

Numerikus Analízis 4. félév

utasir@freestart.hu

Utasi Róbert

2003. szeptember 12.

1. Előadás

1. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei

1.1. Közönséges

(1) $y' = e^x$ $y(x) = ?$
mo: $y(x) = e^x + c$ $c \in \mathbb{R}$

(2) Kezdeti érték: $y(0) = 2$

Feladat: keressük (1)-nek azt a megoldását, amelyik kielégíti (2)-t.

$$y(x) = e^x + c$$

$$y(0) = e^0 + c = 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$$

(1)(2) egyértelmű megoldása: $y(x) = e^x + 1$

HF $y' = y$
 $y(0) = 1$

1.2. Parciális

pl.: rezgő húr egyenlete $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

1.3. Elsőrendű

$$y' = f(x, y(x))$$

1.4. Elsőrendű differenciálegyenletrendszer

$$y'_1 = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

\vdots

$$y'_n = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$\underline{y}(x) := (y_1(x), \dots, y_n(x))$$

$$\underline{f}(x, \underline{y}(x)) := (f_1, \dots, f_n)$$

1.5. Másodrendű

Newton $F = m \cdot a$

$s(t)$ a megtett út

$$a = s''(t)$$

$$s''(t) = \frac{F}{m}$$

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

1.6. n-edrendű

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Pl.: szabadesés

$$s''(t) = g - \overbrace{k \cdot (s'(t))^2}^{\text{légellenállás}}$$
$$f(x, y, \underbrace{y'}_{s'})$$

1.7. Differenciálegyenletek megoldási módszerei

- 1) analitikus megoldás (pontos megoldást ad)
- 2) kvázianalitikus módszerek (picard iteráció, Taylor-sor módszer)
- 3) numerikus megoldási módszerek

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\} \text{kezdetiérték feladat}$$

lsd.: Picard tétel: f folytonos és Lipsitz tulajdonságú, akkor megoldható

$$f \in \mathcal{C}(\mathcal{D}) \text{ ahol } \mathcal{D} := \{(x, y) | a \leq x \leq b; y \in \mathbb{R}\}$$

1 Definíció f Lipsitz tulajdonságú D -n azaz

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{D} \exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|. \text{ Ekkor}$$

- 1) $\exists! \tilde{y}(x) \in C^1(\mathcal{D})$
- 2) $\tilde{y}'(x) = f(x, \tilde{y}(x))$
- 3) $\tilde{y}(x_0) = y_0$

Peremfeladatok:

$$\begin{array}{l} y''(x) = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{array}$$

$A \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$ mintájára

$$\begin{array}{l} y''(x) = \lambda \cdot y(x) \\ y(0) = 0; y(\Pi) = 0 \end{array}$$

2. Előadás

2. Kvázianalitikus módszerek

2.1. Picard iteráció

Tekintsük a következő kezdetiértékfeladatot:

$$(1) \quad \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}$$

Ez ekvivalens a következő integrálegyenlettel:

$$\int_{x_0}^x y(\tau) d\tau = \int_{x_0}^x f(x, y(\tau)) d\tau \text{ ahol } y(x_0) = y_0 \Rightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau)) d\tau \text{ ahol } y_1 = \Phi(y_0)$$

(Banach fixpt).

Ezt az implicit egyenletet Picard iterációval megoldhatjuk $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$ közelítő megoldások sorozatának konstruálásával:

Legyen $y_0(x) = y_0$
 $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_0) d\tau$
 \vdots
 $y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_n(\tau)) d\tau \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Pl.: (a) $y' = 3x^2y$
 $y(0) = 1$
tehát $f(x, y) = 3x^2y$ és $x_0 = 0$

$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_n(\tau)) d\tau \Rightarrow$
 $n = 0: y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x 3\tau^2 y_0 d\tau$
 $y_1(x) = 1 + \int_{x_0}^x 3\tau^2 d\tau = 1 + \tau^3|_0^x = 1 + x^3$
 $y_2(x) = 1 + \int_{x_0}^x [3\tau^2 \cdot (1 + \tau^3)] d\tau = 1 + \left[\tau^3 + 3 \cdot \frac{\tau^6}{6} \right]_0^x = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2}$
 $y_3(x) = \dots$ egyre közelít

Pontos megoldás:

$$y(x) = e^{x^3} \text{ ha } y(0) = 1$$

$$y'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2$$

$$y''(x) = 3x^2 e^{x^3} \cdot 3x^2 + e^{x^3} \cdot 6x$$

$$y'''(x) = e^{x^3} \cdot 6$$

A megoldás Taylor-sora.

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 \text{ alapján}$$

$$y(x) = 1 + 0 + 0 + x^3$$

Vegyük észre, hogy a Picard iteráció a Taylor-sor szeleteit adja.

2.2. Taylor-sor módszer

(a) $y'(x) = f(x, y(x))$
 $y(x_0) = y_0$
és $y(x)$ akárhányszor deriválható

Hátrány: deriváltat kell számolni, magasabb rendű tagok bonyolultak

$$\text{Taylor: } y(x) = y(x_0) + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

A pontos megoldást az x_0 -ban az n -edfokú Taylor-polinomjával helyettesítjük.

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Ehhez az y deriváltjait számítani kell az (a) segítségével

$$y(x_0) = y_0 \Rightarrow$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

$$y''(x) = f_x + f_y \cdot y'(x) \Big|_{x_0}$$

$$y'''(x) = f_{xx} + f_{xy} \cdot y'(x) + [f_{yx} + f_{yy} \cdot y'] \cdot f + f_y \cdot [f_x + f_y \cdot f] =$$

$$= f_{xx} + 2f_{xy} \cdot f + f_{yy} \cdot f^2 + f_x f_y + (f_y)^2 \cdot f \Big|_{x_0}$$

És így tovább...

példa: $y' = 1 - x + y$
 $y(0) = 1$

$$y(x) = \underbrace{y(x_0)}_1 + \underbrace{y'(x_0)h}_{2h} + \underbrace{\frac{y''(x_0)}{2!}h^2}_{\frac{h^2}{2}} + \underbrace{\frac{y'''(x_0)}{3!}h^3}_{\frac{h^3}{3}} + \dots \Rightarrow$$

$$y(x) = 1 +$$

$$y'(x) = 1 - x + y \Rightarrow y'(0) = 1 + 1 = 2$$

$$y''(x) = -1 + 1(1 - x + y) = -x + y \stackrel{x=0}{=} 1$$

$$y'''(x) = \dots$$

3. Előadás

3. Numerikus módszerek differenciálegyenletek megoldására

Tekintsük a következő kezdetiértékfeladatot:

(1) $y' = f(x, y(x))$
 $y(x_0) = y_0$

Egyszerű ötletek numerikus módszerek levezetésére.

3.1. Diszkretizálással

Az (1)-beli deriváltat differenciahányadossal helyettesítjük (x_n pontban)

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

hiba = $k \cdot h$.

(1)-be írva kapjuk:

$$\Rightarrow \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n))$$

Ebből kapjuk az explicit Euler-módszert:

3.1.1. Explicit Euler-módszer

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) ; y_0 \text{ adott, } h = \frac{b-a}{N} \text{ lépésköz}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots ; a \leq x \leq b ; x_0 = a ; y(x_0) = y_0 = y(a)$$

stabil, ha $h \cdot L < 2$ (h lépésköz, L Lipsitz állandó)

pl.: $y' = \overbrace{100}^L y$ e^{100x} meredek, érzékeny a lépésköze.

3.2. Integrálással

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(\tau) d\tau = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

$$y(x_{n+1}) = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

$$y' = f(x) ; y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(\tau) d\tau$$

Téglalap-formula alapján közelítjük $\approx h \cdot f(x_n, y(x_n))$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n))$$

Visszakapjuk az explicit Euler-módszert.

Vehetnénk y' helyett az un. retrográd differenciálhányadost:

$$x_{n+1} \text{ pontban: } y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

Ez alapján az (1) alakja a következő x_{n+1} -ben:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

Ebből kapjuk az implicit Euler-módszert:

3.2.1. Implicit Euler-módszer

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Az $y = \Phi(y)$ típust iterációval, pl.: Newton iterációval oldjuk meg. Munkaigényes, de stabil a módszer.

Integrálással a "felső" téglalapot használjuk az integrál közelítésére. \Rightarrow

$$\Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

Így visszakapjuk az implicit Euler-módszert

Ha az integrált a trapéz-formulával helyettesítjük:

$$\int_{x_{n+1}}^{x_n} f(\tau, y(\tau)) d\tau \approx \frac{h}{2} [f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))]$$

Ebből kapjuk a trapéz-módszert (másodrendű módszer, négyzetesen közelít):

3.2.2. Trapéz-módszer és Θ -módszer

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot [\Theta \cdot f(x_n, y_n) + (1 - \Theta) \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad ; \text{ itt } \Theta = \frac{1}{2} \text{ csak kiemeltük.}$$

Általánosan Θ módszer.

Megj.: Ha az integrál alatti függvényt interpolációs polinomjával helyettesítjük (közelítjük), akkor kapjuk az un. többlépéses módszereket.

Megj.: Explicit Euler-módszernél, a numerikus módszer hibája egyre nagyobb lesz a lépésszám növekedtével.

Egylépéses módszerek általános alakja:

$$\text{Explicit: } y_{n+1} = y_n + h \cdot \Phi(x_n, y_n, h)$$

$$\text{Implicit: } y_{n+1} = y_n + h \cdot \Phi(x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1}, h)$$

ahol a Φ un. növekményfüggvény.

Példa:

expl.: $\Phi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$

impl.: Taylor-sor módszer: $\Phi = y'(x_n) + \frac{y''(x_n)}{2!}h + \dots + \frac{y^{(m)}(x_n)}{m!}h^{m+1}$
 $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot y'(x_n) + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \dots + \frac{y^{(m)}(x_n)}{m!}h^m + \mathcal{O}(h^{m+1})$

4. Numerikus módszerek lokális és globális hibája

2 Definíció A numerikus módszer lokális diszkretizációs hibája $d_{n+1}(x_{n+1})$ -ben az egy lépés alatt elkövetett hiba, ha a módszert x_n -ben $y(x_n)$ -ből indítjuk, azaz $d_{n+1} := y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}$ ahol $y(x_{n+1})$ a feladat pontos megoldásának értéke, \tilde{y}_{n+1} a numerikus módszer által kapott érték, ha $x_n, y(x_n)$ -ekkel mint kezdeti értékekkel számolva.

4.1. Euler- és Trapéz-módszer lokális hibája

pl.: Euler-módszer lokális diszkretizációs hibája

$$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1} = \overbrace{y(x_{n+1})}^T - [y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n))] =$$

$$= y(x_n) + h \cdot y'(x_n) + \frac{y''(\xi)}{2!}h^2 - \left[y(x_n) + h \cdot \overbrace{f(x_n, y(x_n))}^{y'(x_n)} \right] = \frac{y''(\xi)}{2!}h^2 = \mathcal{O}(h^2)$$

Belátható: trapéz-módszer lokális hibája $\mathcal{O}(h^3)$.

4. Előadás

Lokális hiba alapján becsülhetjük a globális hibát: $d_{n+1} = \mathcal{O}(h^{p+1}) \implies \text{glob } \mathcal{O}(h^p)$.

$$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1} = y(x_{n+1}) - [y_n + h \cdot \Phi(x_n, y_{n+1}, h)]$$

Trapéz-módszer: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$

Trapéz-módszer lokális diszkretizációs hibája:

$$d_{n+1} = y(x_{n+1}) - \left\{ y(x_n) + \frac{h}{2} \left[\overbrace{f(x_n, y(x_n))}^{y'(x_n)} + \overbrace{f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))}^{y'(x_{n+1})} \right] \right\} =$$

Taylor alapján: $y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \frac{y'''(\xi)}{3!}h^3$

$$y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + y''(x_n)h + \frac{y'''(x_n)}{2!}h^2 \implies$$

$$\implies d_{n+1} = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)}{2!}h^2 + \mathcal{O}(h^3) - y(x_n) - \frac{h}{2} [y'(x_n) + y'(x_n) + y''(x_n)h + \mathcal{O}(h^2)] = \mathcal{O}(h^3)$$

Tehát $\implies |d_{n+1}| \leq c \cdot h^3$ lokális hiba.

De minket a globális hiba érdekel!

4.2. A numerikus módszer globális hibája és rendje

3 Definíció A numerikus módszer globális hibája $e_n := y(x_n) - y(n)$, ahol $y(x_n)$ az $y' = f(x, y(x))$ differenciálegyenlet pontos megoldása x_n -ben.

y_n : a numerikus módszer által n lépés után kapott közelítő értéke $y(x_n)$ -nek.

4 Definíció A globális hiba p -edrendű, ha $|e_n| \leq c \cdot h^p$ ahol c konstans.

5 Definíció Egy numerikus módszer konvergens, ha tetszőleges $x^* \in [a, b]$ esetén és $h := \frac{x^* - a}{n}$ -re fennáll,

$$\text{hogy } \lim_{h \rightarrow 0} y_n = y(x_n) = y(x^*)$$

$$\text{vagy } \lim_{h \rightarrow 0} \|y(x_n) - y_n\| = 0$$

$$\text{vagy } \lim_{h \rightarrow 0} \|e_n\| = 0$$

6 Definíció Egy numerikus módszer p -edrendű, ha a globális hibája p -edrendű.

A globális hibát a lokális hiba segítségével becsülhetjük meg.

Belátjuk, hogy ha a lokális hibára $|d_n| \leq c \cdot h^{p+1}$ alakú becslés érvényes, akkor a globális hibára igaz, hogy $|e_n| \leq c \cdot h^p$ azaz a módszer p -edrendű.

4.2.1. Gronwall-lemma

1 Lemma Gronwall-lemma Legyen $\{z\}_{n=1}^N$ pozitív tagú sorozat, amelyre teljesül, hogy

$z_{n+1} \leq A \cdot z_n + B$,
ahol A és B pozitív állandók. Ekkor érvényes a következő becslés:

$$(\blacktriangle) |z_n| \leq \frac{B}{A-1} [A^n - 1] + z_0 \cdot A^n \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Biz.: $n = 0$: $|z_0| = z_0 \leq 0 + z_0 \cdot 1 = z_0 \quad \checkmark$.

$$\begin{aligned} \text{tfh } n\text{-re igaz } n \Rightarrow n+1: |z_{n+1}| &\leq A \cdot |z_n| + B \leq A \left| \frac{B}{A-1} (A^n - 1) + z_0 \cdot A^n \right| + B = \\ &= \frac{B \cdot A^{n+1}}{A-1} - \frac{A \cdot B}{A-1} + B + z_0 \cdot A^{n+1} = \frac{B \cdot A^{n+1} - AB + b(A-1)}{A-1} + z_0 \cdot A^{n+1} = \underbrace{\quad}_{\text{OK}} + z_0 \cdot A^{n+1} \text{ OK.} \end{aligned}$$

A globális hibára egylépéses módszer esetén $y_{n+1} = y_n + h \cdot \Phi(x_n, y_n)$ érvényes a következő becslés, ha a lokális hibát a következő módon becsülhetjük $|d_n| \leq c \cdot h^{p+1}$

1 Tétel Tfh. Φ folytonos mindkét változójában, a második változójában Lipsitz folytonos L állandóval. Ekkor az egylépéses módszer globális hibájára igaz a következő becslés:

$$(***) |e_n| \leq h^p \cdot \frac{C}{L} [e^{L(b-a)} - 1] + |e_0| \cdot e^{L(b-a)}$$

Biz.: A numerikus módszer:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h \cdot \Phi(x_n, y_n) & / \cdot (-1) & + y(x_{n+1}) \\
\underbrace{y(x_{n+1}) - y_{n+1}}_{e_{n+1}} &= y(x_{n+1}) - y_n - h\Phi(x_n, y_n) & / & \pm y(x_n) \\
e_{n+1} &= e_n + y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n, y_n) & / & \pm h\Phi(x_n, y(x_n)) \\
e_{n+1} &= e_n + \underbrace{y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n, y(x_n))}_{d_{n+1}} + h\Phi(x_n, y(x_n)) - h\Phi(x_n, y_n) \\
&\leq L \cdot |y(x_n) - y_n| = L \cdot |e_n| \\
\Rightarrow e_{n+1} &= e_n + h \cdot [\Phi(x_n, y(x_n)) - \Phi(x_n, y_n)] + d_{n+1} \\
\Rightarrow |e_{n+1}| &\leq |e_n| + h \cdot L \cdot |e_n| + C \cdot h^{p+1} \\
|e_{n+1}| &\leq (1 - Lh) \cdot |e_n| + C \cdot h^{p+1}
\end{aligned}$$

Erre a (*) Gronwall lemmát alkalmazva $\Rightarrow z_n \sim e_n \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |e_n| &\leq \frac{C \cdot h^{p+1}}{Lh} \left[\underbrace{(1 + Lh)^n}_{\leq e^{Lh}} - 1 \right] + |e_0| \underbrace{(1 + Lh)^n}_{\leq e^{Lh}} \quad \left(\text{expsor : } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \right) \\
|e_n| &\leq h^p \frac{C}{L} [e^{Lhn} - 1] + |e_0| \cdot e^{Lhn} \leq h^p \frac{C}{L} [e^{L(b-a)} - 1] + |e_0| e^{L(b-a)}
\end{aligned}$$

5. Előadás

5. Runge-Kutta típusú egy lépéses módszerek. Néhány klasszikus első-, másod- és negyedrendű RK módszer

Feladat: konstruáljunk p -edrendű ($p \geq 1$, egész) numerikus módszert az $y' = f(x, y)$; $y(X_0) = y_0$ kezdetiértékfeladatra az f deriváltjainak kiszámítása nélkül.

A Runge-Kutta módszerek általános alakja:

$$\begin{aligned}
(1) \quad y_{n+1} &= y_n + h \cdot \Phi(x_n, y_n, h) \\
(2) \quad \text{ahol } \Phi(x, y, h) &= \sum_{i=1}^{\ell} c_i k_i \\
(3) \quad k_i &:= f(x_n + b_i \cdot h, y_n + \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} k_j)
\end{aligned}$$

ahol a_{ij}, b_i, c_i állandók (a módszer rendjétől függenek)

Az állapotokat un. Butcher-táblázatba is írják:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\ell} & \text{R-K mátrix} \\ \underline{b} := (b_1, \dots, b_{\ell})^T & \text{R-K mátrix módusai} \\ \underline{c} = (c_1, \dots, c_{\ell})^T & \text{R-K mátrix súlyai} \end{array} \right. \quad \frac{\underline{b}}{\underline{c}} \mid \frac{A}{\underline{c}^T}$$

7 Definíció A R-K módszer explicit R-K módszer, ha $a_{ij} = 0$; $i \leq j$).
Ekkor ui. a k_i -k explicit módon (és persze (1) is!) számolhatóak.

Az általános alakú módszert implicit R-K módszernek nevezzük.

Hogy p -edrendű módszert kapjunk, a (4) együtthatókat úgy kell megválasztani, hogy a módszer lokális hibája $p + 1$ -edrendű legyen.

Tehát a lokális hibára:

- (5) $d(x, y, h) = z(x+h) - z(x) - h\Phi(x, y, h) = \mathcal{O}(h^{p+1})$ kell hogy teljesüljön.
Itt $z(t)$ a $z'(t) = f(t, z(t))$ differenciálegyenlet pontos megoldása,
ha tetszőleges x, y esetén a differenciálegyenlet kezdeti értéke $z(x)=y$.

Hogy (5) teljesüljön, ahhoz meg az kell, hogy a d lokális hiba Taylor-sorának első p tagja tűnjön el!

d -nek a Taylor-sora h szerint a $h = 0$ pontban a következő:

$$d(x, y, h) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^i d}{\partial h^i} \Big|_{h=0} \cdot h^i$$

Ezért a p -edrendű módszerhez kell hogy teljesüljön:

$$\frac{\partial^i d}{\partial h^i} \Big|_{h=0} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, p \quad \text{ígya Taylor-sor első } p \text{ eleme eltűnik.}$$

Az (5) jobb oldalát is Taylor-sorba fejtjük a következő módon:

$$\begin{aligned} z(x+h) - z(x) &= h \cdot z'(x) \Big|_{h=0} + \frac{h^2}{2!} z''(x) \Big|_{h=0} + \dots + \frac{h^p}{p!} z^{(p)}(x) \Big|_{h=0} + \mathcal{O}(h^{p+1}) \\ z(x+h) &= z(x) + z'(x) + \frac{z''(x)}{2!} h^2 + \dots + \frac{z^{(p)}(x)}{p!} h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \end{aligned}$$

$$\text{Továbbá } \Phi(x, y, h) = \Phi(x, y, 0) + h \cdot \Phi'(x, y, 0) + \frac{h^2}{2!} \Phi''(x, y, 0) + \dots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} \Phi^{(p-1)}(x, y, 0) + \mathcal{O}(h^p)$$

Szorozzuk be h -val mindkét oldalt:

$$\begin{aligned} d(x, y, h) &= h \cdot z'(x) \Big|_{h=0} + \frac{h^2}{2!} z''(x) \Big|_{h=0} + \dots + \frac{h^p}{p!} z^{(p)}(x) \Big|_{h=0} + \mathcal{O}(h^{p+1}) - \\ &- h\Phi(x, y, 0) - h^2\Phi'(x, y, 0) - \dots - \frac{h^p}{(p-1)!} \Phi^{(p-1)}(x, y, 0) + \mathcal{O}(h^{p+1}) = \\ d(x, y, 0) &= h \left[z'(x) \Big|_{h=0} - \Phi(x, y, 0) \right] + h^2 \left[\frac{1}{2} z''(x) \Big|_{h=0} - \Phi'(x, y, 0) \right] + \dots \\ \dots + h^p &\left[\frac{1}{p!} z^{(p)}(x) \Big|_{h=0} - \Phi^{(p-1)}(x, y, 0) \right] + \mathcal{O}(h^{p+1}) \end{aligned}$$

Így a p -edrendű módszerben kell, hogy a következő egyenletrendszer teljesüljön:

$$(6) \quad \frac{1}{i!} z^{(i)}(x) \Big|_{h=0} - \Phi^{(i-1)}(x, y, 0) = 0 \quad ; \quad (i = 1..p)$$

Belátható, hogy a (6) megoldható, ha $b_i = \sum_{j=1}^p a_{ij}$ teljesül.

5.1. Explicit Runge-Kutta módszerek

5.1.1. Elsőrendű Runge-Kutta módszerek ($\ell = 1$)

$$\Phi(x, y, h) = c_1 \cdot \underbrace{k_1}_{f(x_n, y_n)} = c_1 \cdot f(x, y) \quad \text{lásd: (6),(3)}$$

$$\text{továbbá } z(x+h) - z(x) = h \cdot \underbrace{z'(x)}_{f(x, y)} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\text{Így a lokális hiba: } d(x, y, h) = z(x+h) - z(x) - h\Phi(x, y, h) =$$

$$h \cdot f(x, y) - h \cdot c_1 \cdot f(x, y) + \mathcal{O}(h^2) = h \cdot \underbrace{[1 - c_1]}_! \cdot f(x, y) + \mathcal{O}(h^2)$$

! $\Rightarrow c_1 = 1$ kell hogy legyen ahhoz, hogy a módszer elsőrendű legyen.

$Y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$ Visszakaptuk az explicit Euler-módszert.

5.1.2. Másodrendű Runge-Kutta módszerek ($\ell = 2$)

Most (1)-(3) $\Rightarrow \Phi(x, y, h) = c_1 k_1 + c_2 k_2 = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + b_2 h, y_n + h a_{21} f(x, y))$

k_2 Taylor-sora: HF

majd $Z(x + h) - z(x)$ kifejtését figyelembe véve most $d(x, y, n)$ Taylor-sorában a h^0, h^1, h^2 együtthatói kell, hogy eltűnjenek. HF

A keresett együtthatókra a következő egyenletrendszert kapjuk:

- $b_1 = 0$
- $(1 - c_1 - c_2 \cdot f = 0$ (h együtthatója)
- $(\frac{1}{2} - c_2 b_2) f_x + (\frac{1}{2} - c_2 a_{21}) f_y f = 0$ (h^2 együtthatója)

Ez alapján:

- $b_1 = 0$
- $c_1 + c_2 = 1$
- $\frac{1}{2} = c_2 b_2$; $\frac{1}{2} = c_2 a_{21} \Rightarrow b_2 = a_{21}$
- $b_2 = \frac{1}{2c_2}$

Egyenletrendszer határozatlan, így c_2 legyen szabad paraméter $\Rightarrow c_1 = 1 - c_2$

Klasszikus esetek: $c_2 = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

(α) $c_2 = 1$; $c_1 = 0$; $b_2 = a_{21} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$

Módosított Euler-módszer: COLLATZ (1960)

(β) $c_2 = \frac{1}{2}$; $c_1 = \frac{1}{2}$; $b_2 = a_{21} = 1 \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h \cdot f(x_n, y_n))]$

HEUN módszerek (1900)

(γ) $c_2 = \frac{3}{4}$, $c_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = a_{21} = \frac{2}{3} \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4} \cdot h \cdot f(x_n, y_n) + \frac{3}{4} \cdot h \cdot f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}f(x_n, y_n))$

6. Előadás

Butcher-táblázat a következő:

$$(\alpha) \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \quad
 (\beta) \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \quad
 (\gamma) \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

5.1.3. Harmadrendű explicit Runge-Kutta módszerek ($\ell = 3; p = 3$) Nyström

Klasszikus harmadrendű Runge-Kutta módszer: Nyström módszer

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 2 & 0 \\
 \hline
 c^T & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|ccc}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\
 \frac{3}{4} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\
 \hline
 \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}
 \end{array}$$

5.1.4. Klasszikus negyedrendű explicit Runge-Kutta módszerek ($\ell = 4; p = 4$)

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$ ahol:

$$\begin{array}{l}
 k_1 = f(x_n, y_n) \\
 k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\
 k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\
 k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

6. Implicit Runge-Kutta módszerek (IRK), tétel az iteráció konvergenciájáról

A Runge-Kuta módszerek általános alakja a következő:

- (1) $y_{n+1} = y_n + h \cdot \Phi(x_n, y_n, h)$
- (2) ahol $\Phi(x_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i k_i$
- (3) és $k_i = f\left(x_n + b_i \cdot h, y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} k_j\right) ; i = 1..l.$

6.1. Az IRK-módszer és tulajdonságai

Általános esetben (IRK módszereknél) az $A(\ell \times \ell)$ -es mátrix nem alsó háromszögmátrix, mint az explicit RK módszereknél, hanem tetszőleges mátrix lehet.

Ekkor a (3) egyenletrendszer implicit rendszer (nemlineáris egyenletrendszer) lesz k_i -kre, amit minden egyes lépésben iterációval oldhatunk meg. Ez a hátránya az IRK módszereknek.

Előnyei: teljesülni kell:

- (4) $b_i = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} ; i = 1..l$
- (a) nagyon jó stabilitási tulajdonságuk van.
- (b) $\forall \ell \geq 1 : \exists!(2\ell)$ -edrendű IRK módszer!..

Példa: Implicit Euler-módszer:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h \cdot k_1 = y_n + hf(x_n + h, y_n + hk_1) \text{ ahol}$$

$$\underline{k_1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}) = \underline{f(x_n + h, y_n + hk_1)}$$

Példa: Trapéz módszer: ($\ell = 2$)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \text{ ahol}$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n + h, y_n + hk_2)$$

A (3) implicit egyenletrendszer iterációval a következő módon oldható meg:

$$(5) \quad k_i^{[m]} = f \left(x_n + b_i h, y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j^{[m]} + h \cdot \sum_{j=i}^{\ell} a_{ij} k_j^{[m-1]} \right) \quad i = 1..l$$

6.2. Konvergenciatétel

2 Tétel Legyen f folytonos, Lipszitz-tulajdonságú a

$$\mathcal{D} := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y \in \mathbb{R} \} \text{ tartományon, } \exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{D} \text{-re. Ekkor}$$

$\exists!$ megoldása az (1)-nek és (3)-nak, amit az (5) iterációs formulával számolhatunk ki.

Biz.: Egyértelműség: Tegyük fel, hogy (3)-nak $\exists k_i, \bar{k}_i$ két megoldása. ($i = 1..l$). Vizsgáljuk meg!

$$|k_i - \bar{k}_i| = \left| f \left(x_n + b_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} k_j \right) - f \left(x_n + b_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} \bar{k}_j \right) \right| \leq$$

$$\stackrel{\text{Lipszites}}{\leq} L |h| \left| \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} (k_j - \bar{k}_j) \right| \leq L |h| \sum_{j=1}^{\ell} |a_{ij}| \cdot |k_j - \bar{k}_j| \leq L |h| \left(\sum_{j=1}^{\ell} |a_{ij}| \right) \cdot \max_j |k_j - \bar{k}_j|.$$

$$\text{Legyen } \Lambda := \max_{1 \leq i \leq \ell} \sum_{j=1}^{\ell} |a_{ij}| \text{ (az } A \text{ mátrix sornormája).}$$

$$\Rightarrow |k_i - \bar{k}_i| \leq L |h| \Lambda \cdot \max_j |k_j - \bar{k}_j|$$

Ha a h -t úgy választjuk, hogy $L |h| \Lambda < 1 \Rightarrow |k_i - \bar{k}_i| \leq \max_j |k_j - \bar{k}_j| \cdot L |h| \Lambda < \max_j |k_j - \bar{k}_j|$

Konvergencia: Belátjuk, hogy az (5) iterációsorozat konvergens:

$$\left| k_i^{[m+1]} - k_i^{[m]} \right| =$$

$$= \left| f \left(x_n + b_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j^{[m+1]} + \sum_{j=i}^{\ell} a_{ij} k_j^{[m]} \right) - f \left(x_n + b_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j^{[m]} + \sum_{j=i}^{\ell} a_{ij} k_j^{[m-1]} \right) \right| \leq$$

$$\stackrel{\text{Lipszites}}{\leq} L |h| \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot |k_j^{[m+1]} - k_j^{[m]}| + \sum_{j=i}^{\ell} |a_{ij}| \cdot |k_j^{[m]} - k_j^{[m-1]}| \right]$$

$$\text{Legyen } \Lambda_1 := \max_i \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \quad ; \quad \Lambda_2 := \max_i \sum_{j=i}^{\ell} |a_{ij}|.$$

$$\text{Ha } Lh\Lambda < 1, \text{ mint feltettük } \Rightarrow \begin{matrix} L|h|\Lambda_1 < 1 \\ L|h|\Lambda_2 < 1 \end{matrix}$$

Bal oldalon max-ra térve \Rightarrow

$$\max_i |k_i^{[m+1]} - k_i^{[m]}| \leq Lh\Lambda_1 \max_j |k_j^{[m]} - k_j^{[m-1]}| + Lh\Lambda_2 \max_j |k_j^{[m]} - k_j^{[m-1]}|$$

$$(1 - Lh\Lambda_1) \max_i |k_i^{[m+1]} - k_i^{[m]}| \leq Lh\Lambda_2 \max_j |k_j^{[m]} - k_j^{[m-1]}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_i |k_i^{[m+1]} - k_i^{[m]}| \leq \frac{Lh\Lambda_2}{(1 - Lh\Lambda_1)} \max_j |k_j^{[m]} - k_j^{[m-1]}|$$

Ha h elég kicsi, akkor elérhető, hogy $q < 1$ legyen!

$$\begin{aligned} &\leq q^2 \max_j \left| k_j^{[m-1]} - k_j^{[m-2]} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \max_i \left| k_i^{[m+1]} - k_i^{[m]} \right| \leq q^m \max_j \left| k_j^{[1]} - k_j^{[0]} \right|_{m \rightarrow \infty} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy $k_i^{[m]}$ konvergens sorozat $m \rightarrow \infty$ esetén.

Legyen (6) $k_i := \lim_{m \rightarrow \infty} k_i^{[m]}$ ($i = 1, \dots, \ell$)

Még be kell látni, hogy a (6)-beli k_i -k a (3) megoldásai. Ehhez vizsgáljuk (3) két oldalának különbségét:

$$\begin{aligned} &k_i - f \left(x_n + b_i h, \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} k_j \right) \stackrel{(5)}{=} \\ &= k_i - k_i^{[m]} - \left[f \left(x_n + b_i h, y_n + \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij} k_j \right) - f \left(x_n + b_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j^{[m]} + h \sum_{j=i}^{\ell} a_{ij} k_j^{[m-1]} \right) \right] \\ &\Rightarrow |\epsilon| \leq \left| k_i - k_i^{[m]} \right| + L|h| \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot \left| k_j - k_j^{[m]} \right| + \sum_{j=i}^{\ell} |a_{ij}| \cdot \left| k_j - k_j^{[m-1]} \right| \right] \leq \\ &\leq \left| k_i - k_i^{[m]} \right| + Lh\Lambda_1 \cdot \max_j \left| k_j - k_j^{[m]} \right| + Lh\Lambda_2 \cdot \max_j \left| k_j - k_j^{[m-1]} \right| \longrightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \quad \forall i\text{-re.} \end{aligned}$$

7. Előadás

6.3. Példák implicit Runge-Kutta módszerekre

(1) implicit felezőpont módszer

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \left| \frac{\frac{1}{2}}{1} \right. \quad \text{másodrendű}$$

(2) Hammer-Hollingsworth módszer

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}} \left| \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \quad \frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}} \quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \right. \quad \text{negyedrendű}$$

7. Az egylépéses módszerek lineáris stabilitása. A módszerek konzisztenciája és konvergenciája

7.1. A stabilitás fogalma

Vizsgáljuk meg a következő un. tesztfeladatot:

- (1) $y' = \lambda y$; $\lambda \in \mathbb{C}$
 (2) $y(x_0) = y_0$
 pontos megoldás: $y(x) = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$

Numerikusan, egylépéses módszerrel megoldva a következő alakú formulát kapjuk:

$y_{n+1} = R(\lambda h) \cdot y_n$ ahol R un. stabilitási függvény, ami λ -tól és h lépéshossztól függ.

Például: Explicit Runge-Kutta módszerre R polinomfüggvénye (λh) -nak
 Implicit Runge-Kutta módszerre R racionális függvénye (λh) -nak

Ha $x_n = x_0 + nh$

$$\begin{aligned}
y(x_1) &= y_0 \cdot e^{\lambda(x_1-x_0)} = y_0 \cdot e^{\lambda h} \\
y(x_2) &= y_0 \cdot e^{\lambda(x_2-x_0)} = y_0 \cdot e^{\lambda 2h} = y_0 \cdot (e^{\lambda h})^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(3) $y(x_n) = (e^{\lambda h})^n \cdot y_0$ pontos megoldás

$$\begin{aligned}
y_1 &= R(\lambda h)y_0 \\
y_2 &= R(\lambda h)y_1 = [R(\lambda h)]^2 \cdot y_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(4) $y_n = [R(\lambda h)]^n \cdot y_0$ numerikus megoldás x_n helyen

Ha $\lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda > 0 \Rightarrow$ az (1) megoldása exponenciálisan növekvő függvény.

Tudjuk: $R(\lambda h) > 1$ ha $\lambda > 0$ (adott $h > 0$ -ra)

Ezért a numerikus megoldás kvalitatíve (minőségileg) helyesen adja vissza a pontos megoldást.

$\lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda < 0 \Rightarrow$ rögzített h -ra
 $n \rightarrow \infty : y(x_n) \rightarrow 0$

Hogy az y_n numerikus megoldására is teljesüljön:
 $y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) $\Leftrightarrow |R(\lambda h)| < 1$

Ha $\lambda \in \mathbb{C}$ akkor (1) megoldása oszcillálva tart 0-hoz
 $\Leftrightarrow \text{Re}(\lambda) < 0$

$$\lambda = a + ib: y(x_n) = [e^{(a+ib)h}]^n = \left[\underbrace{e^{ah}}_{\text{Re}(\lambda)} \cdot \underbrace{e^{ibh}}_{\text{Im}(\lambda)} \right]^n \cdot y_0 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ és } \text{Re}(\lambda) < 0)$$

$$\text{Im}(\lambda) \longleftrightarrow |e^{i\phi}| = |\cos \phi + i \sin \phi| = 1$$

8 Definíció (azt mondjuk, hogy) az egy lépéses módszer a (λh) pontban abszolút stabil, ha a módszert az (1) egyenletre alkalmazva teljesül, hogy $|R(\lambda h)| < 1$.

A következő halmazz $\mathcal{B} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| < 1 \right\}$ a módszer abszolút stabilitási tartományának nevezzük. ($z \in \mathbb{R}$ esetén intervallum).

7.2. Euler, Trapéz és RK-módszer stabilitása

Példa: Explicit Euler-módszer abszolút stabilitása

$$(1) y' = \lambda y \quad y(x_0) = y_0$$

$$\text{Euler } y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$(1)\text{-et figyelembe véve } \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + \lambda h) \cdot y_n = \dots = (1 + \lambda h)^{n+1} \cdot y_0$$

$$\text{Tehát } R(\lambda h) = 1 + \lambda h$$

$$h > 0 \text{ esetén Euler abszolút stabil } \Leftrightarrow |R(\lambda h)| < 1 \text{ azaz } |(1 + \lambda h)| < |1 + z| < 1 \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\lambda < 0$$

$$-2 < \lambda h < 0 \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow -\lambda h < z$$

$$h < \frac{2}{-\lambda}$$

Példa: Trapéz módszer abszolút stabilitása

$$(1) y' = \lambda y \quad y(x_0) = y_0$$

$$\text{Trapéz: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[f(x_n, y_n) + \overbrace{f(x_{n+1}, y_{n+1})}^{\lambda y} \right] \stackrel{(1)}{\Rightarrow} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [\lambda y_n + \lambda h y_n + n + 1]$$

$$(1 - \frac{1}{2}\lambda h) y_{n+1} = (1 + \frac{1}{2}\lambda h) y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda h}{1 - \frac{1}{2}\lambda h} y_n$$

$$R(\lambda h) = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda h}{1 - \frac{1}{2}\lambda h} \quad \text{Möbiuszfüggvény.}$$

$$\text{Ha } \text{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow |R(\lambda h)| < 1$$

Példa: másodrendű RK módszer stabilitása

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} y_{n+1} = \left(1 + \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2}\right) \cdot y_n \quad ; \quad R(\lambda h) < 1$$

8. Előadás

-matlab-demo

9. Előadás

8. Lineáris többlépéses módszerek. Az Adams-Bashforth módszerek levezetése

8.1. Az Adams-Bashforth módszer

Tekintsük:

$$(1) \quad \begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

kezdetiértékproblémát, ami vele ekvivalens alakba írható: $[x_n, x_{n+1}]$ intervallumon integrálva

$$(2) \quad \begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \\ \Rightarrow y(x_{n+1}) - y(x_n) &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{azaz } y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

Adams és Bashforth 1833-ban az integrálandó függvényt interpolációs polinommal közelítette

k alappontot tekintve az f függvény $(k-1)$ -edfokú $P_{k-1,n}(x)$ interpolációs polinommal helyettesíthető.

$$P_{k-1,n}(x) = \sum_{j=1}^k f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j})) \cdot \ell_j(x) \quad ; \quad k \leq n \quad ;$$

és $\ell_j(x)$ = az x_{n-k+j} -edik alapponthoz

tartozó Lagrange féle alappolinom.

(3)-ban f -et $P_{k-1,n}(x)$ -szel helyettesítve:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1,n}(x) dx = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[\sum_{j=1}^k f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j})) \cdot \ell_j(x) \right] dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \sum_{j=1}^k \left[f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j})) \cdot \int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_j(x) dx \right]$$

Itt az $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_j(x) dx$ az f jobb oldalától független! Ezért külön számolhatók az x_i -k ismeretében

Most az $y(x_{n-k+j})$ pontos értékeket y_{n-k+j} numerikus közelítésekkel helyettesítve kajuk az un. $(f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j})))$ értékeket $f_{n-k+j} := f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j}))$ közelítéssel az ADAMS-BASHFORTH lineáris többlépéses módszereket (1) differenlet megoldására:

Legyen y_0, y_1, \dots, y_{k-1} adott kezdeti értékek, és

$$(4) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot [\beta_{k_1} \cdot f_{n-k+1} + \beta_{k_2} \cdot f_{n-k+2} + \dots + \beta_{k_k} \cdot f_n]$$

$n = k - 1, k, k + 1, \dots$

k lépéses explicit AB módszer, ahol

$$h\beta_{k_j} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_j(x) dx \text{ -ezek az AB módszer együtthatói}$$

$$k = 1 : \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot \beta_{1_1} \cdot f_n \text{ ahol } h \cdot \beta_{1_1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_1(x) dx \text{ ahol } \ell_1(x) \equiv 1$$

azaz $h \cdot \beta_{1_1} = h \Rightarrow \beta_{1_1} = 1$ tehát $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$

visszakaptuk az explicit Euler-módszert.

$$k = 2 : \quad (4) \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot \beta_{2_1} f_{n-1} + h \cdot \beta_{2_2} f_n$$

$$h \cdot \beta_{2_1} := \int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_1(x) dx \quad ; \quad h \cdot \beta_{2_2} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_2(x) dx$$

A Lagrange-féle alappolinom: $\ell_1(x) = \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n}$; $\ell_2(x) = \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$

$$\Rightarrow h \cdot \beta_{2_1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n} dx = \frac{1}{-h} \cdot \frac{(x - x_n)^2}{2} \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} = \frac{h}{2} \Rightarrow \beta_{2_1} = \frac{1}{2}$$

$$h \cdot \beta_{2_2} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} dx = h \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \beta_{2_2} = \frac{3}{2}$$

azaz $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [-f_{n-1} + 3f_n]$; y_0, y_1 kezdeti értékekkel.

8.2. Az Adams-Bashforth módszer együtthatói k függvényében, táblázatban

k	β_{k_1}	β_{k_2}	β_{k_3}	β_{k_4}	β_{k_5}
1	1				
2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$			
3	$\frac{15}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{23}{12}$		
4	$-\frac{9}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{55}{24}$	
5	$\frac{251}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{1901}{720}$

8.3. Az Adams-Bashforth módszer lokális és globális hibája

9 Definíció A k lépéses módszer lokális hibája az $y(x_{n+1})$ pontos érték, és a (4)-beli \tilde{y}_{n+1} numerikus érték különbsége ha (4)-be a pontos $y(x_i)$ értéket írjuk be.

$$d(x_{n+1}, h) = y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h \cdot [\beta_{k_1} f(x_{n-k+1}, y(x_{n-k+1})) + \dots + \beta_{k_k} f(x_n, y(x_n))]$$

3 Tétel Ha a k lépéses AB módszer lokális hibájára érvényes a következő becslés: $d(x_{n+1}, h) = \mathcal{O}(h^{k+1})$ akkor a globális hiba: $\mathcal{O}(h^k)$

9. Implicit típusú többlépéses módszerek. Az Adams-Moulton típusú k -lépéses módszerek levezetése

9.1. Az Adams-Moulton módszer

1926-ban Moulton az f függvényt k -adfokú interpolációs polinommal közelítette:

$(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$ pontot is hozzávesszük az alappontokhoz:

$$P_{k,n}(x) = \sum_{j=1}^{k+1} f(x_{n-k+j}, y(x_{n-k+j})) \cdot \ell_j(x) \text{ ahol } f_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}) \text{ miatt implicit módszer.}$$

Az előző gondolatmenetet megismételve kapjuk az AM implicit k -lépéses módszereket y_0, \dots, y_k, y_{k+1} kezdeti értékekkel.

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot [\beta_{k_1} \cdot f_{n-k+1} + \dots + \beta_{k_k} \cdot f_n + \beta_{k_{k+1}} \cdot f_{n+1}]$$

$$k = 0, 1, 2, \dots ; \quad n = k - 1, k, k + 1, \dots$$

$$\text{ahol } h \cdot \beta_{k_j} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \ell_j(x) dx$$

$k = 0$: implicit Euler-módszer

$k = 1$: trapézmódszer (2.rendű)

9.2. Az Adams-Moulton módszer együtthatói k függvényében, táblázatban

k	β_{k_1}	β_{k_2}	β_{k_3}	β_{k_4}
0	1			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
2	$-\frac{1}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{5}{12}$	
3	$\frac{1}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{9}{24}$

9.3. Az Adams-Moulton módszer lokális és globális hibája

4 Tétel Az Adams-Moulton módszer lokális hibája:

$$d(x_{n+1}, h) = \mathcal{O}(h^{k+2}), \text{ a globális hibája:}$$

$$\mathcal{O}(h^{k+1})$$

azaz a k lépéses implicit AM módszer rendje $k + 1$.

10. Előadás

10. Prediktor-korrektor típusú módszerek

10.1. Prediktor-korrektor típusú módszerek fogalma

Tekintsük az implicit trapézmódszert (AM $k=1$ eset).

$$(1) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$k = 1$; $n = 0, 1, 2, \dots$; y_0, y_1 kezdőértékek adottak

Ez implicit egyenlet y_{n+1} -re.

Belátható, hogy az (1) egyenlet egyszerű iterációval megoldható, az iterációs sorozat tart (1) egyértelmű megoldásához, ha $f \in \mathcal{Lipsitz}$, és h kellően kicsi.

Az iteráció a következő: $y_{n+1}^{[0]}$ adott

$$(2) \text{ (korrektor)} \quad y_{n+1}^{[m+1]} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[m]})]$$

Elvileg ezt az iterációt addig kellene végezni, amíg konvergenciát nem kapunk.

A gyakorlatban csak néhány (M) iterációt végzünk.

Általában $M = 1$ vagy 2 csak ritkán több.

Kell az $y_{n+1}^{[0]}$ kezdőérték, amit egy többlépéses módszer segítségével kapunk meg. (Most kétlépéses AB módszerrel)

$k = 2$

$$(3) \quad y_{n+1}^{[0]} = y_n + \frac{h}{2} [-f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 3f(x_n, y_n)] \text{ (prediktor)}$$

A (3) és (2) formulák egymásutáni alkalmazását Prediktor-Korrektor módszernek (vagy PAR-nak) nevezzük.

10.2. Néhány példa Prediktor-Korrektor típusú módszerekre

Lehet (predictor-evaluation-corrector):

PEC : Adott $y_{n+1}^{[0]}$ (3)-ból, majd $f_{n+1}^{[0]} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[0]}) \longrightarrow$ Corrector (2): $\Rightarrow y_{n+1}^{[1]}$.
 Ezt ismételtjük. (itt csak 1 iterációt végeztünk)

$P(EC)^2$: Most 2 iterációt számolunk:
 Végül $y_{n+1}^{[2]}$ és $f_{n+1}^{[1]} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[1]})$ értékünk van!

$(EC)^2E$: Az előzőek után még egy függvénykiértékelést végzünk:
 $y_{n+1}^{[2]}$ -vel: $f_{n+1}^{[2]} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[2]})$

$PECE$: $x_0 = a$; $y(x_0) = y_0$; $x_{n+1} = x_n + h$; $h = \frac{b-a}{N}$; $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$

P $y_{n+1}^{[0]} = y_n^{[1]} + \frac{h}{2} \left[-f(x_{n-1}, y_{n-1}^{[1]} + 3f(x_n, y_n^{[1]}) \right]$
 E $f_{n+1}^{[0]} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[0]})$
 C $y_{n+1}^{[1]} = y_n^{[1]} + \frac{h}{2} \left[f(x_n, y_n^{[1]}) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[0]}) \right]$
 E $f_{n+1}^{[1]} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{[1]})$

11. Általános lineáris többlépéses módszerek és stabilitásuk

11.1. A lineáris többlépéses módszerek általánosítása (Dahlquist)

Az eddigi un. klasszikus módszerek is a következő általános forma speciális eseteiként állnak elő:

Adottak y_0, y_1, \dots, y_{k-1} kezdőértékek és legyen (LMM)(lin.többl.m.)

$$(1) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot y_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, y_{n+j})$$

ahol α_j, β_j a módszer állandói (paraméterei, együtthatói).

Az ilyen alakú módszereket **általános lineáris többlépéses módszereknek** nevezzük.

Példa: trapézmódszer: $y_{n+1} - y_n = h \left[\frac{1}{2} f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right]$

itt $\alpha_0 = -1$; $\alpha_1 = 1$; $\beta_0 = \frac{1}{2}$; $\beta_1 = \frac{1}{2}$

(1)-hez DAHLQUIST hozzárendel un. első és második karakterisztikus polinomokat:
 $\varrho(\zeta)$ és $\sigma(\zeta)$ $\zeta \in \mathbb{C}$ ahol

$$\varrho(\zeta) := \sum_{j=0}^k \alpha_j \zeta^j \quad ; \quad \sigma(\zeta) := \sum_{j=0}^k \beta_j \zeta^j$$

11.2. Az általános lineáris többlépéses módszerek stabilitása és konzisztenciája

Az (1) módszer konvergenciájához nem elég,

hogy a lokális diszkretizációs hiba tartson a 0-hoz ($d_{n+1} \rightarrow 0$; $h \rightarrow 0$)

A konvergencia szükséges feltétele, hogy $\max_{0 \leq n \leq N} \left| \frac{d_{n+1}}{h} \right| \rightarrow 0$ ha $h \rightarrow 0$

A módszert ekkor konzisztensnek nevezzük.

5 Tétel Ha az (1) és ϱ, σ karakterisztikus polinomjaira teljesül, hogy

(*) $\varrho(1) = 0$ és $\varrho'(1) - \sigma(1) = 0$ ekkor a LMM konzisztens.

10 Definíció Az (1) módszer **zéró-stabil**, ha a kezdeti adatok perturbációs hibája esetén az y_n -ek hibája is kicsi marad kellően kis lépéshossz esetén.

6 Tétel (1) LMM zéró-stabil \Leftrightarrow (gyökkritérium) ha ρ polinom minden gyöke az egységkörön, ill azon belül van, továbbá az egységkörön lévő gyökök mind egyszeresek.

7 Tétel (1) módszer konvergens \Leftrightarrow konzisztens és zéró-stabil.

8 Tétel (1) módszer konvergens \Leftrightarrow (*) és gyökkritérium teljesül.

11. Előadás

12. Peremfeladatok megoldása véges differenciámódszerrel lineáris és nemlineáris peremfeladatok esetén

12.1. Lineáris peremfeladatok

Tekintsük a következő peremfeladatot (lineáris)

$$(1) \quad \begin{aligned} y'' &= p(x)y' + q(x)y + r(x) \\ y(a) &= \alpha \quad ; \quad y(b) = \beta \end{aligned}$$

Ötlet: az $x_i \in [a, b]$ felírt (1) egyenletet approximáljuk (közelítjük) úgy, hogy az egyenletben a deriváltakat a differenciáhányadosokkal helyettesítjük.

$$\text{Legyen } N \in \mathbb{N} \quad ; \quad x_i = a + ih \quad ; \quad i = 0 \dots N + 1 \quad ; \quad h := \frac{b - a}{N + 1}$$

A differenciálhányadosokat helyettesítsük differnciáhányadosokkal.

Ehhez írjuk fel a Taylor-polinomot x_i középpontal x_{i+1} és x_{i-1} -ben, ahol y az (1) pontos megoldása.

$$\begin{aligned} \text{Megj.: } y'(x_i) &\approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} \quad ; \quad y''(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} \\ y(x_{i+1}) &= y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+) \quad ; \quad \xi_i^+ \in (x_i, x_{i+1}) \\ y(x_{i-1}) &= y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^-) \quad ; \quad \xi_i^- \in (x_{i-1}, x_i) \end{aligned}$$

Ezeket összeadva és rendezve:

$$(2) \quad \begin{aligned} y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}) &= h^2y''(x_i) + \frac{h^4}{24} [y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)] \Rightarrow \\ \Rightarrow y''(x_i) &= \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot y^{(4)}(\xi_i) \quad ; \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{aligned}$$

A második differenciáhányados a második deriváltat $\mathcal{O}(h^2)$ -tel approximálja ($y \in C^{(4)}[a, b]$)

Az első derivált közelítése:

$$(3) \quad \begin{aligned} & \frac{y(x_{i+1}) + y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(\eta_i^+) - y(x_{i-1}) - y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(\eta_i^-)}{2h} \\ \Rightarrow y'(x_i) &= \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i) \end{aligned}$$

\Rightarrow az elsőrendű centrális differenciáhányados $\mathcal{O}(h^2)$ -tel (másodrendben) approximálja $y'(x_i)$ -t.

A (2),(3)-at (1)-be írva az x_i pontban \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} = p(x_i) \cdot \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) + \mathcal{O}(h^2)$$

Ez alapján a következő véges differenciámódszert kapjuk (1) megoldására:

(y_i numerikus approximáltja $y(x_i)$ -nek)

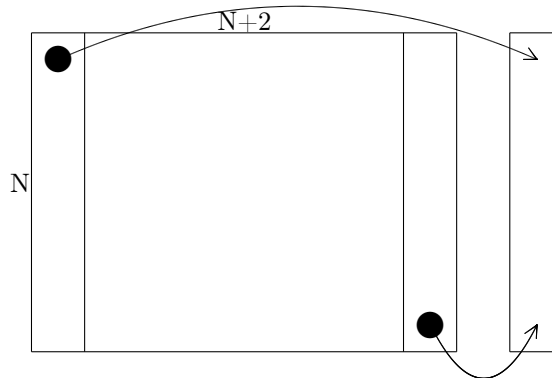
$$(4) \quad \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \underbrace{p(x_i)}_{p_i} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i + r(x_i) \quad ; \quad i = 1..N$$

(4)-ből $N \times N$ -es LER y_i -k meghatározására, tridiag mátrixú

$$\boxed{-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)y_{i-1} + \left(2 + h^2q(x_i)\right)y_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)y_{i+1} = -h^2r(x_i)}$$

$$i = 1..N \quad ; \quad h \rightarrow 0 \quad ; \quad y_i \xrightarrow{d(h^2)} y(x_i)$$

ide áttesszük és máris $N \times N$ -es lesz!



12.2. Nemlineáris peremfeladatok

Tekintsük a következő nemlineáris peremfeladatot:

$$(6) \quad y'' = f(x, y, y') \quad ; \quad x \in [a, b] \quad ; \quad y(a) = \alpha \quad ; \quad y(b) = \beta$$

9 Tétel

Tfh.: $f, f_y, f_{y'}$ folytonosak, $(f_y = \frac{\partial f}{\partial y})$

$$\mathcal{D} := \left\{ (x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty \right\}$$

$$f_y \geq \delta > 0 \quad \mathcal{D}\text{-n}$$

$$\exists k, \ell \text{ állandók, hogy } k := \max_{(x, y, y') \in \mathcal{D}} |f_y| \quad ; \quad \ell := \max_{(x, y, y') \in \mathcal{D}} |f_{y'}|$$

Ekkor (6)-nak $\exists!$ megoldása.

Példa: $y'' = 2x \cdot y^2 \cdot (y')^3 = f(x, y, y')$

$$f_x = 2y^2(y')^3$$

$$f_y = 4xy(y')^3$$

$$f_{y'} = 2xy^2 \cdot 3(y')^2$$

(6)-ba a deriváltak helyett a differenciahányadosokat beírva \Rightarrow

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} = f\left(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h}\right) \quad ; \quad F(y_0, \dots, y_{N+1}) = 0$$

Ebből a következő nemlineáris egyenletrendszer adódik y_i -kre térve:

$$\begin{aligned}
& + 2y_1 - y_2 - \alpha + h^2 f(x_1, y_1, \frac{y_2 - \alpha}{2h}) & = 0 \\
& - y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}) & = 0 \\
& \vdots & \\
& - y_{N-2} + y_{N-1} - y_N + h^2 f(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}) & = 0 \\
& - y_{N-1} + 2y_N - \beta + h^2 f(x_N, y_N, \frac{\beta - y_{N-1}}{2h}) & = 0
\end{aligned}
\tag{7}$$

Ha $h < \frac{2}{L}$, akkor (7)-nek $\exists!$ megoldása (Newton-iterációval)

Newton egyenletrendszer linearizálva: $F(\underline{y}) = 0$; $x_0 \xrightarrow{\text{kifejezzük}} x_1$

$$\begin{aligned}
F(x) &= f(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) \\
0 &= F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) \quad \text{így } 0\text{-ra} \\
(**) \quad x_1 &= x_0 - \underbrace{[F'(x_0)]^{-1}}_{\text{Jakobi-mátrix}} \cdot F(x_0) \\
x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}
\end{aligned}$$

A (7) Jakobi-mátrixa tridiagonális és nonsinguláris!

A Newton-módszer konvergens lesz, ha a kezdőérték kellően közel van a pontos megoldáshoz.

Sokszor (**) helyett a következő LER-t oldjuk meg:

$$J(y_1, \dots, y_N) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \\ v_N \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} +2y_1 & -y_2 & -\alpha & +h^2 f(x_1, y_1, \frac{y_2 - \alpha}{2h}) \\ -y_1 & +2y_2 & -y_3 & +h^2 f(x_2, y_2, \frac{y_3 - y_1}{2h}) \\ \vdots & & & \vdots \\ -y_{N-2} & +y_{N-1} & -y_N & +h^2 f(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N - y_{N-2}}{2h}) \\ -y_{N-1} & +2y_N & -\beta & +h^2 f(x_N, y_N, \frac{\beta - y_{N-1}}{2h}) \end{bmatrix}$$

$$y_i^{[k+1]} = y_i^{[k]} + v_i \Rightarrow y_i^{[k+1]} - y_i^{[k]} = v_i$$

$$J(y_1, \dots, y_N) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_N}{\partial y_N} \end{bmatrix} ; \quad F(y_1, \dots, y_N) = \begin{bmatrix} F_1(y_1, \dots, y_N) \\ \vdots \\ F_N(y_1, \dots, y_N) \end{bmatrix}$$

12. Előadás

13. Rayleigh-Ritz módszer (variációs módszer) közösleges diff-egyenletek peremfeladatainak megoldására

13.1. Variációs elv

Tekintsük a következő peremfeladatot:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & -\frac{d}{dx} \left(p(x) \cdot \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y(x) = f(x) \quad ; \quad x \in [0, 1] \\
& y(0) = y(1) = 0
\end{aligned}$$

Példa: $y(x)$ = az egységnyi rúd kitérése
 $p(x)$ = feszültség a rúdban
 $q(x)$ = keresztmetszet (változik)
 $f(x)$ = a rúdra ható erő x -ben

10 Tétel Legyen $p(x) \in C^1[0, 1]$; $q(x), r(x) \in C[0, 1]$

és $\exists \rho > 0$: $p(x) \geq \rho > 0$ $x \in [0, 1]$
 $q(x) > 0$

Ekkor az (1) peremfeladatnak $\exists!$ $y(x) \in C^2[a, b]$ megoldása.

Érdekes, hogy az (1) feladat megoldása (mint sok más fizikai jelenséget leíró esetben) egy un. variációs feltételnek (tulajdonságnak) tesz eleget. Ez az un. variációs elv a Rayleigh-Ritz módszer alapja. Az (1) feladatra a variációs elv megfogalmazása a következő:

11 Tétel Legyen $C_0^2[0, 1] := \left\{ u \in C^2[0, 1] \mid u(0) = u(1) = 0 \right\}$.

Ekkor $y \in C_0^2[0, 1]$ függvény az (1) feladatnak egyértelmű megoldása \Leftrightarrow ha y az az egyértelmű függvény $C_0^2[0, 1]$ -ben, amelyik minimalizálja a következő integrált (funkcionált):

$$(2) \quad I[u] := \int_0^1 \{ p(x)[u'(x)]^2 + q(x)[u(x)]^2 - 2f(x)u(x) \} dx$$

$u \in C_0^2[0, 1]$

13.2. A Rayleigh-Ritz módszer megvalósítása

Ritz ötlete: nem az egész ∞ dimenziós C_0^2 függvénytéren minimalizáljuk a (2) funkcionált, hanem annak véges dimenziós alterén (n dimenziós alterén). Várjuk, hogy ha $n \rightarrow \infty$ ($h_{\max} \rightarrow 0$) akkor a véges dimenziójú y_n minimalizáló függvények sorozata tart a (2) funkcionált C_0^2 -ben minimalizáló y függvényhez, ami (1) megoldása is lesz!

Legyenek $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ lineárisan független "bázis"függvények $[0, 1]$ -en, továbbá $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$. Keressük $I[u]$ -t minimalizáló függvényt a következő alakban:

$$(3) \quad y_n := \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$

Ezt (2)-be beírva a következő funkcionál minimumát keressük:

$$(*) \quad I[y_n] = \int_0^1 p(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i'(x) \right]^2 + q(x) \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \right]^2 - 2f(x) \cdot \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \stackrel{?}{=} \min?$$

Tehát keressük a c_i ($i = 1 \dots n$) együtthatókat, amelyekre $I[y_n] = \min$.

I a c_1, \dots, c_n változók függvénye,

I minimumának szükséges feltétele, hogy a parciális deriváltjai legyenek 0-k, azaz

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial c_j} = 0 \quad ; \quad j = 1 \dots n$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial c_j} = \int_0^1 p(x) 2 \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) \right] + q(x) 2 \left[\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) \varphi_j(x) \right] - 2f(x) \varphi_j(x) = 0 \quad ; \quad j = 1 \dots n$$

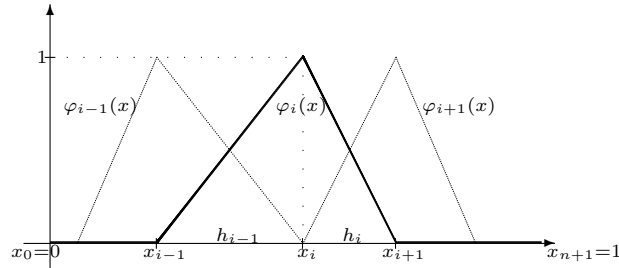
$$(5) \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^1 (p(x) \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)) \right\} dx \cdot c_i = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad ; \quad j = 1 \dots n$$

Ez lineáris egyenletrendszer ad c_i -re. A c_i ismeretlenek együtthatói meg p, q, f és a bázisfüggvények ismeretében kiszámíthatóak.

I. fokú eset: Legyenek a φ_i bázisfüggvények szakaszonként lineáris függvények (I.fokú spline-ok).

Legyen $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < 1 = x_{n+1}$; $h_i := x_{i+1} - x_i$

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0, x_{i-1}] \\ \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} & \text{ha } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i} & \text{ha } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{ha } x \in [x_{i+1}, 1] \end{cases} \quad ; \quad i = 1 \dots n$$



$$\begin{aligned} \int_0^1 (p \varphi'_1 \varphi'_1 + q \varphi_1 \varphi_1) dx \cdot c_1 &= \int_0^1 f \varphi_1 dx \\ \int_0^1 (p \varphi'_1 \varphi'_2 + q \varphi_1 \varphi_2) dx \cdot c_1 + \int_0^1 (p \varphi'_2 \varphi'_2 + q \varphi_2 \varphi_2) dx \cdot c_2 &= \int_0^1 f \varphi_2 dx \\ \int_0^1 (p \varphi'_1 \varphi'_3 + q \varphi_1 \varphi_3) dx \cdot c_1 + \int_0^1 (p \varphi'_2 \varphi'_3 + q \varphi_2 \varphi_3) dx \cdot c_2 + \int_0^1 (p \varphi'_3 \varphi'_3 + q \varphi_3 \varphi_3) dx \cdot c_3 &= \int_0^1 f \varphi_3 dx \\ &\vdots \\ \int_0^1 (p \varphi'_1 \varphi'_n + q \varphi_1 \varphi_n) dx \cdot c_1 + \int_0^1 (p \varphi'_2 \varphi'_n + q \varphi_2 \varphi_n) dx \cdot c_2 + \dots + \int_0^1 (p \varphi'_n \varphi'_n + q \varphi_n \varphi_n) dx \cdot c_n &= \int_0^1 f \varphi_n dx \end{aligned}$$

A bázisfüggvények speciális alakja miatt tridiag mátrixú egyenletrendszer

lesz, amit könnyű megoldani c_i -kre $\Rightarrow y_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ közelítő megoldást meghatároztuk.

12 Tétel A tett feltételek mellett:

$$|y_n(x) - y(x)| = \mathcal{O}(h_{\max}^2) \quad ; \quad x \in [0, 1]$$

$$|y_n(x) - y(x)| \leq c \cdot h^2 \quad ; \quad \exists c$$

Tartalomjegyzék

1. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei	2
1.1. Közönséges	2
1.2. Parciális	2
1.3. Elsőrendű	2
1.4. Elsőrendű differenciálegyenletrendszer	2
1.5. Másodrendű	2
1.6. n-edrendű	2
1.7. Differenciálegyenletek megoldási módszerei	3
2. Kvázianalitikus módszerek	3
2.1. Picard iteráció	3
2.2. Taylor-sor módszer	4
3. Numerikus módszerek differenciálegyenletek megoldására	5
3.1. Diszkretizálással	5
3.1.1. Explicit Euler-módszer	5
3.2. Integrálással	5
3.2.1. Implicit Euler-módszer	6
3.2.2. Trapéz-módszer és Θ -módszer	6
4. Numerikus módszerek lokális és globális hibája	7
4.1. Euler- és Trapéz-módszer lokális hibája	7
4.2. A numerikus módszer globális hibája és rendje	7
4.2.1. Gronwall-lemma	8
5. Runge-Kutta típusú egy lépéses módszerek. Néhány klasszikus első-, másod- és negyedrendű RK módszer	9
5.1. Explicit Runge-Kutta módszerek	10
5.1.1. Elsőrendű Runge-Kutta módszerek ($\ell = 1$)	10
5.1.2. Másodrendű Runge-Kutta módszerek ($\ell = 2$)	10
5.1.3. Harmadrendű explicit Runge-Kutta módszerek ($\ell = 3; p = 3$) Nyström	11
5.1.4. Klasszikus negyedrendű explicit Runge-Kutta módszerek ($\ell = 4; p = 4$)	11
6. Implicit Runge-Kutta módszerek (IRK), tétel az iteráció konvergenciájáról	12
6.1. Az IRK-módszer és tulajdonságai	12
6.2. Konvergenciatétel	12
6.3. Példák implicit Runge-Kutta módszerekre	14
7. Az egy lépéses módszerek lineáris stabilitása. A módszerek konzisztenciája és konvergenciája	14
7.1. A stabilitás fogalma	14
7.2. Euler, Trapéz és RK-módszer stabilitása	15
8. Lineáris többlépéses módszerek. Az Adams-Bashforth módszerek levezetése	16
8.1. Az Adams-Bashforth módszer	16
8.2. Az Adams-Bashforth módszer együtthatói k függvényében, táblázatban	17
8.3. Az Adams-Bashforth módszer lokális és globális hibája	17
9. Implicit típusú többlépéses módszerek. Az Adams-Moulton típusú k-lépéses módszerek levezetése	17
9.1. Az Adams-Moulton módszer	17
9.2. Az Adams-Moulton módszer együtthatói k függvényében, táblázatban	18
9.3. Az Adams-Moulton módszer lokális és globális hibája	18

10. Prediktor-korrektor típusú módszerek	18
10.1. Prediktor-korrektor típusú módszerek fogalma	18
10.2. Néhány példa Prediktor-Korrektor típusú módszerekre	19
11. Általános lineáris többpételes módszerek és stabilitásuk	19
11.1. A lineáris többpételes módszerek általánosítása (Dahlquist)	19
11.2. Az általános lineáris többpételes módszerek stabilitása és konzisztenciája	20
12. Peremfeladatok megoldása véges differenciámódszerrel lineáris és nemlineáris peremfeladatok esetén	20
12.1. Lineáris peremfeladatok	20
12.2. Nemlineáris peremfeladatok	22
13. Rayleigh-Ritz módszer (variációs módszer) közönséges diffegyenletek peremfeladatainak megoldására	23
13.1. Variációs elv	23
13.2. A Rayleigh-Ritz módszer megvalósítása	24