Matematikai Analízis I.
Közgazdaságtan matematikai alapjai
1. gyakorló feladatsor
Összetett és inverz függvények képzése

1. **Feladat.** **Adjuk meg** az $f \circ g$ és $g \circ f$ függvényt, ha

   (a) $f_1 :]-\infty; 1] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \sqrt{1-x}$ és $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_1(x) = x^2$.

   (b) $f_2 : [5; \infty[\to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sqrt{x-5}$ és $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_2(x) = e^{(x+1)}$.

   (c) $f_3 :]-2; 4] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = 2x$ és $g_3 : [0; 5] \to \mathbb{R}, \quad g_3(x) = x - 3$.

   (d) $f_4 : [0; 1] \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = 4x + 2$ és $g_4 : [0; 4] \to \mathbb{R}, \quad g_4(x) = 2x - 3$.

   (e) $f_5 : [-2; 1] \to \mathbb{R}, \quad f_5(x) = 7x - 6$ és $g_5 : [-1; 3] \to \mathbb{R}, \quad g_5(x) = 2x + 5$.

2. **Feladat.** **Határozzuk meg** az

   (a) $f_1 : [-1; \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + 2x + x^2$ és $g_1 : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ függvényekből képzett $f_1 \circ g_1$ és $g_1 \circ f_1$ összetett függvényeket!

   (b) $f_2 : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ és $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x+1}{2x^2+3x+2}$ függvényekkel képzett $f_2 \circ g_2$ és $g_2 \circ f_2$ összetett függvényeket!

   (c) $f_3 : [-1; \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + 2x + x^2$ és $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x+1}{2x^2+3x+2}$ függvényekből képzett $f_3 \circ g_3$ és $g_3 \circ f_3$ összetett függvényeket!

3. **Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek **létezik-e inverz függvénye**! Ha igen, **adjuk meg az inverz függvényt**!

   (a) $f_1 : [-3; 3] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + 5$

   (b) $f_2 : [-2; 18] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1$

   (c) $f_3 : [-1; \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + 2x + x^2$

   (d) $f_4 : [-2; \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 + 2x + x^2$

   (e) $f_5 : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{x-2}$

   (f) $f_6 : [3; 5] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3 + \sqrt{x-2}$

   (g) $f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} (1+x^2), & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -(1+x^2), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

   (h) $f_8 : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$

   (i) $f_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x+1}{2x^2+3x+2}$

4. **Feladat.** Adjunk meg az alábbi függvényeknek egy olyan **leszűkítését**, amelynek **van inverze**!

   (a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 - 7x - 8$

   (b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(3x)$

   (c) $f_3 : [-3; 3] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 8x - 2x^3$

5. **Feladat.** Az alábbi függvények közül melyekre igaz, hogy saját magának az inverze (azaz $f^{-1} = f$)?

   (a) $f_1 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{3}{x}$

   (b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2 - x$

   (c) $f_3 : [-\infty; 0] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2 - x$

   (d) $f_4 : [-1; 0] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

   (e) $f_5 : [0; 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

6. **Feladat. Vizsgáljuk meg** a következő f függvényeket monotonitás, korlátosság és paritás szempontjából:

   (a) $f_1 :] - \infty; 2] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \sqrt{2 - x}$.

   (b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = e^{(x+1)}$.

   (c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2x^2 + 4}\right)$.

   (d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \cos(2x)$.

   (e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_5(x) = \dfrac{1}{|2x^3|}$.

   (f) $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_6(x) = \sqrt[3]{4x}$.

   (g) $f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_7(x) = 2^{(x-2)}$.

   (h) $f_8 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_8(x) = \dfrac{x + 2}{x^3 - 4x}$.

   (i) $f_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_9(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 + 3x + 2}$.

   Ahol a fenti függvények nem monotonak, megadható-e olyan leszűkítése az értelmezési tartománynak, ahol monoton lesz a függvény? Ha igen, adj meg ilyen leszűkítést!

Jó munkát!