2. Másodrendű skaláris differenciálegyenletek

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, $p, q, f\colon I \to \mathbb{R}$. Az *explicit másodrendű inhomogén lineáris skaláris differenciálegyenlet* általános alakja:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad x \in I. \tag{2.1}$$

A megfelelő *másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet* általános alakja

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad x \in I. \tag{2.2}$$

Legyen $x_0 \in I$ egy kezdeti időpont, és tekintsük az

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0' \tag{2.3}$$

kezdeti feltételeket.

Az 1.37. Tételből rögtön következik az alábbi egzisztencia és unicitás tétel.

2.1. Tétel. *Legyenek $p, q, f\colon I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, $x_0 \in I$. Ekkor a (2.1) egyenletnek bármely (2.3) kezdeti feltételhez létezik pontosan egy megoldása az I intervallumon.*

2.1. Másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Az elsőrendű homogén lineáris egyenleteknél már látott bizonyítást alkalmazva a másodrendű esetre kapjuk rögtön az alábbi eredményt.

2.2. Tétel. *Legyen y_1 és y_2 megoldása a (2.2) egyenletnek az I intervallumon. Ekkor $c_1y_1+c_2y_2$ is megoldása a (2.2) egyenletnek az I intervallumon minden $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$-re (vagy $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$-re), azaz a (2.2) egyenlet megoldásainak halmaza lineáris tér.*

2.3. Definíció. Legyen $y_1, y_2\colon I \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvények. A

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

determinánst az y_1 és y_2 függvények *Wronski-determinánsának* hívjuk.

2.4. Definíció. Legyen $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvények. Azt mondjuk, hogy y_1 és y_2 *lineárisan független*, ha

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0, \qquad x \in I, \tag{2.4}$$

akkor és csak akkor, ha $c_1 = c_2 = 0$. Az y_1 és y_2 függvényeket *lineárisan összefüggőnek* nevezzük, ha nem lineárisan függetlenek.

2.5. Tétel. *Az $y_1, y_2\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények lineárisan függetlenek az I intervallumon, ha létezik olyan $x_0 \in I$, hogy $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Ha y_1 és y_2 lineárisan összefüggő az I intervallumon, akkor $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ minden $x \in I$-re.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az y_1 és y_2 függvényekre (2.4) teljesül. Ekkor deriválva (2.4) mindkét oldalát a

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0, \qquad x \in I \tag{2.5}$$

egyenletet kapjuk. De ekkor ez a két lineáris egyenlet egy homogén lineáris egyenletrendszert alkot az ismeretlen c_1 és c_2 konstansokra. Ha létezik olyan $x \in I$, hogy a c_1 és c_2 együtthatómátrixa invertálható, azaz $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, akkor csak triviális megoldása van az egyenletrendszernek, azaz $c_1 = c_2 = 0$ következik. Ha y_1 és y_2 lineárisan összefüggő az I intervallumon, akkor minden $x \in I$-re létezik nemtriviális megoldása a (2.4)-(2.5) lineáris egyenletrendszernek c_1 és c_2-re, azaz az együtthatómátrix determinánsa 0 minden $x \in I$-re. □

2.6. Tétel (Abel–Liouville-tétel). *Legyen y_1 és y_2 megoldása a (2.2) egyenletnek az I intervallumon. Ekkor*

$$W(y_1, y_2)(x) = c \exp\left(-\int p(x)\,dx\right), \qquad x \in I$$

valamely $c \in \mathbb{R}$-re.

Bizonyítás: Deriváljuk a Wronski-determinánst, és használjuk a (2.2) egyenletet:

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)'(x) &= \Big(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\Big)' \\
&= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_2'(x)y_1'(x) - y_2(x)y_1''(x) \\
&= y_1(x)\Big(-p(x)y_2'(x) - q(x)y_2(x)\Big) - y_2(x)\Big(-p(x)y_1'(x) - q(x)y_1(x)\Big) \\
&= -p(x)\Big(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\Big) \\
&= -p(x)W(y_1, y_2)(x).
\end{aligned}$$

Azaz a Wronski-determináns teljesíti az

$$y' = -p(x)y$$

elsőrendű homogén lineáris egyenletet. Ebből következik a tétel állítása. □

2.7. Következmény. *Legyen y_1 és y_2 megoldása a (2.2) egyenletnek az I intervallumon. Ekkor vagy $W(y_1, y_2)(x) = 0$ minden $x \in I$-re vagy $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ minden $x \in I$-re.*

2.8. Definíció. Az $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ függvényeket a (2.2) egyenlet *fundamentális megoldásának* vagy *alaprendszerének* hívjuk, ha y_1 és y_2 megoldása a (2.2) egyenletnek, és y_1 és y_2 lineárisan függetlenek I-n, azaz $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, ha $x \in I$.

2.9. Tétel. *Legyen y_1 és y_2 fundamentális megoldása a (2.2) egyenletnek az I intervallumon. Ekkor bármely y_0, y_0' kezdeti feltételhez létezik olyan c_1 és c_2, hogy $c_1y_1 + c_2y_2$ teljesíti a (2.3) kezdeti feltételeket.*

Bizonyítás: A 2.2 tétel szerint tetszőleges c_1 és c_2 konstanra $y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ megoldása a (2.2) egyenletnek. Elegendő tehát c_1 és c_2-t úgy megválasztani a fenti lineáris kombinációban, hogy a (2.3) kezdeti feltétel, azaz

$$\begin{aligned}
c_1 y(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y_0 \\
c_1 y'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y_0'
\end{aligned}$$

teljesüljön. Mivel a feltétel szerint $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, az együtthatómátrix invertálható, így a lineáris egyenletrendszernek létezik megoldása c_1 és c_2-re. □

2.10. Következmény. *A (2.2) egyenlet megoldásainak halmaza kétdimenziós lineáris tér.*

2.2. Konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Tekintsük a (2.2) egyenlet konstans együtthatós megfelelőjét. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Keressük a (2.6) megoldását az $y(x) = e^{\lambda x}$ alakban, ahol λ valós (vagy komplex) konstans. Ekkor az $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ és $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ képleteket behelyettesítve a (2.6) egyenletbe kapjuk az

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$

egyenletet, amely pontosan akkor teljesül, ha λ megoldása az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{2.7}$$

algebrai egyenletnek. A (2.7) egyenletet a (2.6) differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletének* nevezzük.

Három esetet különböztetünk meg:

1. eset: A (2.7) karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van: λ_1 és λ_2. Ekkor a (2.6) egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Ehhez csak azt kell ellenőrizni, hogy $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ és $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ lineárisan független megoldások.

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0,$$

mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$, így y_1 és y_2 valóban lineárisan függetlenek.

2. eset: A (2.7) karakterisztikus egyenletnek egy darab (kétszeres) valós gyöke van, λ_0. Ez akkor teljesül, ha $b^2 - 4ac = 0$, és ekkor

$$\lambda_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Megmutatjuk, hogy az $y_1 = e^{\lambda_0 x}$ megoldáson kívül az $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$ függvény is megoldása az egyenletnek. $y_2' = e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 xe^{\lambda_0 x}$ és $y_2'' = 2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 xe^{\lambda_0 x}$, így ezeket behelyettesítve a (2.6) egyenletbe kapjuk:

$$a(2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 xe^{\lambda_0 x}) + b(e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 xe^{\lambda_0 x}) + cxe^{\lambda_0 x} = (a\lambda_0^2 + b\lambda_0 + c)xe^{\lambda_0 x} + (2a\lambda_0 + b)e^{\lambda_0 x} = 0.$$

Másrész y_1 és y_2 lineárisan független, mivel

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & xe^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 xe^{\lambda_0 x} \end{vmatrix} = (1 + \lambda_0 x - \lambda_0 x)e^{2\lambda_0 x} = e^{2\lambda_0 x} \neq 0.$$

Ezért ebben az esetben a (2.6) egyenlet általános megoldásának képlete:

$$y = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2 xe^{\lambda_0 x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

3. eset: A (2.7) karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke van, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ és a konjugáltja, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Ekkor természetesen $\tilde{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ és $\tilde{y}_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ megoldásai a (2.6) egyenletnek, viszont ezek komplex értékű függvények, mivel

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

és hasonlóan,

$$\tilde{y}_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

De ekkor az

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

és az

$$y_2(x) = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_2(x)) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

függvények is megoldásai a (2.6) egyenletnek, és ezek már valós értékű függvények. Megmutatjuk, hogy y_1 és y_2 lineárisan függetlenek:

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} \\ &= e^{2\alpha x}(\alpha\cos\beta x\sin\beta x + \beta\cos^2\beta x - \alpha\cos\beta x\sin\beta x + \beta\sin^2\beta x) \\ &= e^{2\alpha x}\beta \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

mivel $\beta \neq 0$. Ezért ebben az esetben a (2.6) differenciálegyenlet általános megoldásának képlete:

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

2.11. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + y' - 6y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

kezdeti érték feladatot! Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

amelynek megoldása $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -2$. Ezért az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

A kezdeti feltételek meghatározzák a c_1 és c_2 értékét. Ehhez először tekintsük a megoldás deriváltját: $y' = 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x}$. Behelyettesítve a megoldás ill. deriváltjának képletébe $x = 0$-t és használva a megadott kezdeti feltételeket teljesül a

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & 1 \\ 3c_1 & - & 2c_2 & = & 2 \end{array}$$

egyenletrendszer, amelyet megoldva kapjuk, hogy $c_1 = 4/5$ és $c_2 = 1/5$. Ezért a kezdeti érték feladat megoldása

$$y = \frac{4}{5}e^{3x} + \frac{1}{5}e^{-2x}.$$

□

2.12. Példa. Oldjuk meg a

$$4y'' + 12y' + 9y = 0, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

kezdeti érték feladatot! Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0,$$

amelynek megoldása $\lambda_0 = -3/2$ kétszeres gyök. Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{3}{2}x}.$$

A megoldás deriváltja $y' = -\frac{3}{2}c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2}c_2 x e^{-\frac{3}{2}x}$. A kezdeti feltételeket használva kapjuk a

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & & & = & -1 \\ -\frac{3}{2}c_1 & + & c_2 & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszert, és így $c_1 = -1$ és $c_2 = -\frac{3}{2}$, azaz a kezdeti érték feladat megoldása

$$y = -e^{-\frac{3}{2}x} - \frac{3}{2} x e^{-\frac{3}{2}x}.$$

□

2.13. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' - 2y' + 8y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

kezdeti érték feladatot! Az egyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0,$$

amelynek megoldása $\lambda = 1 \pm i\sqrt{7}$, tehát az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^x \cos\sqrt{7}x + c_2 e^x \sin\sqrt{7}x.$$

Számítsuk ki először y'-t:

$$y' = c_1 e^x \cos\sqrt{7}x - \sqrt{7}c_1 e^x \sin\sqrt{7}x + c_2 e^x \sin\sqrt{7}x + \sqrt{7}c_2 e^x \cos\sqrt{7}x.$$

A kezdeti feltételeket használva kapjuk a

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & & & = & 1 \\ c_1 & + & \sqrt{7}c_2 & = & -2 \end{array}$$

egyenletrendszert, és így $c_1 = 1$ és $c_2 = -\frac{3}{\sqrt{7}}$, azaz a kezdeti érték feladat megoldása

$$y = e^x \cos\sqrt{7}x - \frac{3}{\sqrt{7}} e^x \sin\sqrt{7}x.$$

□

2.3. Másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek

Tekintsük újra az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad x \in I \tag{2.11}$$

másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet és a hozzá tartozó

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad x \in I. \tag{2.12}$$

homogén lineáris differenciálegyenletet.

Ahogy elsőrendű lineáris differenciálegyenleteknél láttuk, most is könnyen igazolhatók az alábbi állítások:

2.14. Tétel. *Legyen y_1 és y_2 a (2.11) inhomogén egyenlet két tetszőleges megoldása. Ekkor az $y = y_1 - y_2$ függvény megoldása a (2.12) homogén egyenletnek.*

2.15. Tétel. *Legyen y_H a (2.12) homogén egyenlet általános megoldása, és y_{IP} a (2.12) inhomogén egyenlet egy partikuláris (rögzített) megoldása. Ekkor a (2.12) inhomogén egyenlet általános megoldásának képlete*

$$y_{IH} = y_{IH} + y_{IP}.$$

Inhomogén differenciálegyenletek megoldását két lépésben kaphatjuk meg: kiszámítjuk a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását, és az inhomogén egyenlet egy megoldását elegendő megtalálnunk. Partikuláris megoldás meghatározásával a következő két szakaszban foglalkozunk.

2.4. Konstans együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása próbafüggvény módszerével

2.16. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = 4e^{3x} \tag{2.13}$$

inhomogén egyenletet! A 2.15. Tétel értelmében elegendő a megfelelő homogén egyenlet általános megoldását és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását megkeresni.

Oldjuk meg először az $y'' + 3y' - 10y = 0$ homogén egyenletet! A karakterisztikus egyenlete $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$, amelynek gyökei $\lambda_1 = -5$ és $\lambda_2 = 2$. Ezért a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_H = c_1e^{-5x} + c_2e^{2x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását olyan alakban keressük, amelyet a (2.13) egyenlet bal oldalába behelyettesítve $4e^{3x}$-et kapunk. Erre természetes ötlet az

$$y_{IP} = Ae^{3x}$$

alak. Számítsuk ki ennek deriváltjait: $y'_{IP} = 3Ae^{3x}$ és $y''_{IP} = 9Ae^{3x}$. Ezeket behelyettesítve a (2.13) egyenletbe

$$9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} - 10Ae^{3x} = 4Ae^{3x}.$$

Akkor kapunk azonosságot, ha a két oldalon az exponenciális függvény együtthatói megegyeznek, azaz $8A = 4$, tehát $A = 1/2$. A (2.13) egyenlet egy lehetséges partikuláris megoldása tehát $y_{IP} = \frac{1}{2}e^{3x}$. Az egyenlet általános megoldása ezért

$$y = c_1e^{-5x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

□

2.17. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = -2\cos 2x \tag{2.14}$$

inhomogén egyenletet!

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük most az

$$y_{IP} = A\cos 2x + B\sin 2x$$

alakban. Ekkor $y'_{IP} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$ és $y''_{IP} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. Ezeket behelyettesítve a (2.14) egyenletbe kapjuk

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 6A\sin 2x + 6B\cos 2x - 10A\cos 2x - 10B\sin 2x = -2\cos 2x,$$

amit egyszerűsítve

$$(-6A - 14B)\sin 2x + (6B - 14A)\cos 2x = -2\cos 2x.$$

Ez pontosan akkor lesz azonosság, ha az azonos függvények együtthatói az egyenlet két oldalán megegyeznek, azaz

$$\begin{array}{rcrcr} -6A & - & 14B & = & 0 \\ -14A & + & 6B & = & -2 \end{array}$$

Ezt megoldva $A = 7/58$ és $B = -3/58$, azaz az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1e^{-5x} + c_2e^{2x} + \frac{7}{58}\cos 2x - \frac{3}{58}\sin 2x.$$

□

2.18. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = 4x^2 - x$$

inhomogén egyenletet!

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük most az

$$y_{IP} = Ax^2 + Bx + C$$

alakban. Ekkor $y'_{IP} = 2Ax + B$ és $y''_{IP} = 2A$. Ezeket behelyettesítve az egyenletbe kapjuk

$$2A + 6Ax + 3B - 10Ax^2 - 10Bx - 10C = 4x^2 - x,$$

amit átrendezve

$$-10Ax^2 + (6A - 10B)x + 2A + 3B - 10C = 4x^2 - x.$$

Az együtthatókat a két oldalon egyenlővé téve adódik a

$$\begin{array}{rcrcrcr} -10A & & & & & = & 4 \\ 6A & - & 10B & & & = & -1 \\ 2A & + & 3B & - & 10C & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszer, amelyet megoldva $A = -2/5$, $B = -7/50$ és $C = -61/500$. Ezért az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1e^{-5x} + c_2e^{2x} - \frac{2}{5}x^2 - \frac{7}{50}x - \frac{61}{500}.$$

□

2.19. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = 5e^{3x}\sin 2x$$

inhomogén egyenletet!

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük most az

$$y_{IP} = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

alakban. Ekkor

$$y'_{IP} = 3Ae^{3x}\cos 2x - 2Ae^{3x}\sin 2x + 3Be^{3x}\sin 2x + 2Be^{3x}\cos 2x$$

és

$$y''_{IP} = 5Ae^{3x}\cos 2x - 12Ae^{3x}\sin 2x + 5Be^{3x}\sin 2x + 12Be^{3x}\cos 2x.$$

Ezeket behelyettesítve az egyenletbe és a kapott egyenlet két oldalán az azonos függvények együtthatóit összahasonlítva kis számolás után kapjuk

$$\begin{array}{rcrcl} 4A & + & 18B & = & 0 \\ -18A & + & 4B & = & 5 \end{array}$$

Ezt megoldva $A = -9/34$ és $B = 1/17$. Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1e^{-5x} + c_2e^{2x} - \frac{9}{34}e^{3x}\cos 2x + \frac{1}{17}e^{3x}\sin 2x.$$

□

2.20. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = -4e^{2x} \tag{2.15}$$

inhomogén egyenletet!

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását keressük most is az $y_{IP} = Ae^{2x}$ alakban, mint a 2.16. Példában. Ekkor az $y'_{IP} = 2Ae^{2x}$ és $y''_{IP} = 4Ae^{2x}$ deriváltakat visszahelyettesítve a (2.15) egyenletbe

$$4Ae^{2x} + 6Ae^{2x} - 10Ae^{2x} = -4e^{2x},$$

következik, ami ellentmondás, azaz nincs ilyen alakú partikuláris megoldása az egyenletnek. Ezt előre lehetett volna látni, mivel e^{2x} megoldása a homogén egyenletnek. Módosítani kell tehát a próbafüggvény alakját. A következő próbálkozás legyen az $y_{IP} = Axe^{2x}$ függvény, mivel ez hasonlít a legjobban az egyenlet jobb oldalára. Ekkor $y'_{IP} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$ és $y''_{IP} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$, és ezért visszahelyettesítéskor megjelenik az egyenlet bal oldalán az e^{2x} függvény:

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 3Ae^{2x} + 6Axe^{2x} - 10Axe^{2x} = -4e^{2x},$$

azaz egyszerűsítve,

$$7Ae^{2x} = -4e^{2x},$$

és így $A = -4/7$. Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1e^{-5x} + c_2e^{2x} - \frac{4}{7}xe^{2x}.$$

□

$f(x)$	y_{IP}
$ae^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}x^s$ $(s = 0, 1, 2)$
$a \cos \beta x + b \sin \beta x$	$(A \cos \beta x + B \sin \beta x)x^s$ $(s = 0, 1, 2)$
$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)x^s$ $(s = 0, 1, 2)$

2.1. Táblázat. Próbafüggvények

Az eddigi példák alapján látható, hogy ha az

$$ay'' + by' + cy = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

egyenlet jobb oldalán szereplő függvény speciális alakú: exponenciális, polinom vagy trigonometrikus függvény, akkor a próbafüggvényt a 2.1. Táblázat szerint választhatjuk.

Itt az $A, B, A_n, \ldots, A_0$ konstansok a jobb oldali oszlopban szereplő képletekben ismeretlen együtthatók, és először a képletet az $s = 0$ kitevővel próbáljuk. (A módszert a *határozatlan együtthatók módszerének* is nevezik.) A 2.20. Példában látott eset általánosításaként azt kapjuk, hogy ha a próbafüggvényben szereplő függvény (vagy annak bizonyos paraméter választással kapható része) megoldása a homogén egyenletnek, akkor a próbafüggvény képletét x-szel beszorozva próbáljuk ki, azaz a táblázatban az $s = 1$ választással használjuk a jobb oldali képletet. Ha még ekkor sem kapunk megoldást, azaz az így felírt képlet is még megoldása a homogén egyenletnek, akkor x helyett x^2-tel szorozzuk a képletet, azaz az $s = 2$ kitevőt választjuk a fenti táblázatban. Belátható, hogy a táblázatban szereplő esetekben a kapott próbafüggvény mindig működik, azaz egyértelműen meghatározhatók az együtthatók.

A 2.19. Példa esetét általánosítva belátható, hogy a próbafüggvény módszere akkor is működik, ha $f(x)$ nem a fenti táblázatban szereplő exponenciális, trigonometrikus vagy polinom függvény, hanem bármely két ilyen alakú függvény, vagy akár három ilyen alakú függvény szorzata. Ekkor a próbafüggvényt választhatjuk a jobb oldali oszlopban levő megfelelő képletek szorzataként (vigyázva arra, hogy felesleges konstansokat ne vezessünk be a képletbe).

2.21. Tétel (szuperpozíció elve). *Legyen y_1 és y_2 megoldása az*

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = f_1(x), \qquad x \in I,$$

illetve az

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = f_2(x), \qquad x \in I$$

egyenleteknek, akkor $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ megoldása az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x), \qquad x \in I$$

egyenletnek.

Bizonyítás: Az $y = y_1 + y_2$ behelyettesítéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (y_1 + y_2)'' + p(x)(y_1 + y_2)' + q(x)(y_1 + y_2) \\ &= y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 + y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 \\ &= f_1(x) + f_2(x). \end{aligned}$$

□

2.22. Példa. Oldjuk meg az

$$y'' + 3y' - 10y = 4e^{3x} - 2\cos 2x + 4x^2 - x - 4e^{2x}$$

inhomogén egyenletet! Mivel korábbi példákban megoldottuk azokat az inhomogén egyenleteket, ahol a jobb oldalon külön-külön állnak a fenti függvények, így rögtön kapjuk a 2.21. Tételt alkalmazva, hogy az egyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{7}{58}\cos 2x - \frac{3}{58}\sin 2x - \frac{2}{5}x^2 - \frac{7}{50}x - \frac{61}{500} - \frac{4}{7}xe^{2x}.$$

□

2.5. Másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása konstansok variálásának módszerével

Tekintsük az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad x \in I \tag{2.16}$$

inhomogén egyenletet. Tegyük fel, hogy az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad x \in I \tag{2.17}$$

homogén egyenletnek ismert az y_1, y_2 fundamentális megoldása, azaz a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_H = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Próbáljuk meg a konstansok helyett

$$y_{IP} = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

alakban keresni az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását. Ez a *konstansok variálásának a módszere*. Ekkor

$$y'_{IP} = u'_1(x)y_1(x) + u_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y_2(x) + u_2(x)y'_2(x).$$

Ha ezt még egyszer deriváljuk és behelyettesítjük a (2.16) egyenletbe, akkor a két ismeretlen u_1 és u_2 függvényre csak egy egyenletünk van, ami nem határozza meg egyértelműen a függvényeket. Követeljük meg azt is, hogy

$$u'_1(x)y_1(x) + u'_2(x)y_2(x) = 0, \qquad x \in I \tag{2.18}$$

is teljesüljön, ez egyszerűsíti a további számolást. Ugyanis ekkor

$$y'_{IP} = u_1(x)y'_1(x) + u_2(x)y'_2(x),$$

és ezért

$$y''_{IP} = u'_1(x)y'_1(x) + u_1(x)y''_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) + u_2(x)y''_2(x).$$

Ezért, behelyettesítve a (2.16) egyenlet bal oldalába kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
u'_1(x)y'_1(x) &+ u_1(x)y''_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) + u_2(x)y''_2(x) \\
&\quad + p(x)(u_1(x)y'_1(x) + u_2(x)y'_2(x)) + q(x)(u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)) \\
&= u_1(x)(y''_1(x) + p(x)y'_1(x) + q(x)y_1(x)) + u_2(x)(y''_2(x) + p(x)y'_2(x) + q(x)y_2(x)) \\
&\quad + u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x) \\
&= u'_1(x)y'_1(x) + u'_2(x)y'_2(x).
\end{aligned}$$

Ezért a (2.18) egyenlettel együtt u_1 és u_2 teljesíti az

$$\begin{aligned} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) &= 0 \qquad (2.19)\\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) &= f(x) \qquad (2.20) \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez u_1' és u_2'-re nézve lineáris egyenlterendszer, amely mindig megoldható I-n, mivel az együtthatómátrix determinánsa $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$. Ezután integrálással megkapjuk u_1 és u_2 képletét.

2.23. Példa. Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = 0, \qquad (x > 0)$$

egyenlet általános megoldása

$$y_H = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3}.$$

Ezt felhasználva oldjuk meg az

$$x^2y'' + 6xy' + 6y = x, \qquad (x > 0)$$

egyenletet! A konstansok variálásának módszerét használva keressük az egyenlet partikuláris megoldását az

$$y_{IP} = \frac{u_1}{x^2} + \frac{u_2}{x^3}$$

alakban, ahol u_1 és u_2 ismeretlen függvények. Először osszuk el az egyenletet x^2-tel, hogy a (2.16) alakra hozzuk:

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = \frac{1}{x}.$$

Ekkor a (2.19)-(2.20) egyenletrendszert erre a feladatra felírva kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{u_1'}{x^2} + \frac{u_2'}{x^3} &= 0\\ -2\frac{u_1'}{x^3} - 3\frac{u_2'}{x^4} &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Ezt végigszámolva kapjuk, hogy $u_1' = x^2$ és $u_2' = -x^3$, így $u_1 = \int x^2\,dx = x^3/3$ és $u_2 = -\int x^3\,dx = -x^4/4$. Megjegyezzük, hogy itt elhagytuk az integrálási konstansokat, hiszen egy-egy konkrét u_1 és u_2-re van csak szükségünk. Ezért

$$y_{IP} = \frac{x^3}{3}\frac{1}{x^2} - \frac{x^4}{4}\frac{1}{x^3} = \frac{1}{12}x,$$

tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \frac{1}{12}x, \qquad x > 0.$$

□

2.6. Rendcsökkentés módszere másodrendű homogén lineáris egyenlet második megoldásának keresésére

Tekintsük az

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad x \in I \tag{2.21}$$

homogén lineáris egyenletet. Tegyük fel, hogy az egyenlet egy y_1 megoldása ismert. Ekkor természetesen cy_1 is megoldása az egyenletnek minden $c \in \mathbb{R}$-re, de ez nem lesz lineárisan független y_1-től. Keressünk egy másik megoldást az

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

alakban. Ha u nem konstans, akkor y_2 és y_1 lineárisan független lesz. Ekkor $y_2'(x) = u'(x)y_1(x)+u(x)y_1'(x)$ és $y_2'(x) = u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x)$, ezt visszahelyettesítve a (2.21) egyenletbe

$$u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) + p(x)(u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)) + q(x)u(x)y_1(x) = 0.$$

Rendezzük át az egyenletet:

$$u''(x)y_1(x) + u'(x)\Big(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)\Big) + u(x)\Big(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\Big) = 0.$$

Mivel y_1 megoldása a (2.21) egyenletnek, ezért

$$u''(x)y_1(x) + u'(x)\Big(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)\Big) = 0.$$

Ebben az egyenletben már nincs u-s tag, így ezt az egyenletet a

$$v(x) = u'(x)$$

helyettesítéssel visszavezethetjük a

$$v'(x)y_1(x) + v(x)\Big(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)\Big) = 0$$

elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldására, (amely egyben szétválasztható típusú is), így megoldható v-re. Ezután integrálással u is meghatározható. Ezt az eljárást *rendcsökkentés módszerének* nevezzük, mivel a másodrendű lineáris egyenlet megoldását a fenti helyettesítés elsőrendű lineáris egyenlet megoldására vezeti vissza.

2.24. Példa. Ellenőrizhető, hogy az

$$xy'' - y' - x^3y = 0, \qquad (x > 0)$$

egyenlet egy megoldása $y_1(x) = e^{x^2/2}$. Adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

A rangcsökkentés módszerét alkalmazva keressük a második megoldást az $y_2(x) = u(x)e^{x^2/2}$ alakban. Ekkor $y_2'(x) = u'(x)e^{x^2/2}+xu(x)e^{x^2/2}$ és $y_2''(x) = u''(x)e^{x^2/2}+2xu'(x)e^{x^2/2}+u(x)e^{x^2/2}+x^2u(x)e^{x^2/2}$, ezért

$$xu''(x)e^{x^2/2}+2x^2u'(x)e^{x^2/2}+xu(x)e^{x^2/2}+x^3u(x)e^{x^2/2}-u'(x)e^{x^2/2}-xu(x)e^{x^2/2}-x^3u(x)e^{x^2/2} = 0,$$

azaz

$$xu''(x) + (2x^2 - 1)u'(x) = 0.$$

A $v(x) = u'(x)$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$xv'(x) + (2x^2 - 1)v(x) = 0,$$

amelynek egy megoldása $x > 0$-ra

$$v(x) = e^{-\int (2x-1/x)\,dx} = e^{-x^2+\ln x} = xe^{-x^2}.$$

(Nem kell az összes megoldást megkeresnünk, mivel egy lehetséges u-t keresünk, így az integráláskor elhagyjuk a $+c$-t.) Ekkor

$$u(x) = \int v(x)\,dx = \int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}.$$

Ezért

$$y_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}e^{x^2/2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2/2}$$

egy megoldása a (2.21) egyenletnek, de ekkor

$$y_2(x) = e^{-x^2/2}$$

is megoldása lesz az egyenletnek. Az y_1 és y_2 függvények lineáris függetlenségét a Wronski-determinánst kiszámítva is ellenőrizhetjük:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{x^2/2} & e^{-x^2/2} \\ xe^{x^2/2} & -xe^{-x^2/2} \end{vmatrix} = -2x,$$

ami nem azonosan nulla. Kaptuk tehát, hogy az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1e^{x^2/2} + c_2e^{-x^2/2}.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ez a képlet minden $x \in \mathbb{R}$-re megoldása a (2.21) egyenletnek.

□

2.7. Euler-egyenlet

Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Az

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \tag{2.22}$$

alakú, nem konstans együtthatós másodrendű homogén lineáris egyenletet *Euler-egyenletnek* nevezzük.

Keressünk

$$y(x) = x^r$$

alakú megoldását a (2.22) egyenletnek. Ekkor $y' = rx^{r-1}$ és $y'' = r(r-1)x^{r-2}$, ezért visszahelyettesítéssel az egyenletbe kapjuk

$$ar(r-1)x^r + brx^r + cx^r = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha r teljesíti az

$$ar(r-1) + br + c = 0 \tag{2.23}$$

algebrai egyenletet, amelyet a (2.22) egyenlet *karakterisztikus egyenletének* hívjuk. Az egyenlet r_1 és r_2 megoldásait a (2.22) egyenlet *karakterisztikus gyökének* hívjuk. A (2.23) egyenlet átrendezhető az

$$ar^2 + (b-a)r + c = 0$$

alakba.

Három esetet különböztetünk meg:

1. eset: A (2.22) egyenletnek két különböző valós gyöke van: r_1 és r_2. Ekkor $y_1(x) = x^{r_1}$ és $y_2(x) = x^{r_2}$ megoldása a (2.22) egyenletnek. Megmutatjuk, hogy y_1 és y_2 lineárisan függetlenek:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1 x^{r_1} & r_2 x^{r_2} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2} \neq 0.$$

A (2.22) egyenlet általános megoldása ezek szerint

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}.$$

Ha r_1 vagy r_2 negatív, akkor a megoldás vagy a $(0, \infty)$ vagy a $(-\infty, 0)$ intervallumon értelmezhető.

2. eset: A (2.22) egyenletnek egy darab kétszeres valós gyöke van:

$$r_0 = \frac{a - b}{2a}.$$

Ekkor $y_1(x) = x^{r_0}$ megoldása a (2.22) egyenletnek. Keressük az egyenlet másik megoldását a rangcsökkentés módszerét alkalmazva az $y_2(x) = u(x)x^{r_0}$ alakban. Ekkor $y_2'(x) = u'(x)x^{r_0} + u(x)r_0 x^{r_0-1}$ és $y_2''(x) = u''(x)x^{r_0} + 2u'(x)r_0 x^{r_0-1} + u(x)r_0(r_0 - 1)x^{r_0-2}$, ezért

$$\begin{aligned} ax^2(u''(x)x^{r_0} + 2u'(x)r_0 x^{r_0-1} + u(x)r_0(r_0-1)x^{r_0-2}) + bx(u'(x)x^{r_0} + u(x)r_0 x^{r_0-1}) + cu(x)x^{r_0} \\ = (ax^2u''(x) + 2ar_0 xu'(x) + bxu'(x))x^{r_0} + (ar_0(r_0-1) + br_0 + c)u(x)x^{r_0} \\ = (ax^2u''(x) + 2ar_0 xu'(x) + bxu'(x))x^{r_0} \\ = 0, \end{aligned}$$

azaz

$$ax^2u''(x) + x(2ar_0 + b)u'(x) = 0.$$

Legyen $v(x) = u'(x)$. Mivel r_0 képlete szerint $2ar_0 + b = a$, ezért v megoldása az

$$v'(x) + \frac{1}{x}v(x) = 0$$

egyenletnek, azaz

$$v(x) = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Így

$$u(x) = \int v(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x.$$

Tehát

$$y_2(x) = x^{r_0}\ln x$$

megoldása a (2.22) egyenletnek a $(0, \infty)$ intervallumon. Számítsuk ki az $W(y_1, y_2)$ Wronski-determinánst:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} x^{r_0} & x^{r_0}\ln x \\ r_0 x^{r_0-1} & r_0 x^{r_0-1}\ln x + x^{r_0-1} \end{vmatrix} \\ &= x^{2r_0-1}(r_0\ln x + 1 - r_0\ln x) \\ &= x^{2r_0-1} \\ &\neq 0, \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Kaptuk tehát, hogy ebben az esetben a (2.22) egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 x^{r_0} + c_2 x^{r_0} \ln x, \qquad x > 0.$$

3. eset: A (2.22) egyenletnek két komplex gyöke van: $r_1 = \alpha + i\beta$ és $r_2 = \alpha - i\beta$, $(\beta \neq 0)$. Ekkor

$$x^{r_1} = x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} = x^\alpha(\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x))$$

és

$$x^{r_2} = x^{\alpha-i\beta} = x^\alpha(\cos(\beta \ln x) - i \sin(\beta \ln x))$$

komplex megoldásai a (2.22) egyenletnek. Ahogy a konstans együtthatós homogén egyenletek esetében láttuk, itt is kapjuk, hogy a komplex megoldás valós és képzetes része megoldása az a (2.22) egyenletnek, azaz

$$y_1(x) = x^\alpha \cos(\beta \ln x) \quad \text{és} \quad y_2(x) = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$$

valós megoldása a (2.22) egyenletnek. Mivel

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} x^\alpha \cos(\beta \ln x) & x^\alpha \sin(\beta \ln x) \\ \alpha x^{\alpha-1} \cos(\beta \ln x) - x^\alpha \sin(\beta \ln x)\frac{\beta}{x} & \alpha x^{\alpha-1} \sin(\beta \ln x) + x^\alpha \cos(\beta \ln x)\frac{\beta}{x} \end{vmatrix} \\ &= x^{2\alpha-1}\Big(\alpha \cos(\beta \ln x) \sin(\beta \ln x) + \beta \cos^2(\beta \ln x) \\ &\qquad -\alpha \cos(\beta \ln x) \sin(\beta \ln x) + \beta \sin^2(\beta \ln x)\Big) \\ &= x^{2\alpha-1}\beta \\ &\neq 0, \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Kaptuk tehát, hogy a (2.22) egyenlet általános megoldása ebben az esetben

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x), \qquad x > 0.$$

2.25. Példa. Adjuk meg a

$$2x^2 y'' - xy' + y = 0, \qquad (x > 0), \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$$

kezdeti érték feladat megoldását!

Az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$2r(r-1) - r + 1 = 0,$$

melynek megoldása $r_1 = \frac{1}{2}$ és $r_2 = 1$. Ezért az általános megoldás

$$y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2 x.$$

Mivel $y'(x) = c_1 \frac{1}{2\sqrt{x}} + c_2$, ezért a kezdeti feltételeket használva kapjuk

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & 2 \\ \frac{1}{2}c_1 & + & c_2 & = & 0. \end{array}$$

Az egyenletrendszer megoldása $c_1 = 4$ és $c_2 = -2$, azaz a kezdeti érték feladat megoldása

$$y(x) = 4\sqrt{x} - 2x, \qquad x > 0.$$

□

2.26. Példa. Adjuk meg az

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0, \qquad (x > 0), \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$$

kezdeti érték feladat megoldását!

Az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$r(r-1) + 3r + 1 = 0,$$

melynek kétszeres gyöke $r_0 = -1$. Ezért az általános megoldás

$$y(x) = c_1\frac{1}{x} + c_2\frac{1}{x}\ln x.$$

Ebbe a képletbe és az $y'(x) = -\frac{c_1}{x^2} - \frac{c_2 \ln x}{x^2} + \frac{c_2}{x^2}$ képletbe behelyettesítve a kezdeti feltételeket kapjuk

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & & & = & 1 \\ -c_1 & + & c_2 & = & -1, \end{array}$$

aminek megoldása $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$. Ezért

$$y(x) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

□

2.27. Példa. Adjuk meg az

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = 0, \qquad (x > 0), \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

kezdeti érték feladat megoldását!

Az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$r(r-1) - 3r + 5 = 0,$$

melynek gyökei $r_1 = 2 + i$ és $r_2 = 2 - i$. Az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1x^2\cos(\ln x) + c_2x^2\sin(\ln x).$$

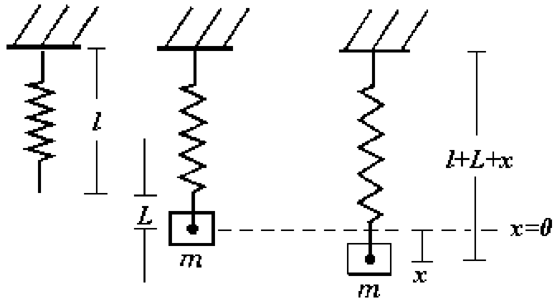
Mivel $y'(x) = 2c_1x\cos(\ln x) - c_1x\sin(\ln x) + 2c_2x\sin(\ln x) + c_2x\cos(\ln x)$, ezért

$$\begin{array}{rcrcr} c_1 & & & = & 2 \\ 2c_1 & + & c_2 & = & 1, \end{array}$$

aminek megoldása $c_1 = 2$ és $c_2 = -3$. Ezért

$$y(x) = 2x^2\cos(\ln x) - 3x^2\sin(\ln x), \qquad x > 0.$$

□



2.1. Ábra. rugós rendszer

2.8. Alkalmazások

Előző félévi analízis tanulmányok során — a Laplace-transzformált alkalmazásaként — láttuk, hogy egy soros RLC elektromos áramkör egy konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlettel modellezhető. Ezt a modellt itt most nem írjuk fel újra, hanem egy mechanikai alkalmazást, rugós rendszereket vizsgálunk részletesen. Ez is konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletet eredményez, így ugyanazokat a jelenségeket tapasztalhatjuk, amiket az RLC áramkörnél már láttunk.

2.28. Példa. (rugós rendszer) Tekintsünk egy függőlegesen felfüggesztett rugót (lásd a 2.2. Ábrát), amelyre egy m tömegű testet felfüggesztünk. Ezután megnyújtjuk vagy összenyomjuk a rugót, és bizonyos kezdeti sebességet adva a testnek magára hagyjuk, esetleg a mozgás során időtől függő erővel hatunk tovább a testre. Számítsuk ki a test elmozdulását az idő függvényeként!

Válasszunk egy függőleges koordinátarendszert, amelynél a pozitív irány lefele mutat, és ahol az origó a test nyugalmi helyzeténél van (lásd a 2.1. Ábrát). Legyen l a rugó megnyújtás előtti hossza, L a rugó megnyúlása a test felakasztása után. Jelölje $x(t)$ a rugó nyugalmi helyzethez viszonyított megnyúlását a t időpontban. Newton II. törvényét alkalmazzuk a mozgásegyenlet felírásához: $F = ma$. A test gyorsulása az elmozdulás idő szerinti második deriváltja: $a = x''$. A testre ható erők eredője számításakor négy erőhatást veszünk figyelembe: 1. Az mg súlyerő mindig lefele, azaz pozitív irányban hat a mozgás során. 2. Az F_r rugóerő Hooke-törvénye szerint arányos a rugó megnyúlásával. A rugóerő felfele hat, ha a rugót megnyújtjuk, ha pedig összenyomjuk, akkor lefele hat. Mivel a rugó teljes megnyúlása $L + x$, ezért tehát a rugóerő képlete $F_r = -k(L + x)$, ahol $k > 0$ az ú.n. rugóállandó. 3. Az F_s közegellenállási erő vagy surlódási erő mindig a mozgás irányával ellentétes irányban hat. Egy a legtöbb közegben illetve nem túl nagy sebességnél megfigyelt kísérleti tapasztalat szerint a közegellenállási erő arányos a sebesség nagyságával. Ezért $F_s = -\gamma x'$, ahol $\gamma > 0$ a súrlódási együttható. 4. A testre ható egyéb külső erőt jelölje $f(t)$. Ekkor Newton II. törvényébe behelyettesítve kapjuk az

$$mx'' = mg - k(L + x) - \gamma x' + f(t)$$

egyenletet. A test rugóhoz illesztése után a rugóerő és a súlyerő kiegyenlíti egymást, azaz $mg = kL$. Ezt használva a mozgásegyenlet átalakítható az

$$mx'' + \gamma x' + kx = f(t) \tag{2.24}$$

alakba. Ez egy konstans együtthatós másodrendű linearis differenciálegyenlet. A hozzárendelt

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = x'_0 \tag{2.25}$$

kezdeti feltétel a test kezdeti elmozdulását és a kezdeti sebességét írja elő.

□

2.29. Példa. (harmonikus rezgőmozgás) Tekintsük most (2.24) speciális esetét. Tegyük fel, hogy a testre ható közegellenállás elhanyagolható, azaz $\gamma = 0$, és nincs külső erő, azaz $f(t) = 0$:

$$mx'' + kx = 0. \tag{2.26}$$

A karakterisztikus egyenlet

$$m\lambda^2 + k = 0,$$

amelynek megoldásai $\lambda = \pm i\omega_0$, ahol $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A (2.26) általános megoldása tehát

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Ez tetszőleges c_1 és c_2-re egy harmonikus rezgőmozgást definiál, hiszen átalakítható az

$$x(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

alakba. Ugyanis

$$R\cos(\omega_0 t - \delta) = R(\cos \omega_0 t \cos \delta + \sin \omega_0 t \sin \delta) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

teljesül, ha

$$R\cos\delta = c_1 \qquad \text{és} \qquad R\sin\delta = c_2,$$

azaz

$$R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{c_2}{c_1}.$$

ω_0-t a rezgés *saját frekvenciájának*, δ-t *fázisszögnek*, R-t pedig a rezgés *amplitúdójának* hívjuk.

□

2.30. Példa. (csillapított rezgőmozgás) Most feltesszük, hogy nincs külső erőhatás, de van közegellenállás, azaz $\gamma > 0$:

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0 \tag{2.27}$$

A megfelelő karakterisztikus egyenlet

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0.$$

Három esetet különböztetünk meg:

1. $\gamma^2 - 4mk > 0$ (nagy surlódás esete). Ekkor

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} < 0 \qquad \text{és} \qquad \lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} < 0$$

két valós karakterisztikus gyök, így a megoldás

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

alakú. Látható, hogy $x(t) \to 0$, ha $t \to \infty$. A rugó ebben az esetben exponenciális sebességgel a nyugalmi állapothoz, azaz a 0 elmozduláshoz tart. A 2.2. Ábrán néhány tipikus megoldásgörbe látható ebben az esetben. (Mindhárom ábrán az $x(0) = 1, x'(0) = 1$; $x(0) = -1, x'(0) = 0$ és az $x(0) = 0.5, x'(0) = -0.5$ kezdeti feltételekből indított megoldások görbéi láthatók.)

2. $\gamma^2 - 4mk = 0$ (kritikus surlódás esete). Ekkor $\lambda = -\frac{\gamma}{2m}t$ kétszeres valós karakterisztikus gyök, ezért a megoldás

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{\gamma}{2m}t}.$$

Ebben az esetben is a nyugalmi helyzethez tart a test. A 2.3. Ábrán néhány 2. típusú megoldásgörbe látható.

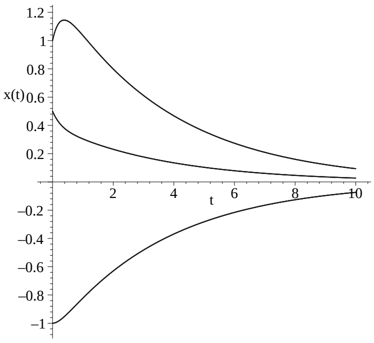
3. $\gamma^2 - 4mk < 0$ (kis surlódás esete). Ekkor két komplex karakterisztikus gyök van,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\mu, \qquad \text{ahol} \quad \mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m},$$

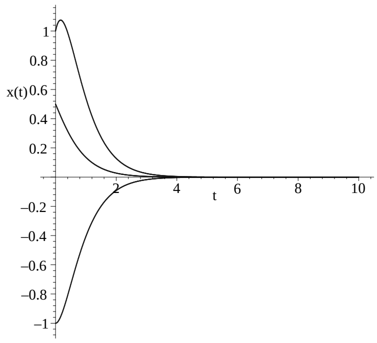
azaz

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\Big(c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t\Big).$$

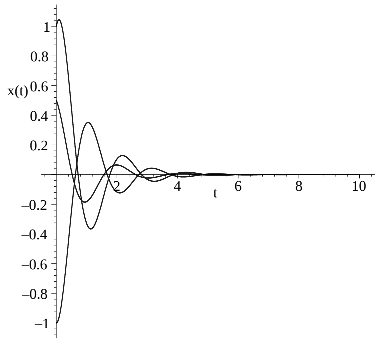
Most is 0-hoz tartanak a megoldások, de oszcillálva, lásd a 2.4. Ábrán. □



2.2. Ábra. $x'' + 4x' + x = 0$



2.3. Ábra. $x'' + 4x' + 4x = 0$



2.4. Ábra. $x'' + 2x' + 10x = 0$

2.31. Példa. (amplitúdó moduláció) Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor nincs közegellenállás, de periodikus külső erő hat a testre, konkrétan tekintsük az

$$mx'' + kx = a \cos \omega t \tag{2.28}$$

egyenletet. Legyen ω_0 a rendszer sajátfrekvenciája, azaz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Nézzük először azt, amikor $\omega \neq \omega_0$. Ekkor a határozatlan együtthatók módszerét alkalmazva (2.28) partikuláris megoldását kereshetjük az

$$x_{IP} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

alakban. Ekkor $x'_{IP} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$ és $x''_{IP} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$. Behelyettesítve a (2.28) egyenletbe

$$(-mA\omega^2 + kA)\cos \omega t + (-mB\omega^2 + kB)\sin \omega t = a \cos \omega t,$$

azaz

$$A = \frac{a}{k - m\omega^2} = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m} \qquad \text{és} \qquad B = 0.$$

Az egyenlet általános megoldása ezért

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m} \cos \omega t.$$

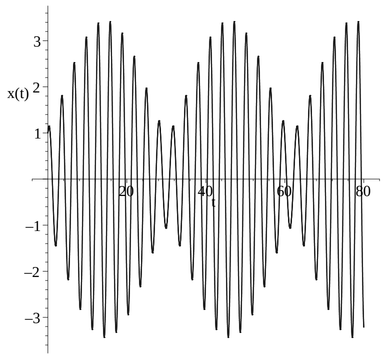
Ha a mozgást a nyugalmi helyzetből, azaz az $x(0) = 0$ és $x'(0) = 0$ kezdeti feltételekből indítjuk, végigszámolhatjuk, hogy $c_1 = -\frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m}$ és $c_2 = 0$ adódik, így a megoldás

$$x(t) = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m}\Big(\cos \omega t - \cos \omega_0 t\Big).$$

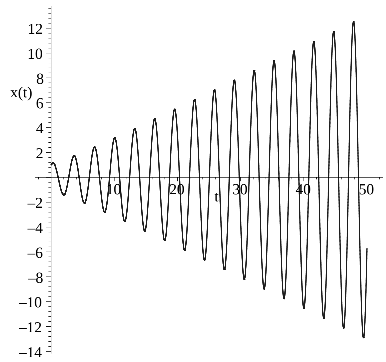
Egyszerű trigonometriai átalakításokkal ez ekvivalens alakban felírható úgy, mint

$$x(t) = \frac{2a}{(\omega_0^2 - \omega^2)m} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}.$$

Ha $\omega \approx \omega_0$, akkor $\sin \frac{(\omega_0+\omega)t}{2}$ gyorsan oszcillál a $\sin \frac{(\omega_0-\omega)t}{2}$ taghoz képest, így a megoldás grafikonján kettős oszcilláció látható: A burkológörbe, azaz az időben változó amplitúdó egy kis frekvenciájú oszcillációt, a megoldás maga pedig egy nagy frekvenciájú oszcillációt végez (lásd a 2.5. Ábrát). Elektonikában ezt a jelenséget *amplitúdó modulációnak* hívják. □



2.5. Ábra. $x''+4x = \cos 2.2t$, $x(0) = 1 = x'(0)$



2.6. Ábra. $x'' + 4x = \cos 2t$, $x(0) = 1 = x'(0)$

2.32. Példa. (kényszerrezgés) Az előző példát arra az esetre folytatjuk, amikor a rendszer külső frekvenciája (azaz a testre ható periodikus erő frekvenciája) megegyezik a rendszer belső frekvenciájával, tehát $\omega = \omega_0$.

Ebben az esetben az a különbség, hogy az előző példa próbafüggvénye megoldása a homogén egyenletnek. Ezért most a próbafüggvényt az

$$x_{IP} = t(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$$

alakból kaphatjuk meg. Ezt végigszámolva kapjuk, hogy

$$x = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{a}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

az általános megoldása a (2.28) egyenletnek. Ekkor oszcilláló, de nem korlátos megoldásokat kapunk, lásd a 2.6. Ábrát. A gyakorlatban persze ezt a rugó esetében nem tapasztaljuk, hiszen a rugó elszakad túl nagy megnyúlás esetén, illetve negatív irányban nem tudjuk tetszőlegesen elmozdítani a testet. □

2.33. Példa. (csillapított kényszerrezgés) Tegyük fel, hogy van közegellenállás és periodikus külső erő hat a testre:

$$mx'' + \gamma x' + kx = a \cos \omega t. \tag{2.29}$$

Keressük a partikuláris megoldást újra az

$$x_{IP} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

alakban. Az $x'_{IP} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$ és $x''_{IP} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$ deriváltakat behelyettesítve a (2.29) egyenletbe

$$(-mA\omega^2 + \gamma B\omega + kA) \cos \omega t + (-mB\omega^2 - \gamma A\omega + kB) \sin \omega t = a \cos \omega t,$$

azaz

$$\begin{aligned} -mA\omega^2 + \gamma B\omega + kA &= a \\ -mB\omega^2 - \gamma A\omega + kB &= 0. \end{aligned}$$

ω_0 definíciójából következik, hogy $k = m\omega_0^2$, ezért az egyenletrendszer átírható az

$$\begin{aligned} mA(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma B\omega &= a \\ mB(\omega_0^2 - \omega^2) - \gamma A\omega &= 0 \end{aligned}$$

alakban. Ennek megoldása

$$A = \frac{am(\omega_0^2 - \omega^2)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \qquad \text{és} \qquad B = \frac{a\gamma\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

A partikuláris megoldás alakja tehát

$$x_{IP} = A\cos\omega t + B\sin\omega t = R\cos(\omega t - \delta),$$

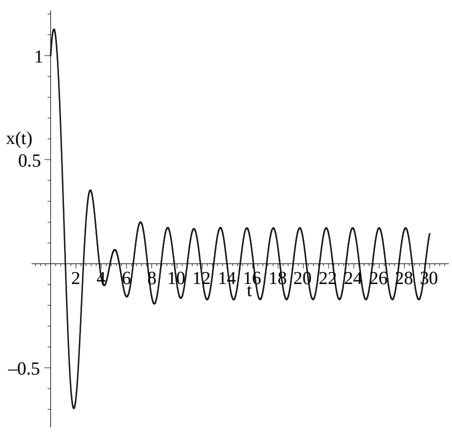
ahol

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|a|}{\sqrt{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\gamma\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

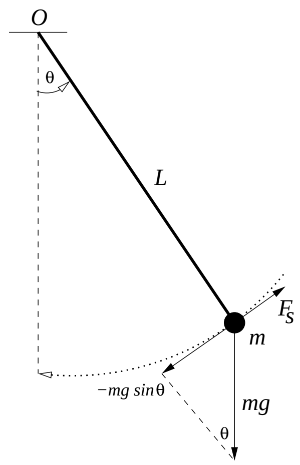
Tegyük fel például, hogy a 2.33. Példában vizsgált 3. eset, azaz kis surlósás esete áll fenn. A 2.33. Példa jelölését használva tehát az egyenlet általános megoldása

$$x(t) = x_H(t) + x_{IP}(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(c_1\cos\mu t + c_2\sin\mu t) + R\cos(\omega t - \delta).$$

A megoldás két függvény összegeként áll elő. A 2.33. Példában láttuk, hogy a homogén egyenlet általános megoldása mindhárom esetben 0-hoz tart. A megoldás ezen részét *tranziens megoldásnak* hívjuk. Nagy t esetén a megoldás képletében $x_H(t)$ elhanyagolható lesz, és $x(t) \approx x_{IP}(t)$, azaz minden kezdeti feltételből nagy t-re közel periodikus megoldást kapunk, ahogy az a 2.7. Ábrán látható. Azt mondjuk, hogy a megoldás egy *periodikus egyensúlyi helyzethez* tart. □



2.7. Ábra. $x'' + x' + 4x = \cos 3t,\ x(0) = 1 = x'(0)$



2.8. Ábra. matematikai inga

2.34. Példa. (ingamozgás) Tekintsünk egy matematikai ingát, azaz egy olyan idealizált ingát, ahol egy súlytalannak tekintett L hosszú rúd végére egy m tömegű testet erősítünk (lásd a 2.8. Ábrát). Ekkor a test egy körpálya mentén mozog.

Jelölje $\theta = \theta(t)$ a rúd függőleges iránytól mért elfordulását radiánban mérve. Egy θ szögű elmozdulás közben a test $s = L\theta$ utat tesz meg a körpályán. A test kerületi sebessége $v = L\theta'$ és a kerületi gyorsulása $a = L\theta''$. A kerületi sebesség és a gyorsulás is a mozgás közben az érintő irányába mutat. A Newton II. törvényét is úgy írjuk fel, hogy a testre ható erők eredőjének érintő irányú komponensét vesszük.

A testre mozgás közben három erő hat: mg súlyerő, F_k kötélerő és F_s surlódási erő. A súlyerő függőlegesen lefele hat, ennek érintő irányú komponense $-mg\sin\theta$, lásd a 2.8. Ábrát. A kötélerő és a súlyerő rúd irányú komponense kiegyenlíti egymást. Feltesszük, hogy a testre mozgás közben egy sebességgel arányos surlódási erő hat. A sebesség érintő irányú, így a surlódási erő is érintő irányú lesz, a mozgás irányával ellentétes irányba mutatva. A szokásos feltételnek megfelelően feltesszük, hogy a nagysága a kerületi sebességgel arányos, azaz $F_s = -\gamma L\theta'$. Feltesszük továbbá, hogy egyéb külső erő nem hat a testre. A mozgásegyenlet tehát

$$mL\theta'' = -\gamma L\theta' - mg\sin\theta$$

alakú. Ezt átrendezve kapjuk

$$\theta'' + \frac{\gamma}{m}\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \tag{2.30}$$

Ez egy másodrendű nemlineáris egyenlet, hiszen $\sin\theta$ szerepel az egyenletben. Konkrét megoldáshoz elő kell írni a

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \text{és} \qquad \theta'(0) = \theta_0'$$

kezdeti feltételeket, amelyek a kezdeti szögelfordulást és szögsebességet adják meg.

Ismert, hogy ha $\theta \approx 0$, akkor $\sin\theta \approx \theta$. Azaz kis szögelfordulások esetén a (2.30) egyenlet közelíthető a

$$\theta'' + \frac{\gamma}{m}\theta' + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{2.31}$$

egyenlettel. Ez egy másodrendű lineáris differenciálegyenlet pozitív konstans együtthatókkal, így a rugómozgás egyenletével azonos. Ezért az ott tárgyalt típusú megoldásai vannak, azaz $\gamma > 0$ esetén mindig csillapodó rezgőmozgást végez az inga.

Nagyobb szögelfordulás esetén persze a nemlineáris egyenletet kell megoldanunk, amelyre nincs analitikus megoldási módszerünk. □