Matematikai Analízis I.
5. gyakorló feladatsor

Mérnök Kar I. évf. hallgatók számára

Differenciálszámítás

1. **Feladat.** A definíció alapján határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányadosát az adott pontban!

   (a) $f(x) = x^2$ $\qquad x_0 = 2, -3,\ a$

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad x_0 = 2, 4,\ a\ (> 0)$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$ $\qquad x_0 = 2, -3,\ a\ (\neq 3)$

2. **Feladat.** Hol differenciálható a következő függvény?

   (a)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}, & \text{ha} \quad x > 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (b)
$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & \text{ha} \quad x \leq 0 \\ (x+1)^2, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

   (c)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{ha} \quad x \leq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

3. **Feladat.** Differenciálható-e az alább megadott $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az a helyen? Ha igen, adjuk meg $f'(a)$-t!

   (a) $f(x) = |x-3| \cdot (x-3)$ $\qquad a = 3$

   (b) $f(x) = |x|\sqrt[3]{x}$ $\qquad a = 0$

   (c) $f(x) = (1+|x|)^2$ $\qquad a = 0$

   (d) $f(x) = |1+x|^3$ $\qquad a = -1$

   (e) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad x \geq 1 \\ x^3, & \text{ha} \quad x < 1 \end{cases}$ $\qquad a = 1$

   (f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$ $\qquad a = 0$

   (g) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$ $\qquad a = 0$

   (h) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$ $\qquad a = 0$

   (i) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$ $\qquad a = 0$

   (j) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{ha} \quad x \geq 0 \\ 1 - x^2, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$ $\qquad a = 0$

4. **Feladat.** Differenciálható-e az $f(x) = \mathrm{tg}|x - \frac{\pi}{2}|$ függvény a $\frac{\pi}{2}$ helyen ill. a $\frac{\pi}{4}$ helyen?

5. **Feladat.** Határozzuk meg az a, b, c paraméterek értékét úgy, hogy a függvény mindenütt differenciálható legyen:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b, & \text{ha} \quad x < 2 \\ 2, & \text{ha} \quad x = 2 \\ 2ax^2 - 12x + c, & \text{ha} \quad x > 2 \end{cases}$$

6. **Feladat.** Írjuk fel az alábbi $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények deriváltját!

(a) $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

(d) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

(e) $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos^3(x)$

(f) $f(x) = x^5 \cdot 5^x$

(g) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

(h) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(i) $f(x) = \dfrac{6x+3}{4x-3}$

(j) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

(k) $f(x) = \sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x^2}}$

(l) $f(x) = (\sqrt{x} + 7)^6$

(m) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

(n) $f(x) = \mathrm{arctg}(\frac{1}{x})$

(o) $f(x) = \mathrm{tg}(x^3)\mathrm{arctg}(\sqrt{x})$

(p) $f(x) = e^{3x-7}$

(q) $f(x) = 2^{x + \sqrt[3]{x}}$

(r) $f(x) = x^x$

(s) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(t) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+e^x}{1-e^x}}$

(u) $f(x) = x^{\mathrm{tg}(x)}$

(v) $f(x) = \dfrac{\ln(e^{2x}+1)}{x^{x^2+1}}$

(w) $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x + x^2}\right)$

(z) $f(x) = \dfrac{1 + \mathrm{tg}(x)}{1 - \mathrm{tg}(x)}$

7. **Feladat.** Legyen $f(x) = \sin^2(x)$. Határozzuk meg $f^{(5)}(x)$ és $f^n(x)$-et!

8. **Feladat.** Határozzuk meg az

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ függvény grafikonjának $x = 2$ abszcisszájú pontjához húzott érintő egyenletét!

(b) $f(x) = (x+1) \cdot \sqrt[3]{3-x}$ függvény görbéjének $(-1; 0)$ pontjába húzott érintő egyenletét!

(c) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ függvény görbéjének az x tengellyel alkotott metszéspontjaiba húzott érintőinek egyenleteit!

9. **Feladat.** Tekintsük az $y = \sqrt{x}$ egyeneletű görbét!

(a) Írjuk fel a görbét $(4; 2)$ pontjában érintő egyenes egyenletét!

(b) Írjuk fel a görbe $(-1; 0)$ ponton átmenő érintőjének egyenletét!

(c) Írjuk fel a görbe $m = 2$ meredekségű érintőjének egyenletét!

10. **Feladat.** Adjuk meg az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiberbola $(2; \sqrt{3})$ pontjához tartozó érintő egyenletét!

Jó munkát!