

# Matematikai Analízis I.

## 7. gyakorló feladatsor

Mérnök Kar I. évf. hallgatók számára

### Szélsőértékszámítás

1. **Feladat.** Állapítsuk meg, hogy  $a$  milyen értéke mellett lesz  $x_0 = 2.25$  az

$$f(x) = 2ax^2 + 2a^2x - 81x - 24$$

függvény minimumhelye!

2. **Feladat.** Osszunk fel egy 30 cm-es szakaszt két részre úgy, hogy a részekkel szerkesztett négyzetek területének összege a legkisebb legyen!
3. **Feladat.** Egy pozitív számhoz adjuk hozzá a reciprokát. Melyik szám esetén lesz az összeg minimális?
4. **Feladat.** Adott egy háromszög  $a$  alapja és  $m$  magassága. Mikor lesz a háromszög kerülete minimális?
5. **Feladat.** Egy  $a$  alapú  $m$  magasságú háromszögbe írjunk be olyan téglalapot, amelynek egyik oldala a háromszög alapján fekszik. Mikor lesz a téglalap területe maximális?
6. **Feladat.** Írjunk egy adott sugarú kör köré
- (a) minimális kerületű egyenlő szárú háromszöget;
  - (b) minimális kerületű derékszögű háromszöget.
7. **Feladat.** Határozzuk meg a legnagyobb területű az egységnyi sugarú körbe írt téglalapok közül.
8. **Feladat.** Határozzuk meg az adott  $A$  felszínű forgáshengerek közül a legnagyobb térfogatút!
9. **Feladat.** Milyen méretei vannak a legkisebb felszínű,  $1 \text{ dm}^3$  térfogatú forgáshengernek?
10. **Feladat.** Egy 25 m hosszú alagút keresztmetszete téglalapra helyezett félkör alakú. A keresztmetszet kerülete 18 m. Hogyan kell megválasztani a félkör sugarát, hogy az alagút térfogata a lehető legnagyobb legyen?
11. **Feladat.** Mekkora egy egységnyi sugarú gömbbe írható hengerek térfogatának a maximuma?
12. **Feladat.** Egy adott termék  $K(x)$  termelési költsége az  $x$  termelt mennyiség függvényében:

$$K(x) = 0.1x^3 - x^2 + 50x + 100$$

Állapítsuk meg, hogy mekkora termelés esetén lenne az egységre eső átlagköltség minimális.

13. **Feladat.** Tételezzük fel, hogy valamely termék  $f(p)$  kg-ban kifejezett kereslete és annap  $p$  forintos egységára között az

$$f(p) = -2p + 180$$

összefüggés áll fenn.

- (a) Hány Ft-os egységár mellett lenne az árbevétel maximális, és hány forint ez a maximum?
- (b) Mekkora kereslet tartozik ehhez az egységárhoz?

14. **Feladat.** Valamely termék nyereségfüggvénye:

$$N(x) = -4x^2 + 250x - 270$$

költségfüggvénye:

$$K(x) = 70x + 2.$$

Határozzuk meg, hogy milyen  $x$  darabszám mellett veszi fel maximális értékét az árbevétel függvénye!

15. **Feladat.** Valamely árucikk iránti keresletet az

$$f(p) = e^{-0.01p+12}$$

keresleti függvény fejezi ki, ahol  $p$  az egységár,  $f(p)$  pedig a hozzá tartozó keresletet jelenti.

- (a) Milyen egységár mellett lenne az árbevétel maximális?  
(b) Mekkora ehhez az egységárhoz tartozó kereslet?

16. **Feladat.** Az A város 11 km-re van egy folyótól. Egy B város pedig éppen a folyó partján fekszik. A két város távolsága 60 km. Az A városból rendszeres szállítmányok mennek B-be. Egységnyi szállítmány szállítási költsége szárazföldön kilométerenként duplája a vízi úton történő szállításának. Milyen irányban kell egy egyenes utat megépíteni a folyóparthoz, hogy a szállítmányok a legkisebb költséggel jussanak B-be? (Tételezzük fel, hogy a folyó a szóban forgó szakaszon nem kanyarog, a megadott távolságok légvonalban értendők.)

17. **Feladat.** Az egymástól 6 km távolságban lévő A és B pont között csővezetékot kell lefektetni, amely valahol elágazik a C pont felé. A C pont az AB egyenesről 1 km-re fekszik. A C pontból az AB egyenesre bocsátott merőleges talppontja a B ponttól 2 km távolságra van. A csővezeték az elágazásig a legvastagabb csőből készül, amelynek ára 1000 Ft méterenként. Az elágazástól B-ig 800 Ft-os, a C-ig pedig 600 Ft-os cső fektetendő.

Az A ponttól hány km-re létesítsünk elágazást, ha azt akarjuk, hogy a lefektetendő csővezeték-rendszer költsége minimális legyen?

18. **Feladat.** Egy trapéz keresztmetszetű csatornát kell készítenünk, amelynek a földben levő minden oldala  $l$  hosszúságú. Hány fokos szöget kell bezárnia a nem párhuzamos oldalnak a vízszintessel, hogy a keresztmetszet a lehető legnagyobb legyen?

19. **Feladat.** Legyen egy gép vételára  $P$  Ft. A gép értéke a használat során nyilván csökken. Fejezzi ki  $\varphi(t)$  függvény azt, hogy az eredeti vételár hányadrésére csökken  $t$  idő alatt. Erre a  $\varphi(t)$  függvényre nyilván igaz, hogy  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(t) \geq 0$ , és hogy  $\varphi(t)$  monoton csökkenő függvény. Jelölje  $r(t)$  a  $t$  idő alatti ráfordítások (javítások, alkatrészcsere, ...) költségét. Erre nyilván igaz, hogy  $r(0) = 0$ , és hogy  $r(t)$  monoton növekvő függvény.

Írjuk fel a gép  $t$  időhöz tartozó használati költségét és az időegységre eső átlagos használati költségét!

Írjuk fel az átlagos használati költséget arra az esetre, ha

$$P = 100000, \quad \varphi(t) = \frac{8}{8+t} \quad \text{és} \quad r(t) = 250t^2.$$

Állapítsuk meg, hogy hány évig érdemes a gépet üzemben tartani (a költségeket Ft-ban, az időt években mérjük).

*Jó munkát!*