

### 3. Magasabbrendű skaláris differenciálegyenletek

#### 3.1. Bevezetés

Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  egy nyílt intervallum, és legyenek  $p_{n-1}, \dots, p_1, p_0: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Tekintsük az

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \quad x \in I \quad (3.1)$$

$n$ -edrendű inhomogén lineáris skaláris differenciálegyenletet és a megfelelő  $n$ -edrendű homogén lineáris skaláris differenciálegyenletet:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \quad x \in I. \quad (3.2)$$

Az egyenletekhez az

$$y(x_0) = z_1, \quad y'(x_0) = z_2, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = z_n \quad (3.3)$$

kezdeti feltételeket rendeljük, ahol  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ .

Megmutattuk az 1.37. Tételben, hogy a (3.1) egyenletnek bármely (3.3) kezdeti feltételhez létezik egyértelmű megoldása az  $I$  intervallumon.

Könnyen ellenőrizhető, ahogy azt az elsőrendű esetben részletesen megmutattuk, hogy a homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak:

**3.1. Tétel.** *Legyen  $y_1$  és  $y_2$  megoldása a (3.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon. Ekkor  $c_1y_1 + c_2y_2$  is megoldása a (3.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon minden  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ -re (vagy  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ -re), azaz a (3.2) egyenlet megoldásainak halmaza lineáris tér.*

Másodrendű eset mintájára definiáljuk  $n$  darab függvény Wronski-determinánsát:

**3.2. Definíció.** Legyen  $y_1, y_2, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges függvények. A

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$n \times n$ -es determinánst az  $y_1, y_2, \dots, y_n$  függvények *Wronski-determinánsának* hívjuk.

A 2.5. Tétel triviális általánosításaként kapjuk az alábbi eredményt.

**3.3. Tétel.** *Az  $y_1, y_2, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények lineárisan függetlenek az  $I$  intervallumon, ha létezik olyan  $x_0 \in I$ , hogy  $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$ . Ha  $y_1, y_2, \dots, y_n$  lineárisan összefüggő az  $I$  intervallumon, akkor  $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$  minden  $x \in I$ -re.*

A 2.6. Tétel általánosításaként meg lehet mutatni az alábbi eredményt. A bizonyítása ugyan nem nehéz, de hosszadalmas, így elhagyjuk.

**3.4. Tétel (Abel–Liouville-tétel).** *Legyen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  megoldása a (3.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon. Ekkor*

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = c \exp\left(-\int p_{n-1}(x) dx\right), \quad x \in I.$$

**3.5. Következmény.** Legyen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  megoldása a (3.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon. Ekkor vagy  $W(y_1, \dots, y_n)(x) = 0$  minden  $x \in I$ -re vagy  $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$  minden  $x \in I$ -re.

**3.6. Definíció.** Az  $y_1, y_2, \dots, y_n$  függvényeket a (3.2) egyenlet *fundamentális megoldásának* hívjuk, ha  $y_1, y_2, \dots, y_n$  megoldása a (3.2) egyenletnek, és  $y_1, y_2, \dots, y_n$  lineárisan függetlenek  $I$ -n, azaz  $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ , ha  $x \in I$ .

Tegyük fel, hogy az  $y_1, \dots, y_n$  függvények a (3.2) egyenlet

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= z_1^{(1)}, & y_1'(x_0) &= z_2^{(1)}, & \dots & & y_1^{(n-1)}(x_0) &= z_n^{(1)} \\ &\vdots & & & & & & \\ y_n(x_0) &= z_1^{(n)}, & y_n'(x_0) &= z_2^{(n)}, & \dots & & y_n^{(n-1)}(x_0) &= z_n^{(n)} \end{aligned}$$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldásai. A 3.5. Tétel szerint az  $y_1, \dots, y_n$  lineáris függetlenségéhez tehát elegendő egy pontban ellenőrizni, hogy a Wronski-determináns nem nulla. Ha ezt az  $x_0$  pontban ellenőrizzük, akkor

$$W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1^{(1)} & z_1^{(2)} & \dots & z_1^{(n)} \\ z_2^{(1)} & z_2^{(2)} & \dots & z_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & \dots & z_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Kapjuk, hogy  $y_1, \dots, y_n$  akkor és csak akkor lineárisan független, ha a kezdeti feltételekből alkotott  $\mathbf{z}^{(1)} = (z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)})^T, \dots, \mathbf{z}^{(n)} = (z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)})^T$  vektorok lineárisan függetlenek. Kapjuk ezért, hogy mindig létezik (végtelen sok különböző) fundamentális rendszere a (3.2) egyenletnek.

A 2.9. Tétel bizonyítását könnyen általánosítva kapjuk az alábbi eredményt.

**3.7. Tétel.** Legyen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  fundamentális megoldása a (3.2) egyenletnek az  $I$  intervallumon. Ekkor bármely  $z_1, \dots, z_n$  kezdeti feltételhez létezik olyan  $c_1, \dots, c_n$ , hogy  $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$  teljesíti a (3.3) kezdeti feltételeket.

**3.8. Következmény.** A (3.2) egyenlet megoldásainak halmaza  $n$ -dimenziós lineáris tér.

Az első- és másodrendű eseteknél látott eredmények nyilvánvaló általánosításaként kapjuk az alábbi eredményeket:

**3.9. Tétel.** Legyen  $y_1$  és  $y_2$  a (3.1) inhomogén egyenlet két tetszőleges megoldása. Ekkor az  $y = y_1 - y_2$  függvény megoldása a (3.2) homogén egyenletnek.

**3.10. Tétel.** Legyen  $y_H$  a (3.2) homogén egyenlet általános megoldása, és  $y_{IP}$  a (3.1) inhomogén egyenlet egy partikuláris (rögzített) megoldása. Ekkor a (3.1) inhomogén egyenlet általános megoldásának képlete

$$y_{IH} = y_H + y_{IP}.$$

### 3.2. Konstans együtthatós magasabbrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Legyen  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  ( $a_n \neq 0$ ) és tekintsük az

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

konstans együtthatós  $n$ -edrendű homogén lineáris skaláris differenciálegyenletet. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

akkor és csak akkor megoldása a (3.1) egyenletnek, ha  $\lambda$  teljesíti az

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (3.5)$$

algebrai egyenletet. A (3.5) egyenletet a (3.4) egyenlet *karakterisztikus egyenletének*, a

$$p(\lambda) := a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$n$ -edfokú polinomot pedig a (3.4) egyenlet *karakterisztikus polinomjának* nevezzük.

A 3.8. Következmény értelmében a célunk az, hogy találjunk  $n$ -darab lineárisan független megoldását a (3.4) egyenletnek, mert akkor azok fundamentális rendszert alkotnak, azaz lineáris kombinációjuk visszaadja az egyenlet általános megoldását.

1. Tegyük fel először, hogy a (3.5) egyenletnek  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$   $n$  darab páronként különböző valós megoldása van. Ekkor

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

megoldásai a (3.4) egyenletnek, továbbá lineárisan függetlenek is. Ehhez számítsuk ki a Wronski-determinánsukat:

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}.$$

a (3.5) egyenletnek A determináns oszlopaiból kiemelve a közös szorzótényezőket kapjuk, hogy

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Lineáris algebrából ismert, hogy az

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

ú.n. Vandermonde-determináns akkor és csak akkor nem nulla, ha a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  számok páronként különbözők. Ezért  $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$ .

2. Tegyük fel most, hogy  $\lambda_1$   $k_1$ -szeres gyöke a (3.5) egyenletnek. Ekkor megmutatjuk, hogy az

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}, \quad y_3(x) = x^2 e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad y_{k_1}(x) = x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} \quad (3.6)$$

függvények  $k_1$  db lineárisan független megoldását képezik a (3.4) egyenletnek.

Jelölje

$$p(\lambda) := a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

A feltételek szerint

$$p(\lambda_1) = p'(\lambda_1) = \dots = p^{(k_1-1)}(\lambda_1) = 0. \quad (3.7)$$

Jelölje a (3.4) egyenlet bal oldalát leíró lineáris leképezést  $L$ , azaz

$$L(y) := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$

Láttuk korábban, hogy

$$L(e^{\lambda x}) = a_n \frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{\lambda x}) + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(e^{\lambda x}) + \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial x}(e^{\lambda x}) + a_0 e^{\lambda x} = p(\lambda) e^{\lambda x},$$

azaz  $L(e^{\lambda_1 x}) = 0$ . Mivel

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(e^{\lambda x}) = x e^{\lambda x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial \lambda}(e^{\lambda x}) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial x}(e^{\lambda x}),$$

ezért

$$\begin{aligned} L(x e^{\lambda x}) &= a_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x} \right) + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x} \right) + \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x} \right) + a_0 \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda x} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( a_n \frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{\lambda x}) + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(e^{\lambda x}) + \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial x}(e^{\lambda x}) + a_0 e^{\lambda x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( p(\lambda) e^{\lambda x} \right) \\ &= p'(\lambda) e^{\lambda x} + p(\lambda) \lambda e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

így a (3.7) feltételeket használva kapjuk, hogy

$$L(x e^{\lambda_1 x}) = 0.$$

Ennek mintájára és a

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} (f(x)g(x)) = \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} f^{(\ell)}(x) g^{(j-\ell)}(x)$$

azonosságot használva belátható, hogy

$$L(x^j e^{\lambda x}) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} (p(\lambda) e^{\lambda x}) = \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} p^{(\ell)}(\lambda) \lambda^{j-\ell} e^{\lambda x},$$

amiből a (3.7) feltételek szerint következik

$$L(x^j e^{\lambda_1 x}) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, k_1 - 1.$$

Megmutatjuk, hogy a (3.6) függvények lineárisan függetlenek. Ehhez  $m = 1, 2, \dots, k_1 - 1$ -re használjuk az

$$y_m^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m - 2, \quad y_m^{(m-1)}(0) = (m - 1)!$$

összefüggéseket:

$$W(y_1, \dots, y_{k_1})(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & * & 3! & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & \dots & (k_1 - 2)! & 0 \\ * & * & * & * & \dots & * & (k_1 - 1)! \end{vmatrix} = 2 \cdot 3! \cdot \dots \cdot (k_1 - 2)! \cdot (k_1 - 1)! \neq 0.$$

Ebből következik a 3.5. Következmény szerint, hogy  $W(y_1, \dots, y_{k_1})(x) \neq 0$  minden  $x$ -re, azaz a (3.6) függvények lineárisan függetlenek.

3. Tekintsük most az általános esetet, legyen  $\lambda_1$   $k_1$ -szeres,  $\lambda_2$   $k_2$ -szeres,  $\dots$ ,  $\lambda_m$  pedig  $k_m$ -szeres gyöke a (3.5) egyenletnek, ahol  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  páronként különböznek és  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Ekkor láttuk, hogy

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{k_m-1} e^{\lambda_m x}$$

megoldásai a (3.4) egyenletnek. Megmutatjuk, hogy ezek lineárisan függetlenek is, azaz a (3.4) egyenlet fundamentális rendszerét alkotják. A fenti függvények Wronski-determinánsát nem könnyű kiértékelni, ezért most a lineáris függetlenség definícióját alkalmazzuk: Tegyük fel, hogy valamely  $c_{11}, \dots, c_{1k_1}, c_{21}, \dots, c_{2k_2}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mk_m}$  konstansokra

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} x^{j-1} e^{\lambda_i x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor minden együttható nulla kell legyen. Jelölje

$$G_i(x) := \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} x^{j-1}.$$

Ekkor  $G_i$  egy  $k_i - 1$ -edfokú polinom, amelyre

$$\sum_{i=1}^m G_i(x) e^{\lambda_i x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beszorozva ezt az egyenletet az  $e^{-\lambda_1 x}$  függvénnyel kapjuk, hogy

$$G_1(x) + \sum_{i=2}^m G_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ezt  $k_1$ -szer deriválva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=2}^m \tilde{G}_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

és ezért

$$\sum_{i=2}^m \tilde{G}_i(x) e^{\lambda_i x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ahol  $\tilde{G}_i$  ugyanolyan fokszámú polinom, mint  $G_i$ . Ezt tovább folytatva kapjuk, hogy létezik olyan  $H$  polinom, amelynek fokszáma megegyezik  $G_m$  fokszámával, amelyre

$$H(x) e^{\lambda_m x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De ez csak úgy lehet, ha  $H$ , és így  $G_m$  is azonosan nulla. Mivel a gyökök sorrendje tetszőleges lehet, ebből adódik, hogy minden  $i = 1, \dots, m$ -re  $G_i$  azonosan nulla, azaz minden  $c_{ij}$  együttható nulla, és így a függvények lineárisan függetlenek.

Kaptuk tehát, hogy ebben az esetben a (3.4) egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} x^{j-1} e^{\lambda_i x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

4. Ha a (3.5) egyenletnek  $\lambda_1$  komplex gyöke, akkor a (3.6) függvények komplex megoldást adnak. Valós megoldást a következőképpen kaphatunk:

Tegyük fel, hogy  $\lambda = \alpha + i\beta$  egy  $k$ -szoros gyöke a (3.5) egyenletnek. Ekkor persze  $\alpha - i\beta$  is  $k$ -szoros gyöke a (3.5) egyenletnek. Ekkor

$$x^j e^{(\alpha+i\beta)x} = x^j e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

és

$$x^j e^{(\alpha-i\beta)x} = x^j e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

megoldásai a (3.4) egyenletnek  $j = 0, 1, \dots, k-1$ -re, és ezért, ahogy azt a másodrendű homogén egyenleteknél láttuk, ezek valós és képzetes része, azaz

$$x^j e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{és} \quad x^j e^{\alpha x} \sin \beta x$$

is lineárisan független megoldások  $j = 0, 1, \dots, k-1$ -re.

5. A kapott eredményeket a következőképpen foglalhatjuk össze: Legyen  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  a (3.5) egyenlet páronként különböző valós gyökei a  $k_1, \dots, k_s$  multiplicitásokkal, továbbá legyen

$$\tilde{\lambda}_1 = \alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \tilde{\lambda}_r = \alpha_r \pm i\beta_r$$

a (3.5) egyenlet páronként különböző komplex gyök párojai a  $\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_r$  multiplicitásokkal, ahol

$$k_1 + \dots + k_s + 2(\tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_r) = n.$$

Ekkor a (3.4) egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} x^{j-1} e^{\lambda_i x} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\tilde{k}_i} d_{ij} x^{j-1} e^{\alpha_i x} \cos \beta_i x + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\tilde{k}_i} e_{ij} x^{j-1} e^{\alpha_i x} \sin \beta_i x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

**3.11. Példa.** Keressük meg az

$$y^{(6)} + 6y^{(4)} - 7y'' = 0$$

egyenlet általános megoldását! Az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^6 + 6\lambda^4 - 7\lambda^2 = 0,$$

azaz a karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \lambda^6 + 6\lambda^4 - 7\lambda^2.$$

$p$ -t szorzattá alakíthatjuk, mivel  $\lambda^2$ -et kiemelve  $p$ -ből egy  $\lambda^2$ -ben másodfokú kifejezést kapunk:

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^4 + 6\lambda^2 - 7) = \lambda^2(\lambda^4 + 6\lambda^2 - 7) = \lambda^2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 7).$$

Ezért

$$0, \quad 0, \quad 1, \quad -1, \quad \sqrt{7}i, \quad -\sqrt{7}i$$

a 6 gyöke  $p$ -nek. Kaptuk tehát, hogy

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 \cos \sqrt{7}x + c_6 \sin \sqrt{7}x$$

az általános megoldás képlete. □

**3.12. Példa.** Keressük meg az

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 14y'' + 20y' + 25y = 0$$

egyenlet általános megoldását! A megfelelő karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 14\lambda^2 + 20\lambda + 25.$$

Vegyük észre, hogy  $p$  teljes négyzet:

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)^2,$$

így a karakterisztikus egyenlet gyökei

$$-1 + 2i, \quad -1 + 2i, \quad -1 - 2i, \quad -1 - 2i.$$

Tehát az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 e^{-x} \cos 2x + c_2 e^{-x} \sin 2x + c_3 x e^{-x} \cos 2x + c_4 x e^{-x} \sin 2x.$$

□

### 3.3. Inhomogén lineáris egyenletek megoldása konstans variációs módszerrel

Tekintsük újra az

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \quad x \in I \quad (3.10)$$

inhomogén lineáris egyenletet és a megfelelő

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \quad x \in I \quad (3.11)$$

homogén lineáris egyenletet.

Tegyük fel, hogy a (3.11) homogén egyenletnek ismerjük az

$$y_H(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

általános megoldását, azaz  $y_1, \dots, y_n$  egy fundamentális rendszere a (3.11) egyenletnek. Keressük a (3.10) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y_{IP}(x) = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$$

alakban. Ekkor a másodrendű egyenleteknél látott levezetést általánosítva kapható, hogy ha  $u_1, \dots, u_n$  teljesíti az

$$\begin{aligned} u_1'(x)y_1(x) &+ \cdots + u_n'(x)y_n(x) &= 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) &+ \cdots + u_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) &+ \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\ u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) &+ \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

egyenletrendszer, akkor  $y_{IP}$  megoldása a (3.10) egyenletnek, és ekkor az  $y = y_H + y_{IP}$  függvény általános megoldása a (3.11) egyenletnek. Megjegyezzük, hogy a (3.12) egyenlet egy lineáris

egyenletrendszer az  $u'_1, \dots, u'_n$  függvényekre nézve, amely mindig megoldható, hiszen az együtt-hatómátrix determinánsa pontosan  $W(y_1, \dots, y_n)(x)$ , amely nem nulla  $I$ -n, hiszen  $y_1, \dots, y_n$  fundamentális rendszer.

**3.13. Példa.** Adjuk meg az

$$y^{(4)} - 13y'' + 36y = e^{-x} \quad (3.13)$$

általános megoldását! A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = 0,$$

amelynek megoldásai:

$$2, \quad -2, \quad 3, \quad -3.$$

Ezért a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}.$$

A konstansok variálásának módszerét alkalmazva keressük a partikuláris megoldást az

$$y_{IP} = u_1 e^{2x} + u_2 e^{-2x} + u_3 e^{3x} + u_4 e^{-3x}$$

alakban. A (3.12) egyenleteket felírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u'_1 e^{2x} + u'_2 e^{-2x} + u'_3 e^{3x} + u'_4 e^{-3x} &= 0 \\ 2u'_1 e^{2x} - 2u'_2 e^{-2x} + 3u'_3 e^{3x} - 3u'_4 e^{-3x} &= 0 \\ 4u'_1 e^{2x} + 4u'_2 e^{-2x} + 9u'_3 e^{3x} + 9u'_4 e^{-3x} &= 0 \\ 8u'_1 e^{2x} - 8u'_2 e^{-2x} + 27u'_3 e^{3x} - 27u'_4 e^{-3x} &= e^{-x} \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$u'_1 = -\frac{1}{20} e^{-3x}, \quad u'_2 = \frac{1}{20} e^x, \quad u'_3 = \frac{1}{30} e^{-4x}, \quad u'_4 = -\frac{1}{30} e^{2x},$$

és ezért

$$u_1 = \frac{1}{60} e^{-3x}, \quad u_2 = \frac{1}{20} e^x, \quad u_3 = -\frac{1}{120} e^{-4x}, \quad u_4 = -\frac{1}{60} e^{2x}.$$

Kaptuk tehát, hogy

$$y_{IP} = \frac{1}{60} e^{-3x} e^{2x} + \frac{1}{20} e^x e^{-2x} - \frac{1}{120} e^{-4x} e^{3x} - \frac{1}{60} e^{2x} e^{-3x} = \frac{1}{24} e^{-x},$$

és így az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x} + \frac{1}{24} e^{-x}$$

□

Megjegyezzük, hogy a próbafüggvény módszerét is alkalmazhatjuk az előbbi példában:  $y_{IP} = Ae^{-x}$  alakban keresve a partikuláris megoldást, egyértelműen meghatározhatjuk  $A$  értékét:

$$y'_{IP} = -Ae^{-x}, \quad y''_{IP} = Ae^{-x}, \quad y'''_{IP} = -Ae^{-x}, \quad y^{(4)}_{IP} = Ae^{-x}.$$

A (3.13) egyenletbe behelyettesítve

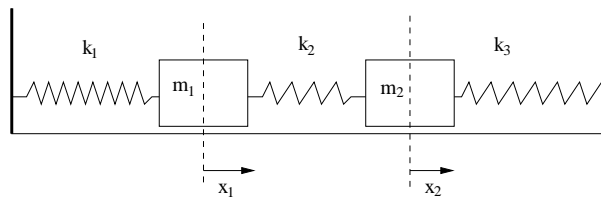
$$Ae^{-x} - 13Ae^{-x} + 36Ae^{-x} = e^{-x},$$

azaz  $24A = 1$ , és így  $A = 1/24$ .

A 2.4. szakaszban a konstans együttthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldásának keresésére megismert módszert magasabbrendű egyenletekre is alkalmazhatjuk a 2.4. szakasz 1. táblázatában leírt inhomogén tagok esetében, annyi módosítással, hogy szükség esetén az  $s = 0, 1, \dots, n$  kitevőt választjuk a próbafüggvény képletben. Részletekbe itt nem megyünk bele.



## 3.4. Alkalmazások



3.1. Ábra. összekapcsolt rugós rendszer

**3.14. Példa.** Tekintsünk két,  $m_1$  és  $m_2$  tömegű testet, amelyeket a 3.1. Ábrán látható módon három rugó fog közre. A két szélső rugó falhoz rögzített. A három rugó rugóállandója rendre  $k_1$ ,  $k_2$  és  $k_3$ . A testek nyugalmi pozíciójukhoz képesti elmozdulását jelölje  $x_1$  és  $x_2$ , ahol a pozitív irányt jobbra választjuk. Tegyük fel, hogy az eredeti hosszukhoz képest  $L_1$ ,  $L_2$  illetve  $L_3$  egységgel vannak megnyújtva (összenyomva) a rugók a nyugalmi helyzetben. Ekkor a rugóerők egyenlősége miatt  $k_1L_1 = k_2L_2 = k_3L_3$  teljesül. Ha a nyugalmi helyzetükből kimozdítjuk a rugókat, és esetleg valamilyen kezdősebességet is adunk a testeknek, akkor a testek mozogni kezdenek az egyes testekre ható rugóerők hatására. Ha az első test  $x_1$  egységgel mozdult el a nyugalmi helyzethez képest, akkor a rugó teljes megnyúlása  $x_1 + L_1$ . Ekkor ha  $x_1 + L_1 > 0$ , akkor az első rugó balra visszahúzza az első testet, így a testre az első rugó által ható erő  $-k_1(x_1 + L_1)$ . Ha viszont  $x_1 + L_1 < 0$ , akkor az első rugó jobbra, azaz pozitív irányba tolja a testet, így ebben az esetben is  $-k_1(x_1 + L_1)$  adja a rugóerő irányát és nagyságát. A második rugó az eddigi állapotához képest  $x_2 - x_1$  egységgel, azaz az eredeti hosszához képest  $x_2 - x_1 + L_2$  egységgel lesz megnyújtva vagy összenyomva. Mint az előbb, most is ellenőrizhető, hogy mindkét esetben a második rugó  $k_2(x_2 - x_1 + L_2)$  erővel hat az első testre. Tegyük fel, hogy az első test és a talaj közötti surlódási együttható  $c_1$ . Ekkor a mozgás közben  $-c_1x_1'$  surlódási erő hat a testre. Ezért Newton I. törvénye szerint teljesül az

$$m_1x_1'' = -k_1(x_1 + L_1) + k_2(x_2 - x_1 + L_2) - c_1x_1'$$

egyenlet. Ezt az  $k_1L_1 = k_2L_2$  összefüggést felhasználva egyszerűsíthetjük:

$$m_1x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_1x_1'. \quad (3.14)$$

Ugyanígy indokolható, hogy a második testre teljesül az

$$m_2x_2'' = k_3(L_3 - x_2) - k_2(x_2 - x_1 + L_2) - c_2x_2'$$

egyenlet, ahol  $c_2$  a második test és a talaj közötti surlódási együttható, és így egyszerűsítés után

$$m_2x_2'' = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_2x_2' \quad (3.15)$$

adódik. Fejezzük  $x_1$ -et a (3.15) egyenletből:

$$x_1 = \frac{m_2x_2'' + c_2x_2' + (k_2 + k_3)x_2}{k_2}, \quad (3.16)$$

és ezt visszahelyettesítjük a (3.14) egyenletbe:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{k_2}(m_2x_2^{(4)} + c_2x_2''' + (k_2 + k_3)x_2'') &= -\frac{k_1 + k_2}{k_2}(m_2x_2'' + c_2x_2' + (k_2 + k_3)x_2) \\ &\quad -\frac{c_1}{k_2}(m_2x_2''' + c_2x_2'' + (k_2 + k_3)x_2') + k_2x_2. \end{aligned}$$

Ez egy

$$a_4 x_2^{(4)} + a_3 x_2''' + a_2 x_2'' + a_1 x_2' + a_0 x_2 = 0$$

alakú negyedrendű homogén lineáris egyenlet  $x_2$ -re, ahol

$$\begin{aligned} a_4 &= m_1 m_2 \\ a_3 &= m_1 c_2 + m_2 c_1 \\ a_2 &= m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) + c_1 c_2 \\ a_1 &= c_1(k_2 + k_3) + c_2(k_1 + k_2) + c_1 c_2 \\ a_0 &= k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3. \end{aligned}$$

Tegyük fel most, hogy a surlódási erő mindkét testnél elhanyagolható, azaz  $c_1 = c_2 = 0$ . Felteesszük továbbá, hogy  $k_1 = k_3 = 2$ ,  $k_2 = 1$ , az első testet jobbra 1 egységgel, a másodikat pedig balra 1 egységgel elmozdítjuk, majd elengedjük a testeket (azaz kezdősebességet nem adunk nekik). Ekkor az

$$x_2^{(4)} + 6x_2'' + 8x_2 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^4 + 6\lambda^2 + 8 = 0,$$

amiből  $\lambda^2 = -2$  vagy  $\lambda^2 = -4$ , azaz  $\lambda = \pm\sqrt{2}i, \pm 2i$ . Kapjuk tehát, hogy

$$x_2 = c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t.$$

Ebből

$$\begin{aligned} x_2' &= -\sqrt{2}c_1 \sin \sqrt{2}t + \sqrt{2}c_2 \cos \sqrt{2}t - 2c_3 \sin 2t + 2c_4 \cos 2t \\ x_2'' &= -2c_1 \cos \sqrt{2}t - 2c_2 \sin \sqrt{2}t - 4c_3 \cos 2t - 4c_4 \sin 2t. \end{aligned}$$

Ezért a (3.16) képlet szerint

$$x_1 = x_2'' + 3x_2 = c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t - c_3 \cos 2t - c_4 \sin 2t.$$

Számítsuk ki:

$$x_1' = -\sqrt{2}c_1 \sin \sqrt{2}t + \sqrt{2}c_2 \cos \sqrt{2}t + 2c_3 \sin 2t - 2c_4 \cos 2t.$$

Az

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = -1, \quad x_2'(0) = 0$$

kezdeti feltételeket felhasználva kapjuk

$$\begin{aligned} c_1 - c_3 &= 1 \\ \sqrt{2}c_2 - 2c_4 &= 0 \\ c_1 + c_3 &= -1 \\ \sqrt{2}c_2 + 2c_4 &= 0, \end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = -1$  és  $c_4 = 0$ , azaz

$$x_1 = \cos 2t \quad \text{és} \quad x_2 = -\cos 2t$$

harmonikus rezgőmozgást végez mindkét test. A megoldások szimmetriája nyilvánvaló, hiszen a feltételek szerint a rendszer paraméterei is szimmetrikusak voltak.

Egy másik lehetőség a (3.14)-(3.15) rendszer átalakítására az, ha bevezetjük az

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1', \quad y_3 = x_2, \quad y_4 = x_2'$$

új változókat. Ekkor a (3.14)-(3.15) rendszer ekvivalens alakja:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= -\frac{k_1}{m_1}y_1 + \frac{k_2}{m_1}(y_3 - y_1) - \frac{c_1}{m_1}y_2 \\y_3' &= y_4 \\y_4' &= -\frac{k_3}{m_2}y_3 - \frac{k_2}{m_2}(y_3 - y_1) - \frac{c_2}{m_2}y_4.\end{aligned}$$

Az  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$  vektor változó tehát teljesíti az  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$  elsőrendű homogén lineáris négydimenziós egyenletrendszert, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{pmatrix}.$$

Ilyen lineáris rendszerek megoldásával a következő fejezetben foglalkozunk. □