

Matematikai Analízis I.

6. gyakorló feladatsor

Mérnök Kar I. évf. hallgatók számára

Függvényvizsgálat

1. **Feladat.** Vizsgáljuk meg a következő függvényeket, van-e szélsőértékük, s ha van, milyen. Határozzuk meg azokat az intervallumokat is, amelyeken a függvény monoton:

(1) $x^4 - x^2$	(2) $\frac{x}{x^2 + 1}$	(3) $x^3 - 12$
(4) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	(5) $x\sqrt{1 - x^2}$	(6) e^{-x^2}

2. **Feladat.** A következő függvényeknél vizsgáljuk meg, hogy a függvény görbéje mely intervallumban konvex, ill. konkáv. Határozzuk meg a függvény inflexiós pontjainak koordinátáit is!

(1) $x^3 - 3x^2 - 9x + 9$	(2) $x^2 - 2x + 5$	(3) $\frac{4x}{x^2 + 1}$
(4) $\frac{x^2}{2} + \ln(x)$	(5) $x \cdot e^{-x}$	(6) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

3. **Feladat.** Diszkutáljuk (ábrázoljuk) az alábbi függvényeket!

(1) $(x - 1)^2(x + 2)$	(2) $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$	(3) $1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$
(4) $\frac{2x}{5} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{10}$	(5) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2}$	(6) $3\sqrt[3]{x} - x$
(7) $(x - 1)\sqrt{x}$	(8) $\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}$	(9) $x + e^{-x}$
(10) $16x(x - 1)^3$	(11) $\frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{2 - x}$	(12) $\frac{(2 - x)^3}{(x - 3)^2}$
(13) $\arcsin(1 - \sqrt[3]{x^2})$	(14) $\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^4$	(15) $2x - 1 - \frac{1}{x + 1}$
(16) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$	(17) $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}}$	(18) $\ln(1 + e^x)$
(19) $\frac{3x^4 + 1}{x^3}$	(20) $\frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$	(21) $\arcsin\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$
(22) $\operatorname{arctg}(\ln(x))$	(23) $x \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$	(24) $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 3x}$
(25) $\sqrt[3]{1 - x^2}$	(26) $\ln(x) - \operatorname{arctg}(x)$	(27) $\ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}\right)$
(28) $\frac{e^x}{1 + x}$	(29) $\arcsin(x) + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	(30) $\frac{x}{e^x(x - 1)}$

4. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével!

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - x - 4}$	(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin(x)}$	(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x + 1)}$
(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \sin(x)}$	(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$	(6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(5x)}$
(7) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$	(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos(x)}$	(9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x)$

5. **Feladat.** Igazoljuk, hogy a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

határérték kiszámítására a L'Hospital-szabály nem alkalmas!

Jó munkát!