

Gyakorló feladatok - 1.

MA1122f

1. Számítsa ki a következő függvények Laplace-transzformáltját:

- (a) $f(t) = 3(t-2)^3 - 2(t+1)^2 - 7t + 2$ (b) $f(t) = \operatorname{ch} 5t$
(c) $f(t) = e^{-2t} \sin 3t$ (d) $f(t) = \sin 5t \cos 2t$
(e) $f(t) = t^3 e^{7t}$ (f) $f(t) = t^2 e^{3t} \cos 8t$
(g) $f(t) = 2^{5t}$ (h) $f(t) = 5 - e^{4it}$

2. Számítsa ki a következő függvények inverz Laplace-transzformáltját:

- (a) $F(s) = \frac{3}{s^2+4}$ (b) $F(s) = \frac{4}{(s-1)^3}$
(c) $F(s) = \frac{2}{s^2+3s-4}$ (d) $F(s) = \frac{s+4}{s^2-s-6}$
(e) $F(s) = \frac{2s+2}{s^2+2s+5}$ (f) $F(s) = \frac{2s+1}{s^2-2s+2}$
(g) $F(s) = \frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$ (h) $F(s) = \frac{s^2+2s-4}{s^3-5s^2+2s+8}$

3. Legyen $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ és $c, k > 0$. Igazolja a következő azonosságokat:

(a) $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$

4. Laplace-transzformált módszerrel oldja meg a következő kezdeti érték feladatokat:

- (a) $y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 3/2$,
(b) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$,
(c) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,
(d) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$,
(e) $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$,
(f) $y'' - 2y' + 2y = \cos t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
(g) $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$,
(h) $y'' - 4y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
(i) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$,
(j) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.