Matematikai Analízis I.
2. gyakorló feladatsor

Mérnök I. évf. hallgatók számára

Számsorozatok

1. **Feladat.** Vizsgáljuk meg a következő a_n sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából:

   (a) $a_n = \dfrac{2n+4}{3n-3}$

   (b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

   (c) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

   (d) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$

   (e) $a_n = \sqrt[n]{3}$

   (f) $a_n = n^2 - n + 3$

   (g) $a_n = \dfrac{4^n - 2^n}{4^n + 2^n}$

2. **Feladat.** Legyen $\epsilon > 0$. Keressünk az alább megadott a_n sorozatokhoz és az adott ϵ-okhoz olyan $k \in \mathbb{N}$ küszöbszámot, amelyre igaz, hogy $\forall n > k$-ra $|a_n - \lim_{n\to\infty} a_n| < \epsilon$.

   (a) $a_n = \sqrt[n]{3}, \qquad \epsilon = 10^{-1}$

   (b) $a_n = \dfrac{4}{(n+1)^2}, \qquad \epsilon = 10^{-4}$

   (c) $a_n = \dfrac{3-n^2}{5+2n^2}, \qquad \epsilon = 10^{-9}$

   (d) $a_n = \dfrac{1}{2^n}, \qquad \epsilon = 10^{-4}$

   (e) $a_n = \dfrac{3^n}{2^n}, \qquad \epsilon = 10^{-6}$

   (f) $a_n = \dfrac{10^{n+1} - 500}{10^{n-1} + 7}, \qquad \epsilon = 10^{-6}$

3. **Feladat.** Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából (adjunk küszöbszámot konvergens sorozatoknál ($\epsilon > 0$ tetszőleges), egyéb esetben definíció szerint bizonyítsuk, hogy a sorozat $+\infty$ ill. $-\infty$-hez tart)!

   (a) $a_n = \dfrac{2n+4}{3n-3}, \; n = 2, 3, ...$

   (b) $a_n = \dfrac{2n^2+3}{2n^2-n-21}, \; n = 1, 2, ...$

   (c) $a_n = \dfrac{n-1}{5n+1}, \; n = 0, 1, ...$

   (d) $a_n = \dfrac{n-3}{2n^2+7n-15}, \; n = 1, 2, ...$

   (e) $a_n = \dfrac{n^2+3n-1}{2n-213}, \; n = 1, 2, ...$

(f) $a_n = \dfrac{n^2 - 3n - 1}{39 - 2n}$, $n = 1, 2, ...$

(g) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, ...$

(h) $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$, $n = 1, 2, ...$

(i) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$, $n = 1, 2, ...$

(j) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$, $n = 1, 2, ...$

(k) $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{10}$, $n = 1, 2, ...$

4. **Feladat.** Igazoljuk, hogy az $a_n = \dfrac{n-1}{5n+1}$ sorozatnak $\dfrac{24}{125}$ nem határértéke!

5. **Feladat.** Legyen $P > 0$ adott. Keressünk a $+\infty$ ill. $-\infty$-hez tartó sorozatokkal kapcsolatban az adott P értékekhez olyan $k \in \mathbb{N}$ küszöbszámot, melyre igaz, hogy

$$\forall n > k \text{ -ra } a_n > P \text{ ill. } a_n < -P.$$

(a) $a_n = 2\sqrt{n} - n, \qquad P = 10^6$

(b) $a_n = n^3, \qquad P = 10^6$

(c) $a_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n}+1}, \qquad P = 6500$

(d) $a_n = \dfrac{4-n^2}{2+n}, \qquad P = 10^4$

6. **Feladat.** A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be az alábbi állításokat és határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-4}$-hez tartozó küszöbszámot!

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{n+1}\right)^2 = 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4-n^2}{8+2n^2} = -\dfrac{1}{2}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2+3n^2} = \dfrac{1}{3}$

Jó munkát!