ANALÍZIS I.
Bártfai Pál

1. Halmazok

1.1. Halmazok, műveletek halmazokkal

D. A *halmaz* meghatározott dolgok összessége.

A halmaz megadásánál lényeges követelmény, hogy egyértelműen el lehessen dönteni, hogy egy objektum beletartozik-e a halmazba, vagy nem.

Jelölések:

$a \in A$: a eleme az A halmaznak,
$a \notin A$: a nem eleme az A halmaznak,
$A \subset B$: A részhalmaza B-nek, vagyis A minden eleme eleme a B halmaznak,
$A \supset B$: A tartalmazza B-t, B részhalmaza A-nak,
$A = B$: az A és a B halmaz egyenlő, vagyis elemeik közösek.

A $\subseteq$ és a $\supseteq$ jelöléseket nem használjuk. Nyilván $A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subset B$ és $A \supset B$.

A halmaz megadása történhet $A = \{a, b, c\}$ alakban az elemek felsorolásával, vagy $A = \{x$: x-re vonatkozó állítás$\}$ alakban, ahol az A elemei azon x-ek, melyre az állítás teljesül.

Műveletek:

I. Egyesítés művelete: $A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ vagy } x \in B\}$.

Műveleti szabályok:

1. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás)
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás)
3. $A \cup B = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subset B$ (elnyelési tulajdonság).

II. Metszet művelete: $A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ és } x \in B\}$.

Műveleti szabályok:

1. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás)
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás)
3. $A \cap B = B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A \supset B$ (elnyelési tulajdonság).
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (disztributív tulajdonság)
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (disztributív tulajdonság).

III. Kivonás művelete: $A - B = \{x\colon x \in A \text{ és } x \notin B\}$.

D. *Üres halmaznak* nevezzük azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, jelölése Ø.
D. A és B halmazok *diszjunktak*, ha nincs közös elemük, azaz $A \cap B = Ø$. Több halmaz diszjunkt, ha bármely kettőnek nincs közös eleme.

1.2. Függvény

D. Az $f\colon X \to Y$ vagy röviden az f *függvény* hozzárendelés, mely az X halmaz minden eleméhez hozzárendel egy Y-beli elemet.

D. Az X az f függvény *értelmezési tartománya*, amit $D(f)$-fel is fogunk jelölni (angol: domain). Az Y azon elemeit, amelyek a hozzárendelés során szóba jönnek az f *értékkészletének* nevezzük és $R(f)$-fel jelöljük (angol: range).

D. Az f: $X \to Y$ függvényt

a) *szürjektívnek* nevezzük, ha $R(f) = Y$,
b) *injektívnek* nevezzük, ha $x \neq x'$ esetén $f(x) \neq f(x')$,
c) *bijektívnek* nevezzük, ha injektív és szürjektív.

(Szürjektív, ha a leképezés nem Y-ba, hanem Y-*ra* történik, injektív, ha a leképezés kölcsönösen egyértelmű.)

D. Legyen f: $X \to Y$ és g: $Y \to Z$, akkor $h = g \circ f$: $X \to Z$, az a függvény ami $x \in X$-hez az $g(f(x)) \in Z$ értéket rendeli hozzá. $g \circ f$ függvényt *összetett függvénynek* nevezzük.

D. Legyen f: $X \to Y$ bijektív függvény. Az f függvény *inverzének* nevezzük az f^{-1}:$Y \to X$ függvényt, melyre $y = f(x)$ esetén $f^{-1}(y) = x$.

A bijektív tulajdonság az inverz függvény létezéséhez kell, ha az $y = f(x)$ mellett $y = f(x')$ is teljesül, akkor $f^{-1}(y)$ nem definiálható egyértelműen: értéke x is és x' is lehetne. Nyilván, ha f^{-1} létezik és $h = f^{-1} \circ f$, akkor $h(x) = x$.

A továbbiakban **N** jelöli a természetes számok halmazát: **N** = {1, 2, 3, ...}.

D. Az f: $\mathbf{N} \to Y$ függvényt (az Y elemeiből álló) *sorozatnak* nevezzük. Az f függvény megadása legkényelmesebben úgy történik, hogy megadjuk azokat az y_1, y_2, y_3, ... Y halmazhoz tartozó elemeket, melyekre $f(n) = y_n$ (n = 1, 2, ...). Ez a sorozat szokásos felírási módja.

2. Valós számok

2.1. A valós számok bevezetése

A természetes számok **N** halmaza az összeadás és a szorzás műveletére zárt, vagyis a műveletek **N**-en belül elvégezhetők. Nem végezhető el azonban a kivonás és az osztás. A kivonás elvégezhetőségének az érdekében bővítsük ki **N**-et a 0-val és a negatív egészekkel. Az így előálló számhalmaz az egész számok halmaza, jelölése **Z**. Az osztás elvégzésének érdekében be kell vezetni a tört számokat, vagyis azokat a számokat, melyek két egész hányadosaként előállnak. Az így kapott számhalmaz a racionális számok halmaza, jelölése **Q**. **Q**-ban az osztás is - a 0-val való osztás kivételével, de ezt mindig ki fogjuk zárni - elvégezhető. Az alapműveletekre nézve zárt halmazt *számtestnek* nevezzük.

Már Euklidesz észrevette, hogy a racionális számok halmaza - bár a négy alapművelet mindig elvégezhető - nem elég bő, ugyanis az egységnyi oldalú négyzet átlójának a hossza racionális számmal nem adható meg. Tegyük fel ellenkezőleg, hogy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol p és q relatív prímek (vagyis a törtet nem egyszerüsíthető alakban írtuk fel), akkor $2q^2 = p^2$. Ebből látható, hogy p páros, legyen $p = 2k$. Ezt felhasználva $q^2 = 2k^2$, azaz q is páros, ami ellentmond a relatív prím tulajdonságnak.

Ha a racionális számhalmazt a $\sqrt{2}$-vel bővítjük, azaz képezzük az $a\sqrt{2} + b$ számok halmazát ($a \in \mathbf{Q}$, $b \in \mathbf{Q}$), akkor újra számtestet kapunk, azonban ez sem tartalmazza a $\sqrt{3}$-at, $\sqrt{5}$-öt, $\sqrt[3]{2}$-t, stb. Ilyen konkrét bővítési lépésekkel nem jutunk célhoz.

A valós számok definiálása hasonlatos a geometriában az egyenes definiálásához: alapfogalomnak tekintjük, és a tulajdonságaival jellemezzük. A tulajdonságokat három csoportba soroljuk.

1. Műveleti szabályok. A valós számok tartalmazzák **Q**-t és számtestet akotnak. Definiálva van az összeadás és a szorzás művelete. Mindkét művelet kommutatív ($a + b = b + a$, $ab = ba$) és asszociatív ($a + (b + c) = (a + b) + c$ és $a(bc) = (ab)c$). A két műveletet a disztributív szabály köti össze: $a(b + c) = ab + ac$. Mindkét műveletnek van neutrális eleme: az összeadásnál ez a 0, a szorzásnál az 1, melyre $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$. Mindkét műveletnek van inverz művelete: bármely a-hoz van olyan x, hogy $a + x = 0$, és ha $a \neq 0$, akkor van olyan y hogy $ay = 1$. Az ilyen x-et $-a$-val, y-t $\frac{1}{a}$-val jelöljük. A kivonás művelete $a - b = a + (-b)$, az osztás művelete $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ képlettel definálható.
2. Rendezés. A valós számok között < jellel jelölt rendezési reláció definiálható. Bármely $a \neq b$ számokra vagy $a < b$, vagy $b < a$ teljesül (de mindkettő nem). A rendezési reláció tranzitív: ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$. A rendezési reláció összhangban van a műveletekkel, vagyis $a < b$ esetén bármely c-re $a + c < b + c$, és bármely c-re, melyre $0 < c$, $ac < bc$.

Az egyenlőtlenségek kényelmesebb kezelése érdekében $a > b$ ugyanazt jelenti, mint $b < a$, és $a \leq b$ azt jelenti, hogy vagy $a < b$, vagy $a = b$. Hasonlóan értelmezhető a $\geq$ jel is.

Intervallumnak nevezzük azon valós számok halmazát, melyek két adott szám közé esnek. pontosabban az $[a, b]$ zárt intervallum definíciója $[a, b] = \{x\colon a \leq x \leq b\}$, az (a, b) nyílt intervallum: $(a, b) = \{x\colon a < x < b\}$. Értelemszerűen definiálhatók az $[a, b)$ és az $(a, b]$ félig zárt intervallumok is, pl. $[a, b) = \{x\colon a \leq x < b\}$.

3. Teljességi axióma (Cantor): Tetszőleges $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$ fogyó, zárt intervallumokból álló sorozatra $\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$.

Ez a tulajdonság fejezi ki, hogy a számegyenesről már további számok nem hiányoznak. Ez az axióma teszi lehetővé a valós számoknak végtelen tizedes törttel történő megközelítését, pontosabban azt, hogy egy végtelen tizedes tört tényleg megad egy valós számot.

Összefoglalva a valós számok a testaxiómáknak, a rendezési axiómáknak és a teljességi axiómának eleget tevő **Q**-t tartalmazó számhalmaz. Jelölése **R**. A valós számok halmazát számegyenesnek, 1-dimenziós Euklideszi térnek is nevezzük.

D. A valós számokból álló $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szám n-esek halmazát *n-dimenziós* Euklideszi térnek nevezzük. Jelölése $\mathbf{R}^n$. (Az n-dimenziós terek szerkezetével később fogunk foglalkozni.)

2.2. Halmazok számossága

Az üres halmaz számossága 0, a véges halmaz számossága az elemeinek a száma. A problémát csak a végtelen halmazok okozzák.

D. Két halmaz, A és B *egyenlő számosságú*, ha van olyan f: $A \to B$ függvény, amely bijektív.

A definíció alapján az **N** és a pozitív páros számok hamazának a számossága megegyezik, noha az utóbbi részhalmaza az előbbinek. A bijektív f függvény $f(x) = 2x$.

D. Az A halmaz megszámlálható, ha A üres, ha A véges halmaz, vagy ha A **N**-nel egyenlő számosságú. Ha A végtelen halmaz, de megszámlálható, akkor a számossága *megszámlálhatóan végtelen*.

Ha A **N**-nel egyenlő számosságú, akkor létezik f: $\mathbf{N} \to A$ bijektív függvény, ami azt jelenti, hogy A elemeit sorozatba rendeztük. A megszámlálhatóan végtelen számosság tehát ekvivalens a sorozatba rendezhetőséggel.

T. Ha az A_1, A_2, ... halmazok megszámlálhatóak, akkor egyesítésük is megszámlálható.

B. Rendezzük sorozatba az egyes A_k halmazok elemeit:

A_1: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots$
A_2: $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots$
A_3: $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \ldots$
...

Ún. átlós kiválasztással készítsük el a következő sorozatba rendezést: a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, a_{15}, ... Ha az A_1, A_2, ... halmazok nem voltak diszjuktak, akkor a sorozatban ismétlődések vannak, de ezeket kihagyva a sorozatba rendezés megmarad.

K. A racionális számok halmaza megszámlálható.

B. Legyen az A_k halmaz a k nevezőjű törtek halmaza (akkor is, ha a tört egyszerűsíthető). A_k nyilván megszámlálható, és az A_k-k egyesítése **Q**.

T. Az $[a, b]$ halmaz, ha $a < b$, akkor nem megszámlálható.

B. Tegyük fel, hogy megszámlálható halmaz, akkor létezik olyan f: $\mathbf{N} \to [a, b]$ függvény, amelyik bijektív. Osszuk fel $[a, b]$-t két intervallumra úgy, hogy az osztópont $f(1)$-től különböző legyen. Ekkor valamelyik zárt részintervallum nem tartalmazza $f(1)$-et jelöljük ezt a részintervallumot $[a_1, b_1]$-gyel. Hasonlóan $[a_1, b_1]$ felosztásából kaphatunk egy $[a_2, b_2] \subset$ $\subset [a_1, b_1]$ részintervallumot, mely nem tartalmazza az $f(2)$-t. Az eljárást folytatjuk, a k-adik lépésben kapott új $[a_k, b_k]$ intervallum is része lesz az előzőnek és nem tartalmazza $f(k)$-t. A Cantor axióma szerint az intervallumoknak van közös pontjuk, legyen ez x. Az f bijektív volta miatt valamilyen n-re $f(n) = x$, de mivel $[a_n, b_n]$ nem tartalmazza $f(n)$-et, x-et sem tartalmazhatja, ami ellentmondás.

A nem megszámlálható számosságok között további megkülönböztetéseket lehet tenni, de erre nem térünk ki.

2.3. Korlátos halmazok

Használni fogjuk a $\exists$ és a $\forall$ jelöléseket, a $\exists$ jelölést (rövidítést) mondatban "van olyan"-nak, "létezik"-nek kell olvasni, a $\forall$ jelölést "bármely"-nek.

D. Az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz *felülről korlátos*, ha $\exists K \in \mathbf{R}$, hogy $\forall x \in A$-ra $x \leq K$. A K számot az A halmaz *felső korlátjának* nevezzük. A alulról korlátos, ha $\exists K \in \mathbf{R}$, hogy $\forall x \in A$-ra $x \geq K$. Ez a K szám *alsó korlátja* az A halmaznak. Az A halmaz *korlátos*, ha felülről is és alulról is korlátos.

T. Ha A nem üres és felülről korlátos, akkor létezik a legkisebb felső korlátja.

B. Válasszunk egy $[a_1, b_1]$ intervallumot úgy, hogy b_1 felső korlát legyen, és a_1 ne legyen felső korlát. Mivel A korlátos ilyen tulajdonságú b_1 létezik, mivel A nem üres ilyen a_1 is létezik, hiszen A valamely elemét kiválasztva annál kisebb számot választhatunk a_1-nek. Felezzük $[a_1, b_1]$-et, ha a c_1 felezőpont felső korlát, akkor legyen $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$, ha nem, akkor legyen $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$. $[a_2, b_2]$ tehát újra a fenti tulajdonsággal rendelkező intervallum, és $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$. A felezéses eljárás folytatható. Legyen x az $[a_k, b_k]$ intervallumok közös pontja (Cantor axióma), akkor

a) x felső korlát, mert x-nél nagyobb eleme A-nak nem lehet. Ha ugyanis $a \in A$ és $a > x$, akkor a k megválasztható úgy, hogy $b_k - a_k < a - x$, mert az $[a_k, b_k]$ intervallum hossza kisebbé tehető, mint az adott $a - x > 0$ szám. Ebből $b_k < a$, de akkor b_k nem felső korlát; ami ellentmondás;

b) x-nél kisebb felső korlát nem lehet, mert, ha $x' < x$ felső korlát, akkor a k olyan választásával, hogy $b_k - a_k < x - x'$, elérhető, hogy $a_k > x'$, de akkor x' nem lehet felső korlát, mert a_k sem az.

A tétel állítása alulról korlátos halmazokra alsó korláttal ugyanígy igaz.

D. A legkisebb felső korlátot *felső határnak*, a legnagyobb alsó korlátot *alsó határnak* nevezzük. Az A halmaz *szuprémuma*, melyre a sup A jelölést használjuk, a felső határ, ha A felülről korlátos és nem üres, sup A = = $+\infty$, ha felülről nem korlátos és sup A = $-\infty$, ha A üres. Az A halmaz *infimuma* , jelölve inf A, az alsó határral egyezik meg, ha A alulról korlátos és nem üres, inf A = = $-\infty$, ha alulról nem korlátos és inf A = $+\infty$, ha A üres.

3. Számsorozatok

3.1. Határérték

Az alábbiakban a sorozatok elemei valós számok.

D. Az $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sorozat határértéke a, ha $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists n_0$, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

Jelölése $a_n \to a$, vagy $\lim a_n = a$. Ha félreérthető lenne, akkor feltüntetjük, hogy $n \to \infty$ esetén.

P. Ha $a_n = \frac{1}{n}$, akkor $a_n \to 0$. Válasszunk tetszőlegesen $\varepsilon > 0$-t, akkor $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ biztosan teljesül, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$, vagyis n_0-t tetszőleges $\frac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobb számnak lehet választani.

D. Az a_1, a_2, a_3, ... sorozat *konvergens*, ha $\exists a$, hogy $a_n \to a$. A nem konvergens sorozatokat *divergensnek* is nevezzük.

D. Az a szám *ε-sugarú környezetének* ($\varepsilon > 0$) az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nyílt intervallumot nevezzük.

A határérték definíciójának az átfogalmazása a következő: $a_n \to a$, ha az a $\forall S$ környezetéhez található olyan n_0 küszöbindex, hogy $a_n \in S$, ha $n \geq n_0$.

Ugyancsak ekvivalens átfogalmazás a következő: $a_n \to a$, ha a $\forall S$ környezete véges sok kivétellel a sorozat összes elemét tartalmazza.

T. Ha $a_n \to a$, és $a_n \to b$, akkor $a = b$. (A sorozatnak csak egy határértéke lehet.)

B. Tegyük fel, hogy $a \neq b$, mondjuk $a < b$. Válaszuk meg az ε-t úgy, hogy $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ legyen. Ekkor a ε-sugarú környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, de b ε-sugarú környezetén kívül csak véges sok eleme lehet a sorozatnak, ami ellentmondás.

D. Adott az a_1, a_2, a_3, ... sorozat. Ha az n_1, n_2, n_3, ... egész számokból álló sorozatra fennáll, hogy $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, akkor az $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ sorozatot az a_1, a_2, a_3, ... sorozat *részsorozatának* nevezzük.

T. Ha $a_n \to a$, akkor minden részsorozata is a-hoz konvergál.

B. Vegyük a-nak egy tetszőleges S környezetét, akkor S-en kívülre az a_1, a_2, a_3, ... sorozatnak csak véges sok tagja eshet, de akkor a részsorozatnak is csak véges sok tagja lehet kívül, ami a részsorozat az a-hoz való konvergenciát jelenti.

T. Konvergens sorozat mindig korlátos. (Pontosabban: az $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ halmaz korlátos).

B. Mivel adott ε-hoz $\exists n_0$, hogy $n > n_0$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$, a sorozat n_0 utáni tagjaiból álló halmaz korlátos. Az n_0 előtti tagok véges halmazt alkotnak, de véges halmaz mindig korlátos.

3.2. Végtelen, mint határérték

D. $a_n \to +\infty$ (vagy $\lim a_n = +\infty$), ha $\forall c$-hez $\exists n_0$, hogy $a_n > c$, ha $n \geq n_0$. Ha $a_n \to +\infty$, akkor azt mondjuk, hogy határértéke plusz végtelen, de nem nevezzük konvergensnek a sorozatot (vagyis a sorozat divergens).

Ha azt mondjuk, hogy a sorozatnak létezik a határértéke, akkor mindig véges határértékre gondolunk, hacsak az ettől való eltérést nem hangsúlyozzuk.

A határérték definíciója egységesíthető, ha a $+\infty$ környezeteit a $(c, +\infty)$ intervallumok alkotják. Ekkor az elmondott ekvivalens definíciók a $+\infty$ esetére is érvényesek.

3.3 Összeg, szorzat, hányados határértéke

T. Ha $a_n \to 0$ és a b_n sorozat korlátos, akkor $a_nb_n \to 0$.

B. A b_n sorozat korlátos, tehát van olyan K, melyre $|b_n| < K$, így $|a_nb_n - 0| \le |a_n||b_n| \le K|a_n|$. Válasszunk $\varepsilon > 0$-t tetszőlegesen. Mivel $a_n \to 0$, az $\frac{\varepsilon}{K}$ számhoz található olyan n_0, hogy $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{K}$, ha $n \ge n_0$. Ezt felhasználva $|a_nb_n - 0| \le K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$, ha $n \ge n_0$, ami a bizonyítandó állítást jelenti.

T. $a_n \to a$ akkor és csak akkor, ha $a_n - a \to 0$.

B. Ha felírjuk a két konvergencia definícióját, akkor ugyanazt a sort írjuk fel.

T. Ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor $a_n + b_n \to a + b$, $a_nb_n \to ab$, $ca_n \to ca$ és $|a_n| \to |a|$.

B. 1. $$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|.$$
Válasszuk meg az ε-t, és $\frac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists n_1$, hogy $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n \ge n_1$, továbbá
$\frac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists n_2$, hogy $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n \ge n_2$.
Legyen $n_0 = \max(n_1, n_2)$, akkor
$$|a_n + b_n - (a + b)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ ha } n \ge n_0.$$
2. Mivel a_n korlátos, $a_n(b_n - b) \to 0$. Mivel b korlátos, $b(a_n - a) \to 0$. Az előző pont szerint a két sorozat összege is 0-hoz tart, de
$$a_n(b_n - b) + b(a_n - a) = a_n b_n - ab \to 0,$$
ami azt jelenti, hogy $a_nb_n \to ab$.
3. Mivel $a_n - a \to 0$, következik, hogy $c(a_n - a) \to 0$, vagyis $ca_n - ca \to 0$, tehát $ca_n \to ca$.
4. Mivel $\left||a_n| - |a|\right| \le |a_n - a|$, az $|a_n - a| < \varepsilon$ egyenlőtlenségből következik, hogy
$$\left||a_n| - |a|\right| \le \varepsilon.$$

T. Ha Ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, és $b_n \ne 0$ semmilyen n-re, továbbá $b \ne 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

B. Elég azt bizonyítani, hogy $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{bb_n}(b_n - b) \to 0.$ A fejezet elő tétele szerint azonban ehhez csupán $\left|\frac{1}{b_n}\right|$ sorozat korlátosságát kell megmutatni. Tudjuk, hogy $|b_n| \to |b|$. $\varepsilon = ½|b|$

választással, ha $n \geq n_0$, akkor $|b| - ½|b| < |b_n| < |b| + ½|b|$, azaz $|b_n| > ½|b|$, tehát $\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|b|}$, ami a korlátosságot jelenti.

3.4. Monoton sorozatok

D. Az $\{a_n\}$ sorozat *monoton növekedő,* ha minden n-re $a_{n+1} \geq a_n$. Az $\{a_n\}$ sorozat *monoton csökkenő,* ha minden n-re $a_{n+1} \leq a_n$. A *szigorúan* monoton növekedő/csökkenö sorozatok definíciójában szigorú egyenlőtlenséget kell megkövetelni. A *monoton* sorozatok elnevezés a monoton növekedő és a monoton csökkenő sorozatok közös neve.

T. Ha az $\{a_n\}$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, akkor konvergens.

B. Legyen $a = \sup\{a_n\}$, akkor $a_n \leq a$, és tetszőleges $\varepsilon > 0$ választás mellett $a - \varepsilon$ már nem felső korlát, tehát $\exists n_0$, hogy $a_{n_0} > a - \varepsilon$. A monotonitás miatt ekkor $n > n_0$ esetén $a - \varepsilon < a_n \leq a$.

P. $a^n \to 0$, ha $|a| < 1$.

B. Feltehető, hogy $a > 0$. Ekkor az $a_n = a^n$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, tehát konvergens. Legyen $\lim a_n = x$. Mivel $a_{n+1} = a \cdot a_n$, a határértékekre vonatkozó műveleti szabályok alapján $x = ax$, amiből $x = 0$.

T. Minden számsorozatból kiválasztható monoton részsorozat.

B. Tegyük fel, hogy monoton növekedő részsorozat nem választható ki. Kezdjük el egy monoton növekedő részsorozat kiválasztását. A feltevés miatt a kiválasztás valamilyen n_1 indexnél véget ér, vagyis a sorozatnak az a_{n_1} utáni tagjai mind kisebbek, mint a_{n_1}. A sorozat n_1-nél nagyobb indexű elemei közül is kezdjünk monoton növekedő sorozatot kiválasztani, ez is véget ér egy $n_2 > n_1$ indexnél, mert minden n_2 utáni elem már kisebb. Az eljárást folytassuk. Az így kapott $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ sorozat monoton csökkenő lesz.

T (Cauchy-féle konvergencia kritérium). Az $\{a_n\}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0$, hogy $|a_n - a_m| < \varepsilon$, ha $n \geq n_0$ és $m \geq n_0$.

M. A Cauchy kritérium jelentősége abban áll, hogy a határérték létezését a határérték értékének a felhasználása nélkül biztosítja.

B. $\Rightarrow$ Ha $a_n \to a$, akkor $½\varepsilon$-hoz van olyan n_0, hogy $|a_n - a| < ½\varepsilon$, ha $n \geq n_0$. Ebből következik, hogy $|a_n - a_m| = |a_n - a - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq ½\varepsilon + ½\varepsilon = \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Ha a Cauchy-kritérium teljesül, akkor a sorozat korlátos, ugyanis az n_0-nál nagyobb n indexekre $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$, az n_0 előtti véges sok tag pedig korlátos. Válasszunk ki $\{a_n\}$-ből monoton sorozatot, legyen ez $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ akkor ez konvergens, tehát $a_{n_k} \to a$.

Más megfogalmazásban, $|a_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ha $k \geq k_0$. A Cauchy-feltétel miatt $|a_{n_k} - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ha n és $n_k \geq n_0$. A két egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$|a_n - a| \;=\; |a_{n_k} - a + (a_n - a_{n_k})| \;\leq\; |a_{n_k} - a| + |(a_n - a_{n_k})| \;\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ha $n \geq n_0$, csupán a k értékét úgy kell megválasztani, hogy $k \geq k_0$, és $n_k \geq n_0$ legyen.

3.5. Egyenlőtlenségek

3.5.1. *Összeg abszolút értéke.*
T. Tetszőleges $a, b \in$ R számokra

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

B. Az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, tehát elég a négyzetre emelt alakot bebizonyítani:

$$(|a+b|)^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

3.5.2. *Bernoulli-egyenlőtlenség.*
T. Ha n pozitív egész, és $h \geq -1$, akkor

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

B. Teljes indukcióval. $n = 1$-re egyenlőség formájában igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $(1 + h)^k \geq 1 + kh$, és szorozzuk mindkét oldalt $(1 + h)$-val (a feltevés szerint $1 + h \geq 0$):

$$(1 + h)^{k+1} \geq 1 + kh + h + kh^2 \geq 1 + (k + 1)h.$$

3.5.2. *Számtani és mértani közép egyenlőtlenség.*
T. Nemnegatív $a_1, a_2, ..., a_n$ számokra

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}\,.$$

B. Teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$-re az állítás nyilvánvaló ($n = 2$-re tanultuk a középiskolában). Tegyük fel, hogy az n számra igaz, be fogjuk bizonyítani, hogy akkor $n + 1$-re is igaz.
Jelöljük A_n-nel az $a_1, a_2, ..., a_n$ számok számtani közepét. Átalakítással

$$A_{n+1}^{n+1} = \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{nA_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(A_n + \frac{x_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} = A_n^{n+1}\left(1 + \frac{x_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n}\right)^{n+1},$$

az utolsó kifejezésre alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget $h = \dfrac{x_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n}$ választással (mivel $x_{n+1} \geq 0$, $h \geq \dfrac{-A_n}{(n+1)A_n} = -\dfrac{1}{n+1} > -1$, a h-ra vonatkozó feltétel teljesül), akkor

$$A_{n+1}^{n+1} \geq A_n^{n+1}(1 + (n+1)h) = A_n^{n+1}\left(1 + (n+1)\frac{x_{n+1} - A_n}{(n+1)A_n}\right) = A_n^{n+1} + A_n^n(x_{n+1} - A_n) = A_n^n x_{n+1},$$

amiből, az indukciós feltételt felhasználva, kapjuk, hogy $A_{n+1}^{n+1} \geq x_1 x_2 ... x_n x_{n+1}$, ami a bizonyítandó állítást jelenti.

3.6. Az *e* szám

Tekintsük az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot. Be fogjuk bizonyítani, hogy konvergens. Ehhez belátjuk, hogy monoton növekedő és felülről korlátos.

1. a_n monoton növekedő. Írjuk fel a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget az 1, $1+\frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n}, ..., 1+\frac{1}{n}$ számokra, ahol az $1+\frac{1}{n}$ pontosan *n*-szer szerepel. A számok számtani közepe:

$$A = \frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1} = a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}},$$

mértani közepe:

$$G = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n+1}} = a_n^{\frac{1}{n+1}}.$$

A számtani-mértani közép egyenlőtlenségből adódik, hogy $a_{n+1} \geq a_n$, ami a monotonitást jelenti.

2. a_n felülről korlátos. Most az $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{n}, ..., 1+\frac{1}{n}$ számokra, ahol az $1+\frac{1}{n}$ pontosan *n*-szer szerepel, alkalmazzuk a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget.

$$A = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n(1+\frac{1}{n})}{n+2} = 1,$$

$$G = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n+2}} = \left(\frac{1}{4}a_n\right)^{\frac{1}{n+2}},$$

amiből $a_n \leq 4$ adódik.

Az a_n sorozat tehát konvergens, határértékét jelöljük *e*-vel.

D. $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71...$.

3.7. Példa.

Bebizonyítjuk, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$.

1. Az $a_n = \sqrt[n]{n}$ sorozat alulról korlátos, mert $\sqrt[n]{n} \geq 1$, hiszen mindkét oldalt *n*-edik hatványra emelve $n \geq 1$ adódik, ami igaz.

2. Az a_n sorozat felülről megbecsülhető a számtani mértani közép egyenlőtlenséggel, ha a_n-et a következő alakba írjuk: $a_n = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}$, ahol n - 2 darab 1-est szerepeltetünk. Ekkor

$$a_n = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}\cdot 1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1} \le \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - \frac{2}{n} \to 1,$$

így a_n a "rendőr-elv" miatt 1-hez tart.

3.8. Példa. $\sqrt[n]{a} \to 1$, ha $a > 0$.

1. Ha $a \ge 1$, akkor $n \ge a$ esetén $1 \le \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{n}$, ($n$-edik hatványra emeléssel igazolható), amiből ismét rendőr elv alapján következik az állítás.
2. Ha $0 < a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1$, így $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$, de $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$, vagyis $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4. Sorok

4.1. A végtelen sor összege

Adott az a_1, a_2, a_3, ... sorozat. Hogyan definiáljuk az $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen összeget? A sorozatokból képezett végtelen összegeket soroknak nevezzük.

D. Az $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ kifejezést a sor *részletösszegének* nevezzük. A sor *konvergens*, ha a részletösszegek sorozata konvergens, a konvergens *sor összege* a részletösszegek határértéke, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n .$$

D. $\sum a_k$ *abszolút* konvergens, ha a tagok abszolút értékeiből álló sor konvergens, vagyis ha $\sum|a_k|$ konvergens.

T. Ha $\sum a_k$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

B. A részletösszegek sorozatára alkalmazzuk a Cauchy-kritériumot ($m > n$ mellett):

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |s_m^* - s_n^*|,$$

ahol $s_n^* = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Ebből látszik, hogy ha s_n^*-ra teljesül a Cauchy-kritérium, akkor s_n-re is.

T. Ha $\sum a_k$ konvergens, akkor $a_n \to 0$. (Az állítás megfordítása nem igaz, lásd a P2. példát.)

B. Jelöljük a sor részletösszegét s_n-nel, összegét A-val, akkor $s_n \to A$, és $s_{n-1} \to A$, vagyis $s_n - s_{n-1} = a_n \to 0$.

P1. A $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ alakú mértani sor konvergens, ha $|q| < 1$, és divergens, ha $|q| \geq 1$.

A mértani sor részletösszegeire ismert az $s_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ képlet, amiből $s_n \to \dfrac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$.
$|q| \geq 1$ esetén a $q^n \to 0$ állítás nem teljesül, tehát az előző tétel értelmében a sor nem lehet konvergens.

P2. A $\sum_n \dfrac{1}{n}$ alakú harmonikus sor divergens.
Mivel minden n-re

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

a Cauchy-kritérium nem teljesülhet.

T. Ha az $\{a_n\}$ és a $\{b_n\}$ sorozatra $0 \leq a_n \leq b_n$ minden n-re teljesül, és a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ is konvergens. (A $\{b_n\}$ sorozatot majoráns sornak szokták nevezni, a tételt majoráns kritériumnak.)

B. s_n jelölje a $\sum a_n$, s_n^* a $\sum b_n$ sor részletösszegeit. s_n^* monoton növekedő sorozat, $s_n^* \to C$, így $s_n \leq s_n^* \leq C$, vagyis s_n monoton növekedő és korlátos sorozat, tehát konvergens.

5. Függvények határértéke

5.1. Nyílt és zárt halmazok

D. Adott $A \subset \mathbf{R}$. Az $x \in A$ pontot A *belső pontjának* nevezzük, ha van olyan környezete, amely teljes egészében A-hoz tartozik. A *belsejének* nevezzük A belső pontjainak a halmazát. Az A halmaz *nyílt*, ha minden pontja belső pont.

A nyílt intervallum nyilvánvalóan nyílt halmaz. A definícióból közvetlenül következik, hogy nyílt halmazok tetszőleges számú egyesítése is nyílt.

D. Adott $A \subset \mathbf{R}$. Az A halmaz *zárt*, ha pontjaiból álló minden konvergens sorozat határértéke is a halmazhoz tartozik.

A zárt intervallum nyilvánvalóan zárt halmaz. A definícióból közvetlenül következik, hogy zárt halmazok tetszőleges számú metszete is zárt.

5.2. Végesben vett határérték

Legyen $A \subset \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ és f: $A \to \mathbf{R}$ vagy f: $A - \{x_0\} \to \mathbf{R}$.

D. Legyen x_0 az A belső pontja. Az f-nek x_0-ban a *határértéke* a, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta$, hogy

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Jelölésben: $f(x) \to a$, ha $x \to x_0$, vagy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

M. A határérték nem függ az f függvény x_0-ban felvett értékétől.

T (Átviteli tétel). Legyen az x_0 az A belső pontja. Az f függvénynek az x_0 pontban a határértéke a akkor és csak akkor, ha $\forall$ $x_1, x_2, \ldots$ ($x_i \in A$, $x_i \neq x_0$, $i = 1, 2, \ldots$), $x_n \to x_0$ sorozatra $f(x_n) \to a$.

B. $\Rightarrow$ Ha f határértéke a, akkor $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta$, hogy $|f(x) - a| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta$. Mivel $x_n \to x_0$, $\forall\delta > 0$-hoz $\exists n_0$, hogy $|x_n - x_0| < \delta$, ha $n \geq n_0$. E kettőből $|f(x_n) - a| < \varepsilon$, ha $n \geq n_0$, ami azt jelenti, hogy $f(x_n) \to a$.
$\Leftarrow$ Tegyük fel, hogy $f(x)$-nek nem az a a határértéke, vagy nincs határértéke az x_0-ban, akkor $\exists\varepsilon > 0$, hogy $\forall\delta$-ra található olyan x, melyre $0 < |x - x_0| < \delta$ és $|f(x) - a| \geq \varepsilon$. E szerint minden $\delta = \frac{1}{n}$-hez tudunk olyan x_n-et választani, melyre $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$. Erre a sorozatra $x_n \to x_0$, de $f(x_n)$ nem tart a-hoz.

P. $\frac{\sin x}{x} \to 1$, ha $x \to 0$.

1. $\frac{\sin x}{x} \leq 1$, mert az egységsugarú körben a $2x$ szöghöz tartozó húr, amelynek a hossza $2\sin x$, kisebb, mint az ív hossza, $2x$.
2. $\frac{\sin x}{x} \geq \cos x$, mert az egységsugarú x nyílásszögű körcikk területe kisebb, mint a körcikket magában foglaló derékszögű háromszög területe, vagyis $x \leq \mathrm{tg}x$.
3. $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leq 2\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$, tehát $\cos x \to 1$, ha $x \to 0$.
4. $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$, és $\cos x \to 1$, tehát $\frac{\sin x}{x} \to 1$ (un. "rendőr" elv).

T. Függvények összegének, szorzatának és hányadosának a határértéke (osztásnál feltéve, hogy a nevezőben álló kifejezés határértéke nem nulla) a határértékek összege, szorzata, hányadosa. Itt feltételezzük, hogy az egyes komponensek határértéke létezik.

B. Az átviteli tétellel visszavezethető a sorozatokra bizonyított tételre.

5.3. Határérték a végtelenben és a végtelen, mint határérték

D. *$f(x)$ határértéke a $+\infty$-ben a*, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists K$, hogy $x > K$ esetén $f(x)$ értelmes és $|f(x) - a| < \varepsilon$. *$f(x)$ határértéke a $-\infty$-ben a*, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists K$, hogy $x < K$ esetén $f(x)$ értelmes és $|f(x) - a| < \varepsilon$.

P. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+2x}{3x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{3x} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

D. Az *$f(x)$ végtelenhez tart $x \to x_0$* esetén, ha $\forall K$-hoz $\exists\delta$, hogy $f(x) > K$, ha $0 < |x - x_0| < \delta$. Az *$f(x)$ végtelenhez tart $x \to +\infty$* esetén, ha $\forall K$-hoz $\exists L$, hogy $f(x) > K$, ha $x > L$.

Végtelenhez tartás esetén azt mondjuk, hogy a határérték nem létezik, mert - ha mást nem mondunk - véges határértékre gondolunk; viszont azt mondhatjuk, hogy a függvény határértéke végtelen.

6. Folytonos függvények

6.1. A folytonos függvény definíciója

D. $f(x)$ az x_0 pontban folytonos, ha $f(x_0)$ és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ létezik és a kettő egyenlő.

P. A $\cos x$ az $x = 1$ pontban folytonos (az 5. pontban bizonyítottuk). Mivel

$$|\cos x - \cos y| = 2\left|\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le 2\frac{|x-y|}{2} = |x-y|$$

(az utolsó egyenlőtlenséget ugyancsak az 5. pontban bizonyítottuk), kapjuk, hogy a $\cos x$ függvény minden pontban folytonos.

D. Az $f(x)$ függvény az (a, b) intervallumban folytonos, ha minden pontjában folytonos.

T. Az (a, b) intervallumban folytonos függvények összege, szorzata és hányadosa is folytonos, az utóbbi esetben feltételezve, hogy a nevezőben lévő függvény semmilyen $x \in (a, b)$ -re nem válik nullává.

B. A határértékekre vonatkozó tétel közvetlen következménye.

P1. Az $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ függvény folytonos az egész számegyenesen.
P2. Az $f(x) = x^{-k}$ függvény ($k \in \mathbf{N}$) folytonos a $(-\infty, 0)$, valamint a $(0, +\infty)$ intervallumokon, viszont nem folytonos a 0 pontban.

6.2. Jobb- és baloldali határérték és folytonosság

D. Az f függvénynek az x_0 pontban a *jobboldali* határértéke a, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta$, hogy $|f(x) - a| < \varepsilon$, ha $x_0 < x < x_0 + \delta$. A *baloldali* határérték definíciójában a legutolsó feltétel $x_0 - \delta < x < x_0$ -ra módosul.

Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ a jobboldali, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ a baloldali határérték. A 0-ban vett jobboldali határérték jelölése $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$, a baloldalié $\lim\limits_{x \to -0} f(x)$.

Ha a jobboldali és a baloldali határérték egyaránt létezik és egyenlők, akkor létezik a határérték is.

A jobb- és baloldali határérték lehet + vagy - végtelen is. Például az $\frac{1}{x}$ függvénynek a 0-ban a jobboldali határértéke $+\infty$, a baloldali határértéke $-\infty$. Az $\frac{1}{x^2}$ függvénynek a 0-ban a jobboldali és baloldali határértéke is egyaránt $+\infty$, ekkor a határértéke is $+\infty$.

D. Az f függvény az x_0 pontban *jobbról folytonos*, ha $f(x_0)$ és az f függvény jobboldali határértéke az x_0 pontban létezik, és a kettő egyenlő. A *balról folytonosság* definíciója értelemszerű módosítással ugyanígy történik.

P. Az $f(x) = [x]$ függvénynek (egészrész függvény) minden egész pontban létezik a jobboldali és a baloldali határértéke, pl. $x_0 = n$-ben $\lim\limits_{x \to n+0} f(x) = n$, $\lim\limits_{x \to n-0} f(x) = n - 1$. Mivel $f(n) = n$, a függvény jobbról folytonos, de balról nem.

6.3. Monoton függvények

D. Az $f{:}[a, b] \to \mathbf{R}$ függvény *monoton növekedő* az $[a, b]$-n, ha $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ értékekre $f(x_1) \le f(x_2)$. A *monoton csökkenő* függvényeknél az utolsó egyenlőtlenség megfordul, a *szigorúan* monoton növekedő/csökkenő függvényeknél a szigorú egyenlőtlenség érvényes.

T. Ha f az $[a, b]$-n monoton függvény, akkor minden $x_0 \in [a, b]$ helyen létezik a bal- és a jobboldali határértéke.

B. A baloldali határérték létezését bizonyítjuk monoton növekedő f-re. Válasszunk egy x_0-hoz konvergáló $x_1, x_2, \ldots$ monoton növekedő sorozatot, akkor $f(x_1), f(x_2), \ldots$ monoton növekedő és korlátos sorozat, hiszen $f(x_n) \le f(b)$. Az $f(x_n)$ tehát konvergens, határértéke legyen c, akkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n$, hogy $|f(x_n) - c| < \varepsilon$, de akkor a monotonitás miatt $|f(x) - c| < \varepsilon$, ha $x_n < x < x_0$.

6.4. Folytonos függvények tulajdonságai

D. Az f függvény folytonos az $[a, b]$-ben, ha (a, b) minden pontjában folytonos és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

T (Weierstrass tétele). Ha f folytonos az $[a, b]$-ben, akkor felveszi a legnagyobb és a legkisebb értékét.

B. A legnagyobb értékre bizonyítjuk. Legyen az f függvény $[a, b]$-n felvett értékeinek a szuprémuma M (itt $M = +\infty$ még elképzelhető). Található olyan $x_1, x_2, \ldots$ ($x_n \in [a, b]$) sorozat, hogy $f(x_n) \to M$. Mivel az $x_1, x_2, \ldots$ sorozat korlátos, van konvergens részsorozata, legyen ez x'_n, melyre $x'_n \to x_0 \in [a, b]$, és természetesen $f(x'_n) \to M$. Az f folytonossága miatt $f(x'_n)$ konvergál az f x_0 pontbeli határértékéhez, de az $f(x_0)$-lal egyenlő, tehát $f(x_0) = M$.

T (Bolzano tétele). Ha f folytonos az $[a, b]$-ben, akkor a legnagyobb és a legkisebb értéke közé eső minden értéket felvesz.

B. Elég azt bizonyítani, hogy ha $f(a) < 0$, $f(b) \ge 0$, akkor $\exists x_0$, hogy $f(x_0) = 0$. Ugyanis f valamilyen α helyen felveszi a minimumát, β helyen a maximumát, és feltehető, hogy $\alpha < \beta$, legyen továbbá c a maximum és a minimum közé eső tetszőleges érték, akkor az előző állítást kell csak alkalmazni, az $f(x) - c$ függvényre az $[\alpha, \beta]$ intervallumra vonatkozólag.
Felezzük az $[a, b]$-t a c ponttal, és legyen $[a_1, b_1] = [a, c]$, ha $f(c) \ge 0$, és $[a_1, b_1] = [c, b]$, ha $f(c) < 0$. Így újra az $[a, b]$-hez hasonló tulajdonságú intervallumhoz jutunk: $f(a_1) < 0$, $f(b_1) \ge 0$. Az eljárást folytassuk, és legyen az intervallumok közös pontja (Cantor-axióma) x_0.

Az a_1, a_2, ... sorozat monoton növekedőleg tart x_0-hoz, $f(a_n) < 0$, ezért az f folytonossága miatt $f(x_0) \leq 0$, hasonlóan a b_1, b_2, ... sorozat monoton csökkenőleg tart x_0-hoz, $f(b_n) \geq 0$, ezért $f(x_0) \geq 0$. Összefoglalva $f(x_0) = 0$.

D. Az f: $D(f) \to \mathbf{R}$ függvény egyenletesen folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta$, hogy $\forall x_1, x_2 \in D(f)$-re $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, ha $|x_1 - x_2| < \delta$.

M. A folytonosság definíciója a δ megválsztását az x_0 hely függvényeként kívánja meg: más és más x_0-ra esetleg egyre kisebb δ-val érhető el a kikötés. Az egyenletes folytonosság ugyanazt a δ-t követeli meg minden pontban. Pl. az $\frac{1}{x}$ függvény a (0, 1) intervallumon folytonos, de nem egyenletesen, hiszen a 0 pont közelében egyre gyorsabban változik.

T. Ha az f függvény folytonos $[a, b]$-n, akkor egyenletesen is folytonos $[a, b]$-n.

B. Tegyük fel az ellenkezőjét, az azt jelenti, hogy $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta$-ra található olyan $\alpha, \beta, \in [a, b]$, $|\alpha - \beta| < \delta$, melyre $|f(\alpha) - f(\beta)| \geq \varepsilon$. Rögzítsük ezt az ε-t, és legyen $\delta = \frac{1}{n}$, a hozzá található α-t jelöljük α_n-nel, β-t β_n-nel, tehát $|f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon$. Az α_n sorozatnak van konvergens részsorozata, mely mondjuk x_0-hoz konvergál, a részsorozat elemeihez tartozó β_n-ek, mivel $\frac{1}{n} \to 0$, ugyanehhez az x_0-hoz konvergálnak. A függvényértékek mind az α_n, részsorozatának pontjaiban, mind a β_n részsorozatának pontjaiban $f(x_0)$-hoz tartanak, ami ellentmond az $|f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon$ egyenlőtlenségnek.

6.5. Az inverz és az összetett függvény folytonossága

T. Az f: $(a, b) \to D$ $(D \subset \mathbf{R})$ bijektív és folytonos függvény, akkor f^{-1}: $D \to (a, b)$ is folytonos függvény.

B. Legyen y_0 a D tetszőleges pontja és x_0 legyen az (a, b)-nek az a pontja, melyre $y_0 = f(x_0)$. Válasszuk meg $\varepsilon > 0$-t tetszőlegesen, de úgy, hogy $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$ legyen. Jelöljük ezt az intervallumot $[a_1, b_1]$-gyel. Az $[a_1, b_1]$-en $f(x)$ felveszi a legnagyobb értékét (Weierstrass), de ezt csak a_1-ben vagy b_1-ben teheti. Ha ugyanis egy belső c pontban tenné, akkor az $[a_1, c]$ és a $[c, b_1]$ intervallumban is a legnagyobb és a legkisebb értéke közötti minden értéket felvesz (Bolzano), így lenne olyan érték, amit $[a_1, b_1]$-ben kétszer is felvesz, ami ellentmond a bijektív tulajdonságnak. Az $[a_1, b_1]$ intervallum képe tehát az $I = [f(a_1), f(b_1)]$, vagy az $I = [f(b_1), f(a_1)]$ intervallum. Nyilván $y_0 \in I$, és nem lehet annak végpontja, mert f bijektív. Felvehető tehát az $I_1 = (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset I$ intervallum, melynek f^{-1}-gyel történő leképezése $[a_1, b_1]$-be esik, így tetszőleges $y \in I_1$-re $|f^{-1}(y) - f^{-1}\_(y_0)| < \varepsilon$, ami a folytonosságot jelenti.

K. A $\sqrt{x}, \sqrt[n]{x}$ függvények folytonosak a $[0, +\infty)$ félegyenesen. Az x^α függvény $\alpha \in \mathbf{Q}$-ra folytonos a $(0, +\infty)$ félegyenesen.

T. Ha az f függvény folytonos az x_0 pontban és a g folytonos az $f(x_0)$ fontban, akkor az $g \circ f$ is folytonos az x_0 pontban.

B. Az átviteli tétellel bizonyítjuk. Az f folytonossága miatt, ha az $x_1, x_2, \ldots$ sorozatra $x_n \to x_0$, akkor $f(x_n) \to f(x_0)$, és a g folytonossága miatt $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$, ami a $g \circ f$ folytonosságát jelenti.

7. Elemi függvények

Elemi függvények a legfontosabb függvény típusok, melyekből a képlettel megadott függvények felépülnek. A legtöbb képlet elemi függvények lineáris transzformációja, és ezekből képezett összetett függvények.

7.1. Hatványfüggvény

Az $f(x) = x^\alpha$ függvényről, ha az α racionális, már volt szó. Most az egész α értékétől tekintsünk el, ezek jól ismert függvények. Értelmezési tartományuk, $\alpha > 0$ esetén $[0, +\infty)$, $\alpha < 0$ esetén $(0, +\infty)$. Mivel az $x^\alpha = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$, és az inverz függvény folytonossága miatt $\sqrt[q]{x}$ folytonos, az összetett függvény folytonossága miatt ennek p-edik hatványa is az, x^α is folytonos. Hasonló meggondolással x^α monoton függvény.

Ha α nem racionális, akkor a hatvány értelmezését határértékként adjuk meg. Először szorítkozzunk az $\alpha > 0$ és a $0 < x \le 1$ esetre. Válasszunk egy $\alpha_n \to \alpha$, $\alpha_n \in \mathbf{Q}$ sorozatot, akkor az

1. $\{x^{\alpha_n}\}$ sorozat konvergens. A Cauchy-kritérium alapján az $|x^{\alpha_n} - x^{\alpha_m}|$ kifejezést kell vizsgálni, ahol feltehető, hogy $\alpha_n \ge \alpha_m \ge 0$:

$$|x^{\alpha_n} - x^{\alpha_m}| = x^{\alpha_m}|1 - x^{\alpha_n - \alpha_m}| \le 1 - x^{\alpha_n - \alpha_m}.$$

Tudjuk, hogy $\sqrt[k]{x} \to 1$, ha $k \to \infty$, vagyis $|\sqrt[k]{x} - 1| \le \varepsilon$, ha $k \ge k_0$. Ebből $|x^{\alpha_n} - x^{\alpha_m}| < \varepsilon$, ha $|\alpha_n - \alpha_m| < \dfrac{1}{k_0}$, ez pedig az $\{\alpha_n\}$ konvergens sorozatra alkalmazott Cauchy-kritérium, ami teljesül, ha $n, m \ge n_0$.

2. $\{x^{\alpha_n}\}$ sorozat határértéke független az $\{\alpha_n\}$ sorozat választásától. Tegyük fel, hogy van olyan $\{\alpha_n\}$ sorozat, hogy $\alpha_n \to \alpha$ és $x^{\alpha_n} \to c_1$, és olyan $\{\beta_n\}$ sorozat, hogy $\beta_n \to \alpha$, $x^{\beta_n} \to c_2$ és $c_1 \ne c_2$. Egyesítsük a két sorozatot, legyen $\gamma_{2n-1} = \alpha_n$ és $\gamma_{2n} = \beta_n$, akkor $\gamma_n \to \alpha$, de x^{γ_n} nem konvergens, ami ellentmondás.

D. x^α $(x > 0,\ \alpha \in \mathbf{R})$ értelmezése határátmenettel történik: legyen $\{\alpha_n\}$ olyan sorozat, melyre $\alpha_n \in \mathbf{Q}$, és $\alpha_n \to \alpha$, akkor

$$x^\alpha = \lim_{\alpha_n \to \alpha} x^{\alpha_n}.$$

A definíció értelmes voltát és egyértelműségét $\alpha > 0$ és a $0 < x \le 1$ esetre beláttuk, az általános eset (ahol csak $x > 0$ megszorítással élünk) reciprok képzéssel előállítható, és a reciprok határértékéről tudjuk, hogy a határérték reciproka, ha ez utóbbi nem nulla.

A hatványokra vonatkozó műveleti szabályok a határérték képzése után is érvényesek maradnak.

T. Az $f(x) = x^{\alpha}$ függvény folytonos a $(0, +\infty)$-ben. (Ha $\alpha > 0$, akkor $[0, +\infty)$-ben is.)

B. A bizonyítást elég az $\alpha > 0$ és a $0 \le x \le 1$ esetre elvégezni, mert a többi eset reciprok képzéssel előállítható, ami a folytonosságot - az $x = 0$ pontot kivéve - megőrzi:

$$f(x) = x^{\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}, \text{ ha } x > 1, \text{ ill.}$$

$$f(x) = x^{\alpha} = \frac{1}{x^{-\alpha}} \text{ ha } \alpha < 0.$$

Tekintsünk egy $[a, b] \subset (0, 1]$ intervallumot és legyen $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, akkor

$$0 < x_2^{\alpha} - x_1^{\alpha} = x_2^{\alpha}\left(1 - \frac{x_1^{\alpha}}{x_2^{\alpha}}\right) \le 1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha} \le 1 - \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{k},$$

ahol $k > \alpha$ egészszám. A jobboldalon a Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazhatjuk:

$$0 < x_2^{\alpha} - x_1^{\alpha} \le 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right)\right)^{k} \le 1 - \left(1 - k\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right)\right) \le \frac{k}{a}(x_2 - x_1).$$

Ezzel $x_2^{\alpha} - x_1^{\alpha} < \varepsilon$ elérhető, ha $x_2 - x_1$-et elég kicsire választjuk. Ez az x^{α} folytonosságát jelenti $[a, b]$-ben, amiből következik a $(0, 1]$-ben a folytonosság.

Összefoglalva, $f(x) = x^{\alpha}$, ha $\alpha > 0$, a $[0, +\infty)$-ben értelmezett, monoton növekedő, folytonos függvény, melyre $f(0) = 0$ és $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$; ha $\alpha < 0$, akkor a $(0, +\infty)$-ben értelmezett, monoton csökkenő, folytonos függvény, melyre $\lim_{x \to +0} f(x) = +\infty$ és $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

7.2. Exponenciális függvény

Az $f(x) = a^x$ alakú exponenciális fügvényben szereplő hatványt $a > 0$ esetén az előző részben definiáltuk tetszőleges valós x-re (racionális számokkal történő közelítéssel, határértékként). A 7.1.1.-ben megmutattuk, hogy az exponenciális függvény $0 < a \le 1$ és $x > 0$ esetén folytonos függvény (noha ott a kitevőben racionális számok szerepelnek, de ugyanez érvényes tetszőleges valós számra is). Az $\sqrt[n]{a} \to 1$-ből és az exponenciális függvény monotonitásából következik a 0-ban való folytonosság is. Egyéb esetek reciprok képzéssel már származtathatók, ami a folytonosságot megőrzi. $a < 0$-ra az exponenciális függvényt nem értelmezzük.

T. Az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény, ahol $a > 0$, **R**-en folytonos.

Az exponenciális függvény $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekedő és $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $a < 1$ esetén szigorúan monoton csökkenő és $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Az exponenciális függvényre $f(0) = 1$.

Az exponenciális függvények között kiemelkedő jelentőségű az $f(x) = e^x$ függvény.

7.3. Logaritmus függvény

Az $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) exponenciális függvény inverze az a alapú logaritmus függvény. A $g(x) = \log_a x$ függvény, a $(0, +\infty)$-ben értelmezett, folytonos függvény, $a > 1$ esetén szigorúan monoton növekedő, és $\lim\limits_{x \to +0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; $a < 1$ esetén szigorúan monoton csökkenő és $\lim\limits_{x \to +0} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. A logaritmus függvényre $g(1) = 0$.

$a = 1$ esetén az exponenciális függvény konstans függvénnyé fajul el, nem bijektív, tehát inverze nem létezik, így a logaritmust $a = 1$ esetén nem definiálhatjuk.

Mivel $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, a különböző alapú logaritmus görbék csak konstans szorzóban különböznek egymástól, ez a szorzó lehet negatív is.

Az analízisben a leggyakrabban (majdnem kizárólagosan) használt logaritmus alapszám az e. Az e alapú logaritmust természetes logaritmusnak is nevezik, külön jelölést vezetünk be és ln-nel jelöljük; tehát $\ln x = \log_e x$.

7.4. Trigonometrikus függvények

A trigonometrikus függvényeket, a $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ és a $\mathrm{ctg}\, x$ függvényeket jól ismerjük. A trigonometrikus függvények periodikusak. Az $f(x)$ függvény t szerint periodikus, ha $\forall x$-re, melyre $x \in D(f)$ teljesül, hogy $f(x + t) = f(x)$. Ha $f(x)$ t szerint periodikus, akkor t egész többszöröse szerint is periodikus. A legkisebb ilyen t értéket nevezzük f periódusának. A $\sin x$ és a $\cos x$ periódusa 2π, míg a $\mathrm{tg}\, x$ és a $\mathrm{ctg}\, x$ periódusa π.

A $\cos x$ függvényről beláttuk, hogy folytonos **R**-en. Mivel $\sin x = \cos(\pi - x)$, az összetett függvény folytonossága miatt a $\sin x$ is folytonos **R**-en. A $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, ill. a $\mathrm{ctg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ képletek miatt a $\mathrm{tg}\, x$ és a $\mathrm{ctg}\, x$ függvények is folytonosak, kivéve azokat a pontokat, ahol a nevező 0-vá válik. Ezeken a helyeken maga a függvény sincs értelmezve.

7.5. A trigonometrikus függvények inverzei

A trigonometrikus függvények inverzeit már középiskolában használtuk, amikor a táblázatból visszakerestünk, csupán nem képeztünk függvényt belőle és nem neveztük meg. Amikor keressük, hogy melyik szög szinusza 0,5, akkor visszakereséssel $\dfrac{\pi}{6}$ adódik, de éppúgy lehet $\dfrac{5\pi}{6}$ is, vagyis az inverz nem egyértelmű. Ez természetes, hiszen a periodikus függvények nem injektív függvények, tehát inverzük nem létezik. Ha az értelmezési tartományukat leszűkítjük egy periódusra, akkor a tg és a ctg függvények már injektívek, de a sin és cos még mindig nem, itt az értelmezési taromány további leszűkítése szükséges.

D. A sin*x*: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to$ **R**, a cos*x*: $[0, \pi] \to$ **R**, a tg*x*: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to$ **R** leszűkített értelmezési tartományú függvényeket az illető függvény *főértékének* nevezzük.

A trigonometrikus függvények főértékei injektív függvények, tehát értékkészletükön, mint értelmezési tartományon értelmezhetők az inverzeik.

D. A sin főértékének az inverzét arcsin függvényként jelöljük, a cos főértékének az inverzét arccos, a tg főértékének az inverzét arctg függvényként használjuk. (Az "arc" kiolvasva arkusz = ív.)

Az arcsin*x* függvény szigorúan monoton növekedő, folytonos függvény a [-1, 1] intervallumon, értékkészlete $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. arcsin 0 = 0, páratlan függvény.
Az arccos*x* függvény szigorúan monoton csökkenő, folytonos függvény a [-1, 1] intervallumon, értékkészlete $[0, \pi]$. arcsin 0 = $\frac{\pi}{2}$.
Az arctg*x* függvény szigorúan monoton növekedő, folytonos függvény **R**-en, értékkészlete $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. arctg 0 = 0, páratlan függvény.
Az arcctg függvényt nem fogjuk használjuk.

7.6. Hiperbolikus függvények

A trigonometrikus függvényekkel erős rokonságban vannak a hiperbolikus függvények, szinte minden trigonometriai azonosság kissé eltérő formában igaz hiperbolikus függvényekre is. A hiperbolikus függvények - ellentétben a trigonometriai függvényekkel - kifejezhetők az exponenciális függvény segítségével, így tekintve tehát nem jelentenek új elemi függvényt, mégis a gyakori szereplésük miatt célszerű külön jelölést bevezetni számukra.

D. Valamennyi hiperbolikus függvény értelmezési tartománya a teljes számegyenes.

Szinusz hiperbolikusz, jele sh, definíciója: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Koszinusz hiperbolikusz, jele ch, definíciója: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Tangens hiperbolikusz, jele th, definíciója: $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

A definíciókból látható, hogy az egész számegyenesen folytonos függvények, az sh és a th páratlan, a ch páros függvény. Néhány példát említünk a köztük fennálló összefüggésekből, melyek a definíció behelyettesítésével igazolhatók:

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$,
$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$,
$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.

Az hiperbolikus függvények definíciójában az e szerepe egyelőre közömbös, tetszőleges a alappal definiálhattuk volna. Az e kiemelt szerepét a későbbiek világítják meg.

8. Differenciálás

8.1. Derivált definíciója

Vegyünk egy $f(x)$ függvényt, az x_0 legyen az értelmezési tartományának belső pontja, és írjuk fel a görbe $(x_0, f(x_0))$ és $(x_0 + h, f(x_0+h))$ pontjain áthaladó szelő iránytangensét (iránytangensnek nevezzük az egyenes és az x-tengely által bezárt szög tangensét):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

A felírt kifejezést az f függvény x_0 pontbeli különbségi hányadosának nevezzük. Képezzük a különbségi hányados határértékét, ha $h \to 0$. Amennyiben a határérték létezik, ezt az f x_0 pontban vett differenciálhányadosának, vagy deriváltjának nevezzük. Geometriai értelmezése az x_0-beli érintő iránytangense.

D. Ha az $f(x)$ függvény x_0 pontjában a különbségi hányadosnak van határértéke $h \to 0$ esetén, akkor az mondjuk, hogy f differenciálható az x_0-ban, és differenciálhányadosa, vagy deriváltja ez a határérték. Jelölése $f'(x_0)$.

P. A sin$x$ függvény 0-ban vett deriváltja a

$$\frac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}$$

kifejezés határértéke, ha $h \to 0$, amiről láttuk, hogy 1. Geometriai jelentése az, hogy a sin$x$ görbe érintője az origóban 45˚-os szöget zár be az x-tengellyel.

Ha az f függvény deriválását általános x pontban végezzük el, és az eredményt x függvényeként értelmezzük, akkor a függvény deriváltjáról beszélünk. Akkor mondjuk, hogy f valamely intervallumban differenciálható, ha minden pontjában differenciálható.

P. Számítsuk ki az $f(x) = x^n$ ($n \in$ **N**) deriváltját!

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h}\left(x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n\right) \to nx^{n-1},$$

ha $h \to 0$, vagyis $f'(x) = nx^{n-1}$.

P. Számítsuk ki $f(x) = \sin x$ deriváltját!

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{1}{h} 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \to \cos x,$$

ha $h \to 0$, vagyis $f'(x) = \cos x$.

P. Az $f(x) = c$ konstans függvény deriváltja 0, hiszen különbségi hányadosa is 0.

T. Ha $f(x)$ differenciálható az x_0 pontban, akkor folytonos.

B. A határérték létezése miatt $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta$, hogy

$$(f'(x_0)-\varepsilon)h \le f(x_0+h) - f(x) \le (f'(x_0)+\varepsilon)h\,,$$

ha $|h| < \delta$. Az egyenlőtlenség jobb- és baloldala egyaránt 0-hoz tart, ha $h \to 0$, így $f(x_0 + h) - f(x_0) \to 0$, ami f folytonosságát jelenti az x_0 pontban.

A folytonosság nem elég a differenciálhatósághoz. Pl. az $|x|$ függvény folytonos, de a 0 pontban nem differenciálható. Az $|x|$ különbségi hányadosa 1, ha $h > 0$, és -1, ha $h < 0$, így a határértéke nem létezik. (Ha definiálunk jobb- és baloldali deriváltat, akkor ezek léteznek, de nem egyenlők.)

8.2. Deriválási szabályok

T (Konstans kiemelhetősége). $(cf)' = c\cdot f'$, feltéve, hogy f' létezik.

B. A konstans a különbségi hányadosból is kiemelhető.

T (Összeg deriváltja). Ha f és g differenciálhatók a megadott pontban, akkor ott $f + g$ is differenciálható, és ebben a pontban $(f + g)' = f' + g'$.

B. Az összeg különbségi hányadosa felbontható a tagok különbségi hányadosainak összegére.

T (Szorzat deriváltja). Ha f és g differenciálhatók a megadott pontban, akkor ott fg is differenciálható, és ebben a pontban $(fg)' = f'g + fg'$.

B. Képezzük a szorzat különbségi hányadosát, majd átalakítás után vegyük a határértékét:

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

itt felhasználtuk, hogy a g függvény - mivel differenciálható - folytonos.

P. Számoljuk ki gyakorlásként az $x^2\sin x$ függvény deriváltját. Az első tényező deriváltja $2x$, szorozva a második tényezővel, $\sin x$-szel, és adjuk hozzá az első tényezőt megszorozva a második tényező deriváltjával, ami $x^2\cos x$. Az eredmény tehát $(x^2\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x$.

T (Hányados deriváltja). Ha f és g differenciálhatók a megadott pontban, akkor ott $\frac{f}{g}$ is differenciálható és ebben a pontban $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

B. Képezzük a hányados különbségi hányadosát, majd átalakítás után vegyük a határértékét:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}=$$
$$=\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\to$$
$$\to\frac{1}{g^2(x)}(f'(x)g(x)-f(x)g'(x)).$$
A g függvény folytonossága itt is felhasználásra került.

T (Összetett függvény deriváltja). Ha f differenciálható az x pontban, és g is differenciálható az $f(x)$ pontban, akkor a $g\circ f$ is differenciálható az x pontban és $(g\circ f)'(\mathrm{x}) = (g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$.

B. Képezzük az összetett függvény különbségi hányadosát, majd átalakítás után vegyük a határértékét:
$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\to g'(f(x))f'(x)$$
ugyanis $f(x + h) = f(x) + l$ alakban írható fel, akkor az első tényező a g függvény különbségi hányadosa az $f(x)$ helyen, továbbá, ha $h \to 0$, akkor az f folytonossága miatt $l \to 0$.

P. Számítsuk ki a $\cos x$ deriváltját. Mivel $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, a deriváltat összetett függvényként is kiszámíthatjuk: a szinusz y deriváltja koszinusz y, de szorozni kell az $y = \frac{\pi}{2}-x$ deriváltjával, ami -1. Összefoglalva: $(\cos x)'=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x$.

P. Számítsuk ki a $\mathrm{tg}x$ deriváltját. Mivel $\mathrm{tg}\, x=\frac{\sin x}{\cos x}$, a deriváltat a hányados deriválási szabálya szerint végezhetjük el.
$$(\mathrm{tg}\, x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

T (Inverz függvény deriváltja). Tegyük fel, hogy az $f(x):(a, b) \to \mathbf{R}$ folytonos, inverz függvénye létezik, az f differenciálható az $x \in (a, b)$ pontban, és $f'(x) \neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható az $f(x)$ pontban és
$$(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}.$$

M. $(f^{-1})'(y)$ itt az $(f^{-1})(y)$ függvény deriváltját jelöli, $(f^{-1})'(f(x))$ a derivált értéke az $f(x)$ pontban.

B. Az $f'(x) \neq 0$ feltétel miatt az f-nek van $f(x)$-nél nagyobb értéke is meg kisebb értéke is, így a Bolzano-tétel miatt az $y = f(x)$ az f értékkészletének belső pontja. Adott h-hoz legyen x_h az az érték, melyre $f(x_h) = y + h$ (elég kis h-ra ilyen x_h létezik). Írjuk fel az inverz függvény különbségi hányadosát, és alakítsuk át, mielőtt a határértékét képezzük, akkor

$$\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{(y+h)-y}=\frac{x_h-x}{f(x_h)-f(x)}\to\frac{1}{f'(x)}$$

bizonyítja az állítást, ugyanis az inverz függvény folytonossága miatt $x_h - x \to 0$, ha $h \to 0$.

P. Számítsuk ki az arcsin$x$ deriváltját. Mivel arcsin$x \in -\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$**,** cos(arcsin$x$) ≥ 0, így a négyzetgyök pozitív értékét kell venni, tehát

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

P. Számítsuk ki az arctg$x$ deriváltját. Az előzőhöz hasonlóan

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}}=\cos^2(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

8.3. Konvex függvények

D. A sík vagy tér egy A halmaza *konvex*, ha $\forall x_1 \in A$ és $\forall x_2 \in A$-ra az x_1-et és x_2-t összekötő szakasz A-hoz tartozik.

D. I legyen a számegyenes véges vagy végtelen intervalluma. Az f: $I \to \mathbf{R}$ függvényt *konvexnek* nevezzük, ha a felette lévő pontok halamza, pontosabban a $\{(x, y)$: $y \geq f(x)\}$ halmaz konvex. A *konkáv* függvény definíciója annyiban tér el, hogy a függvény alatt elhelyezkedő pontok halmazának a konvexitását kell feltételezni.

A függvények konvexitására számos, a megadott definícióval ekvivalens definíció adható. Az ekvivalencia geometriai megfontolásokból nyilvánvaló.

1. f: $I \to \mathbf{R}$ konvex, ha grafikonjának bármely két pontját összekötő szakasz a görbe felett halad, vagy azzal megegyezik.
Ez a definíció képlettel is felírható. Legyen $x_1, x_2 \in I$, akkor $\lambda \in (0, 1)$-re a $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ az (x_1, x_2) intervallum egy pontja, és végigfut az intervallumon, ha λ végigfut a (0, 1)-en. Minden egyes ilyen pontra meg kell tehát követelni, hogy

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$

ez az un. *Jensen-egyenlőtlenség*.
2. f: $I \to \mathbf{R}$ konvex, ha $\forall x \in I$-re az $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ különbségi hányados h monoton növekedő függvénye.
3. f: $I \to \mathbf{R}$ konvex, ha $\forall(x_1, x_2) \in I$ és $\forall(x_3, x_4) \in I$, $x_1 < x_2 \leq x_3 < x_4$ esetén

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}.$$

8.4. Az exponenciális és a logaritmus függvény deriváltja

Az exponenciális függvény folytonosságát igazoltuk, most először a differenciálhatóságot bizonyítjuk. Az a alapszám az egész fejezetben pozitív és 1-től különböző szám.

T. Az exponenciális függvény konvex.

B. A Jensen-egyenlőtlenséget bizonyítjuk, először $\lambda \in$ **Q**-ra. Legyen tehát $\lambda = \frac{p}{q}$, $0 < p < q$, ahol p és q egész. q darab számra, p darab a^{x_1}-re és q - p darab a^{x_2}-re alkalmazzuk a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget:

$$\frac{pa^{x_1} + (q-p)a^{x_2}}{q} = \lambda a^{x_1} + (1-\lambda)a^{x_2} \geq \left(a^{px_1} a^{(q-p)x_2}\right)^{\frac{1}{q}} = a^{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}.$$

Tetszőleges $\lambda \in$ **R**-re a λ-t közelítsük meg racionális számok sorozatával, minden racionális számra igaz az egyenlőtlenség, akkor a határértékükre is igaz marad, amivel a Jensen-egyenlőtlenséget beláttuk, vagyis a^x konvex.

T. Az a^x exponenciális függvény bármely x pontban differenciálható.

B. A konvexitás miatt a különbségi hányadosnak létezik a bal- és a jobboldali határértéke, hiszen h-nak monoton növekedő függvénye. Legyen a baloldali határérték α, a jobboldali β, válasszuk h-t pozitívra, akkor

$$\beta = \lim_{h \to +0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to +0} a^h \frac{a^{x-h} - a^x}{-h} = \lim_{h \to +0} a^h \alpha = \alpha.$$

Mivel a különbségi hányados jobb- és baloldali határértéke megegyezik, a függvény differenciálható.

T. Ha $f(x) = a^x$, akkor $f'(x) = a^x \ln a$.

B. Először $x = 0$-ban határozzuk meg a derivált határértékét. A derivált létezését tudjuk, tehát választhatunk h-nak speciális 0-hoz tartó sorozatot: $h = \log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{1}{\log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\log_a e} = \frac{1}{\frac{\ln e}{\ln a}} = \ln a,$$

vagyis $f'(0) = \ln a$. Az általános eset erre visszavezethető:

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a.$$

K. Az $f(x) = e^x$ függvény deriváltja $f'(x) = e^x$.

P. Számítsuk ki az $\ln x$ függvény deriváltját. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

T. Az $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \in$ **R**) függvény deriváltja $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.

M. Az az $\alpha \in$ **N** esetén levezetett képlet tehát teljes általánosságában ($\alpha \in$ **R**) érvényes.

B. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján, felhasználva a logaritmus függvény deriváltját is: $(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

8.5. Elemi függvények deriváltjai (összefoglaló táblázat)

$f(x)$	$f'(x)$	Érvényesség
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in$ **R**, ha $\alpha \notin$ **N**, akkor $x \in (0, 1)$
e^x	e^x	$x \in$ **R**
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$, $x \in$ **R**
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in$ **R**
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in$ **R**
$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq k\pi$
$\mathrm{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in [-1, 1]$
$\mathrm{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in$ **R**
$\mathrm{sh} x$	$\mathrm{ch} x$	$x \in$ **R**
$\mathrm{ch} x$	$\mathrm{sh} x$	$x \in$ **R**
$\mathrm{th} x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$x \in$ **R**

8.6. Középérték tételek

T (Lagrange-féle középérték tétel). Ha $f(x)$ az $[a, b]$-ben folytonos, és (a, b)-ben differenciálható, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

B. Az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokat összekötő egyenes egyenlete legyen $l(x)$, és legyen $g(x) = f(x) - l(x)$. Ha $g(x) = 0$ minden $x \in [a, b]$-re, akkor nincs mit bizonyítani, az (a, b) minden x pontjában $f(x) = l(x)$, így $f'(x) = l'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Ellenkező esetben g vagy pozitív, vagy negatív értéket felvesz. Tegyük fel, hogy van pozitív értéke. A g valamely $x = \xi$ pontban felveszi a legnagyobb értékét, és mivel ez nagyobb, mint 0, csak az intervallum belsejében veheti fel: minden $x \in [a, b]$-re $g(\xi) - g(x) \geq 0$, így a különbségi hányados

$$\frac{g(\xi + h) - g(\xi)}{h}$$

számlálója nem pozitív, az egész törtkifejezés előjele -h-val egyező (vagy nulla). A különbségi hányados határértéke létezik, ha pozitív h értékeken keresztül tartunk nullához, akkor $g'(\xi) \le 0$, ha negatív h értékeken keresztül tartunk nullához, akkor $g'(\xi) \ge 0$ adódik, így $g'(\xi) = 0$. Ebből

$$f'(\xi) = l'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

T (Cauchy-féle középérték tétel). Tegyük fel, hogy f és g folytonos $[a, b]$-ben, és differenciálható (a, b)-ben, és $g'(x) \neq 0$ (a, b)-ben, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

B. Képezzük a $h = f - cg$ függvényt, ahol $c = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Alkalmazzuk erre a Lagrange-féle középérték tételt, akkor

$$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = 0 = f'(\xi) - cg'(\xi),$$

ami átrendezve adja a bizonyítandó állítást.

8.7. L'Hospital szabály

A hányados határértékének meghatározásánál feltétel volt, hogy a nevező határértéke nem lehet 0. Ha a számláló határértéke ekkor 0-tól különböző, akkor a tört nem korlátos, abszolút értékének a határértéke $+\infty$. Ha a számláló határértéke is 0, akkor a tört határértéke - ha egyáltalán létezik - tetszőleges lehet. A határértékben $\frac{0}{0}$ alakú, vagy $\frac{+\infty}{+\infty}$ alakú tört kifejezéseket határozatlan alaknak nevezzük. Az ilyen alakú törtek határértékének kiszámításához ad segítséget a L'Hospital szabály. Határozatlan alakok még a $0 \cdot \infty$ szorzat, a $\infty - \infty$ különbség és az 1^{∞} hatvány is, melyek megfelelő átalakítással tört alakra hozhatók.

T (L'Hospital szabály). Ha az f és a g függvények az a hely környezetében - az a helyet nem számítva - differenciálhatók, $g'(x) \neq 0$, továbbá

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ és } \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

vagy

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ és } \lim_{x \to a} g(x) = +\infty,$$

akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

feltéve, hogy az utóbbi határérték létezik. Az a hely a $\pm\infty$ is lehet.

B. Több esetre kell a bizonyítást elvégezni.

1. a véges és $\frac{0}{0}$ alak. Ha szükséges változtassuk meg f és g értékét a-ban, és legyen $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, akkor f és g a-ban is folytonos, vagyis a Cauchy-féle középérték tétel alkalmazható:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

és mivel ξ x és a közé esik, $x \to a$ esetén $\xi \to a$, így, ha a jobboldalon lévő határérték létezik, akkor ez a baloldal határértéke is.

2. a véges és $\frac{+\infty}{+\infty}$ alak. Legyen $a < x < y$. Ha x és y elég közel vannak a-hoz, akkor a Cauchy-féle középérték tétel alkalmazható, azaz

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1-\frac{f(y)}{f(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Jelöljük a $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ határértékét A-val, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett az y megválasztható úgy, hogy $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ legyen. Rögzítsük ezt az y-t, az $r(x) = \frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}$ függvény 1-hez tart, ha $x \to a$, tehát elérhető, hogy $|r(x) - 1| < \min(\frac{\varepsilon}{3|A|},1)$, ha $|x - a| < \delta$. Ezután vizsgáljuk meg az $|f/g - A|$ eltérést. Az előbbiekből $|r(x)| \le 2$, tehát

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} r(x) - A\right| \le \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} r(x) - Ar(x)\right| + |A||r(x)-1| \le 2\frac{\varepsilon}{3} + |A|\frac{\varepsilon}{3|A|} = \varepsilon,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

3. $a = +\infty$. Az $f\left(\frac{1}{x}\right)$ és a $g\left(\frac{1}{x}\right)$ függvényekre alkalmazzuk az előzőeket:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+0} \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+0} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

9 Függvényvizsgálat

9.1. Monotonitás

T. Az (a, b) intervallumban differenciálható f függvény akkor és csak akkor monoton növekedő az (a, b)-ben, ha $\forall x \in (a, b)$-re $f'(x) \ge 0$. Hasonlóan a monoton csökkenést az $f'(x) \le 0$ jellemzi.

B. $\Rightarrow$ Ha f monoton növekedő, akkor a különbségi hányadosa nemnegatív, így annak határértéke is nemnegatív.
$\Leftarrow$ Ha $f'(x) \ge 0$, akkor a Lagrange-féle középérték tétellel bármely x_1 és x_2 számokra ($x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$) van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \ge 0,$$

amiből $f(x_2) - f(x_1) \ge 0$, ami a monoton növekedést jelenti.

M. Ha $\forall x \in (a, b)$-re $f'(x) > 0$, akkor ugyanezzel a bizonyítással belátható, hogy f szigorúan monoton növekedő, ugyanakkor ha f szigorúan monoton növekedő, akkor $f'(x) > 0$ nem feltétlenül teljesül. Erre példát ad az $f(x) = x^3$ függvény, amely szigorúan monoton növekedő, de $f'(0) = 0$.

9.2. Lokális szélsőérték

D. Az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban *lokális maximuma* van, ha az x_0-nak van olyan S környezete, hogy $\forall x \in S$-re $f(x_0) \geq f(x)$. Az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban *lokális minimuma* van, ha az x_0-nak van olyan S környezete, hogy $\forall x \in S$-re $f(x_0) \leq f(x)$. A lokális maximum és a lokális minimum közös elnevezése *lokális szélsőérték*.

T. Ha az $f(x)$ függvénynek az (a, b)-be eső x_0 pontban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

B. Azonos a Lagrange-féle középérték tételnél g-re elmondott bizonyítással.

M. Ha $f'(x_0) = 0$, akkor a szélsőérték létezése még nem biztos. Példa a korábbi x^3 függvény.

M. Ha a derivált előjelet vált az x_0 pontban, akkor a szélsőérték létezése biztosítva van: ha az előjelváltás pozitívból negatívba történik (vagyis az x_0 egy környezetében az x_0-nál kisebb helyeken a derivált pozitív, a nagyobb helyeken negatív), akkor a függvény az x_0-tól balra növekedő, jobbra csökkenő, tehát lokális maximuma van. A fordított előjelváltás a lokális minimum feltétele.

T. Ha f differenciálható (a, b)-ben, $x_0 \in (a, b)$-re $f'(x_0) = 0$, és $f''(x_0) < 0$, akkor az f-nek az x_0-ban lokális maximuma van. (Az $f''(x_0)$ az $f'(x)$ függvény x_0 pontbeli deriváltját jelöli.) Ha $f'(x_0) = 0$, és $f''(x_0) > 0$, akkor az f-nek az x_0-ban lokális minimuma van.

B. Elég az első állítást bizonyítani. Ha $f''(x_0) = -c < 0$, akkor válasszuk $\varepsilon = ½\, c$-t, és ha $|h| < \delta$, akkor

$$\frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \frac{f'(x_0 + h)}{h} < -c + \varepsilon = -\frac{c}{2} < 0\,.$$

Ez azt jelenti, hogy $h < 0$-ra $f'(x_0 + h) > 0$, $h > 0$-ra $f'(x_0 + h) < 0$, vagyis f' előjelet vált pozitívból negatívba, amiből következik, hogy x_0-ban maximum van.

9.3. Konvexitás

A függvények konvexitásának a definícióját, több ekvivalens definícióval együtt 8.4.-ben már megadtuk. Itt a konvexitás eldöntése lesz a fő kérdés.

T. Legyen f az (a, b)-n kétszer differenciálható függvény. $f(x)$ akkor és csak akkor konvex az (a, b)-n, ha $\forall x \in (a, b)$-re $f''(x) \geq 0$. $f(x)$ akkor és csak akkor konkáv az (a, b)-n, ha $\forall x \in$ $\in (a, b)$-re $f''(x) \leq 0$.

B. $\Rightarrow$ Ha f konvex, akkor a harmadik ekvivalens definíció alapján a nagyobb ponthoz tartozó különbségi hányados nagyobb vagy egyenlő, mint a kisebb ponthoz tartozó, feltéve, hogy a h

kisebb, mint a két pont távolsága. Ebből következik, hogy az első derivált monoton növekedő függvény, tehát deriváltja, a második derivált, nemnegatív.
$\Leftarrow$Ha $f''(x) \geq 0$, akkor $f'(x)$ monoton növekedő függvény. Válasszuk tetszőlegesen az $u < v$ pontokat az (a, b) intervallumban, és vegyünk fel ugyancsak tetszőlegesen egy w pontot, melyre $u < w < v$. A Lagrange-féle középérték tétel miatt

$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u} = f'(\alpha) \text{ és } \frac{f(v)-f(w)}{v-w} = f'(\beta),$$

ahol $u < \alpha < w < \beta < v$, tehát $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, vagyis az első különbségi hányados kisebb vagy egyenlő, mint a második. Ebből látható, hogy a w pontban a görbe az u és a v pontokhoz tartozó szelő alatt halad.

Inflexiós pontnak nevezzük a görbe azon pontját, ahol az érintő "átmetszi" a görbét. Ezt azonban pontosabban kell megfogalmazni.

D. Az $f(x)$ legyen az (a, b)-ben differenciálható függvény, és jelöljük $l(x)$-szel az $x_0 \in (a, b)$ pontbeli érintőt. x_0 *inflexiós helye* f-nek, ha x_0-nak egy környezetében $f(x) - l(x) \geq 0$, ha $x > x_0$, és $f(x) - l(x) \leq 0$, ha $x < x_0$, vagy fordítva: $f(x) - l(x) \leq 0$, ha $x > x_0$, és $f(x) - l(x) \geq \geq 0$, ha $x < x_0$.

T. Legyen az f az (a, b)-n differenciálható, az $x_0 \in (a, b)$ pontban kétszer differenciálható. Ha x_0 az f inflexiós helye, akkor $f''(x_0) = 0$.

B. Jelöljük g-vel az $f - l$ függvényt (l az érintő egyenlete), akkor $g'(x_0) = 0$. Ha $g''(x_0) \neq 0$ lenne, akkor g-nek szélsőértéke lenne x_0-ban, de ez ellentmond az inflexiós tulajdonságnak.

M. Az inflexiós hely tényleges megállapításához $f''(x_0) = 0$-n kívül pl. a második derivált előjelváltását kell megvizsgálni.

9.4. A függvényvizsgálat menete

Az alábbiakban összefoglaljuk a függvényvizsgálat során elvégzendő lépéseket. Egyes lépések természetesen egyes esetekben nem jöhetnek szóba, vagy azért, mert nem olyan a függvény, vagy, mert a lépés elvégzése bonyodalmakba vész el.

1. Értelmezési tartomány (ha lehet az értékkészlet) megállapítása.
2. Páros, páratlan vagy periodikus függvényről van-e szó, ekkor a vizsgálat leszűkíthető az értelmezési tartomány egy részére.
3. Szakadási (nem folytonossági) helyek megállapítása.
4. Határértékek vizsgálata az értelmezési tartomány határpontjaiban és a szakadási helyeken.
5. Első derivált előjelviszonyai: monotonitási szakaszok, szélsőértékek helyei, esetleg értékük.
6. Az első derivált határértékei (csak ha lényegesek az ábra szempontjából).
7. Második derivált előjelviszonyai: konvexitási kérdések, inflexió.
8. Néhány könnyen számolható pont koordinátáinak meghatározása: támpontok a rajzoláshoz.
9. Rajz készítése.

10.Taylor-sor

Az f és a g függvények az a pontban metszik egymást, ha $f(a) = g(a)$. Érintik egymást, ha ezen kívül $f'(a) = g'(a)$. Másodrendben érintik egymást, ha érintik egymást és ezen kívül $f''(a) = g''(a)$. Például, amikor egy útvonal görbületi sugaráról beszélünk, akkor a másodrendben érintő kör sugaráról van szó. Hasonlóan beszélhetünk n-edrendű érintkezésről, ami azt jelenti, hogy $f(a) = g(a)$ és $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ ($k = 1, 2, ..., n$), ahol $f^{(k)}$ és $g^{(k)}$ a k-adik deriváltat jelenti. A magasabbrendű érintkezés az egyik görbének a másikkal történő - várhatóan jó - közelítését adja az a pont közelében.

T. Ha az f függvény az a pontban n-szer differenciálható, akkor a

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

n-edfokú ún. Taylor-polinom n-edrendben érinti az $f(x)$ görbét az a pontban.

B. k-szori differenciálást elvégezve a k-nál kisebb hatványok deriváltja 0-vá válik, a k-nál nagyobb hatványoknál megmarad $(x - a)$ valamilyen hatványa, ez a helyettesítés után lesz 0, a k-adfokú tag deriváltja pedig éppen $f^{(k)}(a)$ lesz.

T (Lagrange-féle maradéktag). Ha az $f(n + 1)$-szer differenciálható függvény az a pont S környezetében, akkor $\forall x \in S$-hez $\exists \xi$, mely x és a közé esik, és $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, ahol az $R_n(x)$ ún. Lagrange maradéktag:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

B. Vezessük be a

$$g(z) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z) + \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

függvényt és számoljuk ki a deriváltját. Mivel a szorzat deriválásakor keletkező tagok sorra kiesnek,

$$g'(z) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt a $g(z)$ és az $(x - z)^{n+1}$ függvényekre az x és a pontok között:

$$\frac{g(x)-g(a)}{(x-x)^{n+1}-(x-a)^{n+1}} = -\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g'(\xi)}{-(n+1)(x-x_0)^n} = -\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!},$$

ami az állítással ekvivalens.

K. Ha f akárhányszor differenciálható az a pont S környezetében, és $\forall x \in S$-re és $\forall n$-re $|f^{(n)}(x)| \le K$, akkor $x \in S$-re

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

vagyis az f függvény Taylor-sorral előállítható.

B. A Lagrange maradéktagban a derivált korlátos, $\left|\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$, amiről könnyű belátni, hogy 0-hoz tart, tehát $R_n(x) \to 0$, vagyis a Taylor-sor maradékösszege, a Taylor-polinom tart $f(x)$-hez.

Az $\frac{A^n}{n!}$ sorozat ($A > 0$) nullához tartása úgy látható be, hogy $n \ge 2A$, ha $n \ge n_0$, ezért

$$\frac{A^n}{n!} \le \frac{A^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{A}{2A}\right)^{n-n_0} = \frac{A^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0},$$

itt az első tényező, mivel n_0 rögzített érték, állandó, a második pedig nullához tart.

P. Tanuljuk meg néhány elemi függvény Taylor-sorba fejtését. Az e^x, sin$x$, cosx, sh$x$, chx magasabbrendű deriváltjai egyszerűen számolhatók, így a Taylor sor felírása nem okoz gondot. A sin$x$ és a cos$x$ és deriváltjai az egész számegyenesen korlátosak, tehát a Taylor sor konvergens. Az e^x, sh$x$, chx, sem a deriváltjai nem korlátosak a számegyenesen, de bármely véges részén igen, a Taylor-sor tehát bármely véges intervallumon konvergens, de akkor a számegyenes minden pontjában is az. A sorfejtés középpontja az $a = 0$.
Az alábbi Taylor-sorok tehát minden $x \in \mathbf{R}$-re konvergensek:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \mp \dots,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

Felhasználhatjuk a hatványsorokat a függvények közelítésére és az e szám sorral történő előállítására. Ez utóbbi:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots.$$