ezt rendezzük:

$$S = (n+1)! - 1$$

■

1.8-46. Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$$

Megoldás. Jelölje a keresett összeget S :

$$S=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n}$$

Az

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

azonosságot alkalmazva S így is felírható:

$$S=n\binom{n}{0}+(n-1)\binom{n}{1}+\ldots+2\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}.$$

S két különböző alakját adjuk össze:

$$2S=n\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)=n2^n,$$

amiből

$$S=n2^{n-1}.$$

■

1.8-47. Bizonyítsuk be, hogy igaz a következő egyenlőség:

$$\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k}+\binom{n+2}{k}+\ldots+\binom{n+m}{k}=\binom{n+m+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}$$

Megoldás. m szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Felhasználjuk az

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

összefüggést.

I. $m = 0$-ra teljesül az állítás:

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

II. Belátjuk, hogy ha $m-1$-re fennáll az összefüggés, akkor m-re is (tehát teljesül az öröklődés). m-re felírjuk a kifejezés bal oldalát.

$$\left(\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} + \binom{n+2}{k} + \ldots + \binom{n+m-1}{k}\right) + \binom{n+m}{k} =$$

A zárójelben lévő kifejezésbe beírjuk az indukciós állítás alapján az $(\binom{n+m}{k+1} - \binom{n}{k+1})$kifejezést.

$$= \left(\binom{n+m}{k+1} - \binom{n}{k+1}\right) + \binom{n+m}{k} =$$

Ezt tovább alakítva megkapjuk m-re a jobb oldalt.

$$\binom{n+m+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

I. és II. alapján minden pozitív m-re teljesül az összefüggés. ∎

2. Ajánlott irodalom

Bartha Gábor–Bogdán Zoltán–Csúri József–Duró Lajosné–dr. Gyapjas Ferencné–dr. Kántor Sándorné–dr. Pintér Lajosné: *Matematika feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára* 13 135/I (*sárga csíkos*)
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002

Dringó László – Kátai Imre: *Bevezetés a matematikába*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1982

Elekes György: *Kombinatorika feladatok*
ELTE Budapest, 1992

Hajnal Imre-dr. Nemetz Tibor–dr. Pintér Lajos: *Matematika Gimnázium III. osztály* (fakultatív B változat)
Tankönyvkiadó, Budapest, 1983

Hajnal Péter: *Elemi kombinatorikai feladatok*
Polygon Szeged, 1997

Járai Antal: *Bevezetés a matematikába*
ELTE Eötvös Kiadó, 2005

Láng Csabáné: *Bevezető fejezetek a matematikába I.*
ELTE Budapest, 1997

N. J. Vilenkin: *Kombinatorika*
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987

L. Ziermann Margit: *Valószínűségszámítás Középiskolai szakköri füzet*
Tankönyvkiadó, Budapest, 1967