Gyakorló feladatok - 4.

MA1122f

1. Legyen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Mutassa meg, hogy f Lebesgue-mérhető!

2. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton függvény. Mutassa meg, hogy f Lebesgue-mérhető!

3. Mutassa meg, hogy a következő $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Lebesgue-mérhető függvények:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ racionális}, \\ x, & x \text{ irracionális}, \end{cases}$

4. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Igaz-e, hogy ha $|f|$ Lebesgue-mérhető függvény, akkor f is Lebesgue-mérhető?

5. Legyen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Igazolja, hogy ha $f = g$ majdnem mindenütt (a Lebesgue-mérték szerint), és f Lebesgue-mérhető, akkor g is Lebesgue-mérhető függvény!

6. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvény. Mutassa meg, hogy

   (a) $2f$, (b) f^2, (c) $1/f$ (ha $f(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$)

   Lebesgue-mérhető!

7. Legyen m az egy- ill. kétdimenziós Lebesgue-mérték. Számítsa ki az $\int_A f\, dm$ integrált, ha

   (a) $f(x) = x^2, \qquad A = [0, 2]$,

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases} \qquad A = [0, 2]$,

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ racionális}, \\ x, & x \text{ irracionális}, \end{cases} \qquad A = [0, 2]$,

   (d) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \text{ racionális}, \\ 1, & xy \text{ irracionális}, \end{cases} \qquad A = [0, 1] \times [0, 1]$.

8. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, $f\colon E \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ ha $x \in E$, és $\int_E f(x)\, dm = 0$.

   (a) Legyen $A_n = \{x \in E\colon f(x) > 1/n\}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Mutassa meg, hogy $m(A) = 0$ akkor és csak akkor, ha $m(A_n) = 0$ minden n-re!

   (b) Mutassa meg, hogy $f(x) = 0$ majdnem minden $x \in E$-re!

9. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető, $m(E) = 0$, $f\colon E \to \mathbb{R}$. Igazolja, hogy $\int_E f(x)\, dm = 0$!

10. Legyen $r_1, r_2, \ldots$ a racionális számok sorozata a $[0, 1]$ intervallumon,

    $$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

    Legyen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Mutassa meg, hogy f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ és f Lebesgue-integrálható $[0, 1]$-en! Számítsa ki $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n\, dm$-et és $\int_{[0,1]} f\, dm$-et! Riemann-integrálható-e f_n illetve f a $[0, 1]$ intervallumon?

11. Legyen m az $\mathbb{R}$-en értelmezett Lebesgue-mérték, $\mathcal{M}$ a Lebesgue-mérhető halmazok osztálya. Definiáljuk a következő halmazfüggvényt $A \in \mathcal{M}$-re:

$$\mu(A) = \begin{cases} m(A)+1, & 0 \in A, \\ m(A), & 0 \notin A. \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy μ egy σ-additív halmazfüggvény $\mathcal{M}$-en! Számítsa ki a következő integrálokat:

$$\int_{[-1,1]} 1\,d\mu, \quad \int_{[0,1]} 1\,d\mu, \quad \int_{(0,1)} 1\,d\mu, \quad \int_{[-1,1]} x\,d\mu, \quad \int_{[0,1]} x\,d\mu, \quad \int_{(0,1)} x\,d\mu.$$

12. Legyen μ az az additív halmazfüggvény $\mathbb{R}$ részhalmazain, melyre $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}) = 0$, és $\mu(\{n\}) = 1$ minden $n \in \mathbb{Z}$-re. Mutassa meg, hogy μ σ-additív! Igazolja, hogy

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n), \qquad \text{illetve általában} \qquad \int_E f\,d\mu = \sum_{n\in E} f(n).$$

13. Mutassa meg, hogy egy korlátos változású függvény Lebesgue-mérhető!

14. Mutassa meg, hogy korlátos változású függvények

(a) összege, (b) szorzata

korlátos változású!

15. Számítsa ki a következő Riemann-Stieltjes integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x\,d\alpha(x), \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & x=-1, \\ 1, & x \in (-1,2), \\ -1, & x \geq 2, \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} x^2\,d\alpha(x), \qquad \alpha(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1/2), \\ 0, & x \in [1/2,3/2), \\ 2, & x = 3/2, \\ -2, & x \in (3/2,2], \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x+2)\,d\alpha(x), \qquad \alpha(x) = \begin{cases} x^3-x, & x \in [-1,0), \\ x^2+x & x \in [0,1], \end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2+3)\,d\alpha(x), \qquad \alpha(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1,0], \\ 2, & x \in (0,1), \\ x^2-1, & x \in [1,2], \end{cases}$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{4} (1-x^3)\,d\alpha(x), \qquad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & x=-1 \\ x+2, & x \in (-1,0], \\ x^2-1, & x \in (0,1), \\ 2-x, & x \in [1,4], \end{cases}$

(f) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,d\alpha(x),$ ahol

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \in [-2,0), \\ x^3+x & x \in [0,2], \end{cases} \qquad \alpha(x) = \begin{cases} x^3-x, & x \in [-2,1], \\ x^2+x & x \in (1,2]. \end{cases}$$