3. Mérték- és integrálelmélet

3.1. Halmazok számossága

Azt mondjuk, hogy egy véges A halmaz *számossága* n, ha az A halmaz n db elemből áll. Ez azzal ekvivalens, hogy a halmaz elemeit egy $a_1, \dots, a_n$ véges sorozatba tudjuk rendezni, más szóval megadható az $\{1, 2, \dots, n\}$ és az A halmaz elemei között egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés (bijekció). Végtelen halmazokra ily módon tudjuk a számosság fogalmát általánosítani. Először tekintsük a természetes számok halmazának számosságát. Jelölje $\mathbb{N}$ a természetes számok, azaz a pozitív egész számok halmazát.

3.1. Definíció. Egy végtelen A halmaz *megszámlálható* vagy *megszámlálható számosságú*, ha létezik a természetes számok halmaza és az A halmaz között egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés.

3.2. Megjegyzés. Más szóval a fenti definíció azt jelenti, hogy az A halmaz megszámlálható számosságú, ha az elemei egy $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ végtelen sorozatba rendezhetők, ahol az A halmaz minden eleme pontosan egyszer szerepel a sorozatban.

Tegyük fel most, hogy adott egy tetszőleges (a_n) sorozat. Ekkor egy elem többször is előfordulhat a sorozatban. Megmutatjuk, hogy mindig található a sorozatnak egy olyan (esetleg véges) részsorozata, amelyben minden elem már csak egyszer fordul elő: legyen $b_1 = a_1$. Tekintsük a_2-t. Ha $a_2 \neq b_1$, akkor legyen $b_2 = a_2$, egyébként kihagyjuk a_2-t, és tekintsük a_3-t. Tegyük fel, hogy már az $a_1, \dots, a_n$ tagokat átnézve kiválasztottuk a $b_1, \dots, b_m$ $(m \leq n)$ számokból álló részsorozatot úgy, hogy abban $b_1, \dots, b_m$ páronként különböző. Ekkor a_{n+1}-t véve ellenőrizzük, hogy az előfordul-e a $b_1, \dots, b_m$ számok között. Ha nem, akkor az a_{n+1} számmal folytatjuk a $b_1, \dots, b_m$ sorozatot, azaz legyen $b_{m+1} = a_{n+1}$, egyéként nem bővítjük a $b_1, \dots, b_m$ sorozatot, hanem ismételjük ezt az eljárást az a_{n+2} számmal. Íly módon egyértelműen definiálható a $b_1, b_2, \dots$ (esetleg véges) sorozat, hogy abban az elemek már nem ismétlődnek. Ezért az $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ halmaz megszámlálható számosságú, ha van végtelen sok páronként különböző eleme, egyébként véges számosságú.

3.3. Példa. A nemnegatív egész számok halmaza ($\mathbb{N}_0$) megszámlálható, hiszen $\phi(n) = n + 1$ egy bijekció $\mathbb{N}_0$ és $\mathbb{N}$ között. □

3.4. Példa. Az egész számok halmaza ($\mathbb{Z}$) megszámlálható, hiszen egy lehetséges sorbarendezése $\mathbb{Z}$-nek $0, 1, -1, 2, -2, \dots$. A

$$\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \qquad \phi(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ k, & n = 2k, \qquad k \in \mathbb{N}, \\ -k, & n = 2k+1, \qquad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

leképezés tehát egy bijekció $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ között. □

3.5. Példa. A $[0, 1]$ intervallumba eső racionális számokat a következő végtelen háromszög alakú táblázatban lehet felsorolni:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Ha ezen a táblázaton soronként megyünk végig, akkor felsorolhatjuk az összes racionális számot egy sorozatban:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots$$

Ekkor persze néhány racionális számot többször (sőt végtelen sokszor) is felsorolunk. De a fenti sorozatból a 3.2. Megjegyzésben leírt módon kiválaszthatunk egy olyan részsorozatot, amelyben már minden 0 és 1 közötti racionális szám pontosan egyszer szerepel, tehát a $[0,1]$ intervallumba eső racionális számok halmaza megszámlálható számosságú. □

3.6. Példa. Megmutatjuk, hogy a $[0,1]$ intervallum nem megszámlálható számosságú. Tegyük fel, hogy az összes 0 és 1 közötti valós számot az $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozatba rendeztük. Vegyük az a_n szám tizedes tört előállítását, ahol a tizedes jegyeket jelölje:

$$a_n = 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} a_4^{(n)} \dots .$$

Ismert, hogy véges sok tizedesjeggyel leírható valós számok megadhatók végtelen sok tizedesjeggyel is (például 0,5 = 0,49999…). Ilyen valós számokra a fenti felírásban mindig vegyük az a_n végtelen tizedestörtes alakját. Ekkor egyértelműen hozzárendeltük a 0 és 1 közötti valós számokhoz a végtelen tizedestörtes alakját.

Tekintsük ezután azt az $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ valós számot, amelynek n-edik tizedesjegye

$$x_n = \begin{cases} 2, & \text{ha } a_n^{(n)} = 1, \\ 1, & \text{ha } a_n^{(n)} \neq 1. \end{cases}$$

Ekkor x nem írható fel véges tizedestört alakban (nem végződhet csupa 0-ra vagy csupa 9-re), és x nem egyezik meg egyik a_n valós számmal sem, hiszen x és a_n tizedestört felírása az n-edik tizedesjegyben eltér. Ez az ellentmondás mutatja, hogy a $[0,1]$ halmaz nem megszámlálható számosságú. A $[0,1]$ intervallum számosságát *kontinuum számosságnak* hívjuk. Megmutatható, hogy a valós számok halmaza és a $[0,1]$ intervallum között létezik bijekció, azaz $\mathbb{R}$ számossága is kontinuum. □

3.7. Állítás.

1. *Egy megszámlálható halmaz minden végtelen részhalmaza is megszámlálható.*
2. *Minden végtelen halmaznak létezik megszámlálható részhalmaza.*
3. *Legyen A_1 megszámlálható és A_2 véges halmaz. Ekkor $A_1 \cup A_2$ is megszámlálható.*
4. *Legyen A_1 és A_2 megszámlálható halmazok. Ekkor $A_1 \cup A_2$ is megszámlálható.*
5. *Legyen A_1 és A_2 megszámlálható halmazok. Ekkor az $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \colon a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2\}$ halmaz is megszámlálható.*
6. *Legyen A_i megszámlálható halmaz minden $i \in \mathbb{N}$-re. Ekkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ is megszámlálható.*

Bizonyítás: Csak az utolsó állítást látjuk be, a többi hasonló módon igazolható. Rendezzük az A_i halmaz elemeit az $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \ldots$ sorozatba. Ekkor az $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ halmaz elemeit a

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_1^{(1)} & & a_2^{(1)} & \to & a_3^{(1)} & & a_4^{(1)} & \to & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_1^{(2)} & & a_2^{(2)} & & a_3^{(2)} & & a_4^{(2)} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_1^{(3)} & & a_2^{(3)} & & a_3^{(3)} & & a_4^{(3)} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_1^{(4)} & & a_2^{(4)} & & a_3^{(4)} & & a_4^{(4)} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

(jobbra és lefele is) végtelen táblázatban lehet felsorolni. Ekkor az összes elemet egy sorozatban fel tudjuk sorolni, ha a táblázat átlói mentén a nyilak irányában kezdjük felsorolni az elemeket:

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_1^{(4)}, a_2^{(3)}, a_3^{(2)}, a_4^{(1)}, a_5^{(1)}, a_4^{(2)}, a_3^{(3)}, a_2^{(4)}, a_1^{(5)}, \ldots.$$

Ezután a fenti sorozatból az azonos tagokat elhagyva kaphatunk egy olyan részsorozatot, amely az A halmaz összes elemeit pontosan egyszer tartalmazza. □

3.8. Példa. A 3.5. Példa és a 3.7. Állítás 6. pontja alapján a racionális számok halmaza ($\mathbb{Q}$) is megszámlálható, mivel $\mathbb{Q}$ felírható megszámlálható sok megszámlálható számosságú halmaz uniójaként: $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=-\infty}^{i=+\infty} B_i$, ahol $B_i = \mathbb{Q} \cap [i, i+1]$. Megjegyezzük, hogy a fenti végtelen unió megszámlálható sok halmaz uniója, mivel a 3.4. Példa szerint az egész számok halmaza megszámlálható számosságú. □

3.9. Példa. Az előző példa és a 3.7. Állítás 5. pontja alapján a síkon a racionális koordinátájú pontok halmaza is megszámlálható. □

3.2. Halmazgyűrűk és halmazfüggvények

Ebben a szakaszban feltesszük, hogy az itt szereplő halmazok egy X alaphalmaz részhalmazai (pl. $X = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, stb.), és $\mathcal{H}$-val jelöljük az X alaphalmaz részhalmazainak egy halmazát, vagy más szóval, *halmazrendszerét*. A szokásos jelölést használjuk a halmazműveletekre: Legyen $A, B \in \mathcal{H}$, ekkor $A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ vagy } x \in B\}$, $A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ és } x \in B\}$, és $A \setminus B = \{x\colon x \in A \text{ és } x \notin B\}$, az A halmaz komplementere az $X \setminus A$ halmaz. Jelölje $\emptyset$ az üreshalmazt. Az A és B halmazt *diszjunktnak* nevezzük, ha $A \cap B = \emptyset$. Egy $A_1, A_2, \ldots$ halmazrendszert *páronként diszjunktnak* nevezünk, ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$-re.

3.10. Definíció. A $\mathcal{H}$ halmazrendszert *halmazgyűrűnek* vagy röviden *gyűrűnek* nevezzük, ha zárt az unió és a különbség halmazműveletekre, azaz tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ esetén

$$A \cup B \in \mathcal{H} \quad \text{és} \quad A \setminus B \in \mathcal{H}.$$

3.11. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ egy gyűrű. Ekkor*

1. *$\mathcal{H}$ zárt a metszet műveletre is,*
2. *$\emptyset \in \mathcal{H}$.*

Bizonyítás:
1. Ha $A, B \in \mathcal{H}$, akkor $A \setminus B \in \mathcal{H}$, és ezért $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{H}$.
2. Legyen $A \in \mathcal{H}$. Ekkor $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{H}$. □

3.12. Példa. Legyen $\mathcal{H} = \{E \subset \mathbb{R} \colon E \text{ véges}\}$ (az üres halmazt is véges halmaznak tekintjük). Ekkor nyilván $\mathcal{H}$ gyűrű, hiszen véges halmazok uniója és különbsége is véges. □

3.13. Példa. Legyen $\mathcal{H} = \{E \subset \mathbb{N} \colon E \text{ véges vagy komplementere véges}\}$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{H}$ gyűrű!

Először megmutatjuk, hogy $\mathcal{H}$ zárt az unió műveletre. Legyen $A, B \in \mathcal{H}$. Két esetet különböztetünk meg: 1. Ha A és B is véges, akkor $A \cup B$ is véges. 2. Ha legalább az egyik halmaz, például B nem véges, de $\overline{B}$ véges, akkor $A \cup B$ nem véges, de a komplementere, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{B}$ véges, függetlenül A számosságától.

Most legyen $A, B \in \mathcal{H}$, és megmutatjuk, hogy $A \setminus B \in \mathcal{H}$. Három esetet különböztetünk meg: 1. Ha A véges, akkor $A \setminus B$ is véges, függetlenül B számosságától. 2. Ha A nem véges, de komplementere véges, és B véges, akkor $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$ véges. 3. Ha A és B nem végesek, de $\overline{A}$ és $\overline{B}$ végesek, akkor $A \setminus B \subset \overline{B}$, így $A \setminus B$ véges. Mindhárom esetben tehát kaptuk, hogy $A \setminus B \in \mathcal{H}$. □

3.14. Definíció. A $\mathcal{H}$ halmazgyűrűt *σ-gyűrűnek* nevezzük, ha zárt a megszámlálható unióképzésre, azaz ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{H}$, akkor

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}.$$

A $\mathcal{H}$ σ-gyűrűt *σ-algebrának* nevezzük, ha az alaphalmaz is hozzátartozik $\mathcal{H}$-hoz, azaz $X \in \mathcal{H}$.

3.15. Példa. Az X halmaz összes részhalmazainak halmaza mindig σ-algebra. □

3.16. Példa. Legyen $\mathcal{H} = \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ véges vagy megszámlálható számosságú}\}$. Ekkor $\mathcal{H}$ σ-algebra a 3.7. Állítás szerint. □

3.17. Példa. Tekintsük a 3.12. Példában definiált $\mathcal{H}$ halmazrendszert. Ez gyűrű, de nem σ-gyűrű, hiszen a halmazrendszer nem zárt a megszámlálható unióra.

Hasonlóan, a 3.13. Példában definiált $\mathcal{H}$ halmazrendszer is csak gyűrű, de nem σ-gyűrű, hiszen például a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálható, ezért előáll véges halmazok megszámlálható uniójaként, de $\mathbb{Q} \notin \mathcal{H}$, hiszen sem $\mathbb{Q}$ sem a komplementere nem véges. □

3.18. Megjegyzés. Egy $\mathcal{H}$ σ-gyűrű zárt a megszámlálható metszetképzésre is, mivel ha $A_n \in \mathcal{H}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \in \mathcal{H}.$$

Nyilván egy $\mathcal{H}$ σ-algebra zárt a komplementer képzésre is.

3.19. Definíció. Az $F\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}_b \stackrel{\text{def}}{=} \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$ függvényt *halmazfüggvénynek* hívjuk, ha $+\infty$ és $-\infty$ egyidejűleg nem eleme F értékkészletének, és van olyan $A \in \mathcal{H}$, amelyre $|F(A)| \neq +\infty$. F-et *additív halmazfüggvénynek* nevezzük, ha

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B), \qquad \text{ha } A, B \in \mathcal{H} \text{ és } A \cap B = \emptyset.$$

Ha $F(A) \geq 0$ minden $A \in \mathcal{H}$-ra, akkor F-et *nemnegatív halmazfüggvénynek* nevezzük.

Megmutatjuk az additív halmazfüggvények alábbi tulajdonságait.

3.20. Állítás. *Legyen $F\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}_b$ egy additív halmazfüggvény. Ekkor*

1. $F(\emptyset) = 0$;
2. $F(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = F(A_1) + \cdots + F(A_n)$, *ha $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt, azaz $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$-re;*
3. $F(A_2 \setminus A_1) = F(A_2) - F(A_1)$, *ha $A_1 \subset A_2$, $A_1, A_2 \in \mathcal{H}$ és $F(A_1) < \infty$;*
4. *ha F nemnegatív, akkor monoton is, azaz $F(A_1) \leq F(A_2)$, ha $A_1 \subset A_2$, $A_1, A_2 \in \mathcal{H}$;*
5. *ha F nemnegatív, akkor $F(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq F(A_1) + \cdots + F(A_n)$ minden $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$-ra.*

Bizonyítás:
1. Az $F(\emptyset) = F(\emptyset \cup \emptyset) = F(\emptyset) + F(\emptyset) = 2F(\emptyset)$ összefüggésekből következik, hogy $F(\emptyset) = 0$ vagy $F(\emptyset) = +\infty$ vagy $F(\emptyset) = -\infty$. Ha $F(\emptyset) = +\infty$, akkor $F(A) = F(A \cup \emptyset) = F(A) + F(\emptyset) = +\infty$, minden $A \in \mathcal{H}$ -ra, ami ellentmond a halmazfüggvény definíciójának. Az $F(\emptyset) = -\infty$ esetben hasonló módon kapunk ellentmondást.

2. Az összefüggés teljes indukcióval rögtön következik az additivitási tulajdonságból.

3. Legyen $A_1 \subset A_2$. Ekkor $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ és $A_1 \cap (A_2 \setminus A_1) = \emptyset$, így az additivitás miatt $F(A_2) = F(A_1) + F(A_2 \setminus A_1)$, amiből következik az állítás.

4. Legyen $A_1 \subset A_2$. Ekkor az előzőhöz hasonló módon $F(A_2) = F(A_1) + F(A_2 \setminus A_1) \geq F(A_1)$.

5. Legyen $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})$. Ekkor $B_1, B_2, \ldots, B_n$ páronként diszjunkt, $B_i \subset A_i$ és $A_1 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Ezért a 2. és 4. tulajdonság szerint

$$F(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = F(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = F(B_1) + \cdots + F(B_n) \leq F(A_1) + \cdots + F(A_n).$$

□

3.21. Példa. Legyen F egy additív halmazfüggvény egy $\mathcal{H}$ gyűrűn. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$-ra

$$F(A \cup B) + F(A \cap B) = F(A) + F(B)!$$

Mivel $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ páronként diszjunkt halmazok uniója, ezért F additivitása miatt

$$F(A \cup B) = F(A \setminus B) + F(A \cap B) + F(B \setminus A).$$

Hasonlóan,

$$F(A) = F(A \setminus B) + F(A \cap B) \quad \text{és} \quad F(B) = F(B \setminus A) + F(A \cap B),$$

amikből következik az állítás. □

3.22. Definíció. A $\mathcal{H}$ gyűrűn értelmezett F halmazfüggvényt *σ-additívnak* vagy *megszámlálhatóan additívnak* nevezzük, ha minden olyan páronként diszjunkt $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{H}$ esetén, amelyre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$,

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n)$$

teljesül. Ha $\mathcal{H}$ σ-algebra, és F egy σ-additív halmazfüggvény $\mathcal{H}$-n, akkor F-et *előjeles mértéknek* nevezzük. Ha pedig F nemnegatív is ezen felül, akkor F-et egyszerűen *mértéknek* nevezzük.

3.23. Megjegyzés. A fenti összefüggés bal oldala a halmazok átrendezésétől független, ezért ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F(A_n)$ sor konvergens, akkor abszolút konvergens is. Egyébként divergens, és divergál $+\infty$-hez vagy $-\infty$-hez.

3.24. Tétel. *Tegyük fel, hogy F σ-additív egy $\mathcal{H}$ σ-gyűrűn. Legyen továbbá $A_n \in \mathcal{H}$ $(n \geq 1)$ úgy, hogy $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots$, és jelölje $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$. Ekkor*

$$F(A_n) \to F(A), \qquad n \to +\infty \quad \textit{esetén.}$$

Bizonyítás: Legyen $B_1 = A_1$, és $n = 2, 3, \ldots$-re legyen

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}.$$

Ekkor a $B_1, B_2, \ldots$ halmazok páronként diszjunktak, azaz $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\quad i \neq j$, továbbá

$$A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \qquad \text{és} \qquad A = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n,$$

valamint

$$F(A_n) = F(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = \sum_{j=1}^{n} F(B_j).$$

Mivel F σ-additív, ezért

$$F(A) = \sum_{j=1}^{\infty} F(B_j) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} F(B_j) = \lim_{n \to +\infty} F(A_n).$$

□

3.25. Példa. Legyen $\mathcal{H}$ az X halmaz összes részhalmazainak halmaza, $x_0 \in X$ rögzített. Minden $A \subset X$-re legyen

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy μ egy σ-additív halmazfüggvény $\mathcal{H}$-n!

Legyen $A_1, A_2, \ldots$ páronként diszjunkt részhalmaza X-nek. Két esetet különböztetünk meg: 1. Ha x_0 eleme valamilyen n-re A_n-nek, akkor $\mu(A_n) = 1$ és $\mu(A_k) = 0$ minden $k \neq n$-re. 2. Ha x_0 nem eleme egyik A_n halmaznak sem, akkor pedig $\mu(A_n) = 0$ minden n-re. Mindkét esetben teljesül tehát

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

□

3.26. Példa. Legyen $\mathcal{H}$ a 3.13. Példában definiált halmazrendszer, és

$$\mu\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \qquad \mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{ha } A \text{ véges,} \\ 1, & \text{ha } A \text{ végtelen, de } \overline{A} \text{ véges.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy μ additív, de nem σ-additív!

Három esetet különböztetünk meg: 1. Ha A és B véges halmazok, akkor $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 0$ és $\mu(A \cup B) = 0$, hiszen $A \cup B$ is véges. 2. Ha az egyik halmaz véges, másik végtelen, pl. A véges és B végtelen, de $\overline{B}$ véges, akkor, ahogy azt a 3.13. Példában láttuk, $A \cup B$ nem véges, de a komplementere az. Ezért $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 1$ és $\mu(A \cup B) = 1$. Végül, 3. legyen A és B mindkettő végtelen, és a komplementerük véges. Ekkor $A \cap B = \emptyset$ nem teljesülhet, hiszen ekkor $B \subset \overline{A}$, azaz B nem lehet végtelen.

Azaz minden olyan esetben, amikor $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ is teljesül.

Legyen $A_n = \{n\}$, $n = 1, 2 \ldots$. Ekkor $A_1, A_2, \ldots$ páronként diszjunkt, $\mu(A_n) = 0$, de

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \neq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1,$$

hiszen $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$ végtelen halmaz, de komplementere az üres halmaz, azaz véges. □

3.27. Definíció. A valós számegyenes egy $I \subset \mathbb{R}$ részhalmazát (véges) *intervallumnak* nevezzük, ha $I = \emptyset$ vagy a következő halmazok valamelyikével egyenlő:

$$(\alpha, \beta), \qquad [\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta], \qquad [\alpha, \beta], \qquad \text{ahol } \alpha \leq \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Ha $\alpha = \beta$, akkor $[\alpha, \beta]$ az egy pontból álló halmazt, (α, α), $[\alpha, \alpha)$ és $(\alpha, \alpha]$ pedig az üreshalmazt jelöli. Az $\mathbb{R}^p$ vektortér egy I részhalmazát *p-dimenziós intervallumnak* nevezzük, ha

$$I = I_1 \times \cdots \times I_p = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \colon\ x_i \in I_i, \quad i = 1, \ldots, p\},$$

ahol I_i $(i = 1, \ldots, p)$ $\mathbb{R}$-beli intervallumok.

3.28. Definíció. Az $\mathbb{R}^p$ vektortér azon részhalmazainak halmazát, amelyek p-dimenziós intervallumok véges sok egyesítéseként állnak elő, *elemi halmazoknak* nevezzük. Jelölje $\mathcal{E}^p$ az $\mathbb{R}^p$ vektortér összes elemi halmazainak halmazát.

A definíció alapján könnyen ellenőrizhetők az elemi halmazok alábbi tulajdonságai:

3.29. Állítás.

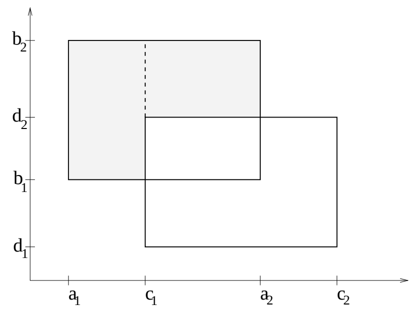
1. *$\mathcal{E}^p$ gyűrű (de nem σ-gyűrű).*

2. *Ha $A \in \mathcal{E}^p$, akkor A előáll véges sok diszjunkt intervallum egyesítéseként.*

Bizonyítás: 1. Az $\mathcal{E}^p$ halmazrendszer unióra való zártsága közvetlenül következik a definícióból. A különbségre vonatkozó zártságot csak 2 dimenzióban vizsgáljuk. Legyen

$$I = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \qquad \text{és} \qquad J = [c_1, c_2] \times [d_1, d_2],$$

és tegyük fel például, hogy $a_1 < c_1 < a_2 < c_2$ és $d_1 < b_1 < d_2 < b_2$, azaz a téglalapok elhelyezkedése:



Ekkor például $I \setminus J = \Big([a_1, c_1) \times [b_1, b_2]\Big) \cup \Big([c_1, a_2] \times (d_2, b_2]\Big)$, ezért $I \setminus J \in \mathcal{E}^p$. Végig lehet gondolni, hogy bárhogy is helyezkedik el egymáshoz viszonyítva a két téglalap, és bárhogy is választjuk zártnak illetve nyíltnak a Descartes-szorzatban szereplő egydimenziós intervallumok végpontjait, a különbség mindig felbontható diszjunkt kétdimenziós intervallumok uniójára.

2. Legyen például $A = I \cup J$, ahol I és J intervallumok. Ekkor $A = (I \setminus J) \cup (I \cap J) \cup (J \setminus I)$, és a halmazok páronként diszjunktak. Nyilván $I \cap J$ intervallum. Az 1. pont bizonyítása szerint pedig $I \setminus J$ és $J \setminus I$ is felbontható diszjunkt intervallumok uniójára. Ehhez hasonló módon igazolható az állítás kettőnél több halmaz uniójára is. □

3.30. Definíció. Az *elemi halmazok térfogatán* a következő m halmazfüggvényt értjük: Egy I p-dimenziós intervallumra legyen $m(I) = 0$, ha $I = \emptyset$, ha pedig $I = I_1 \times \cdots \times I_p$, ahol I_i egy (3.1) alakú intervallum, amelynek végpontjai α_i és β_i, akkor legyen

$$m(I) = (\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2) \cdots (\beta_p - \alpha_p).$$

Ha az $A \in \mathcal{E}^p$ elemi halmaz

$$A = I^{(1)} \cup \cdots \cup I^{(n)}$$

alakban írható fel p-dimenziós intervallumok diszjunkt uniójaként, akkor legyen

$$m(A) = m(I^{(1)}) + \cdots + m(I^{(n)}).$$

A definícióból látszik, hogy egydimenziós, síkbeli ill. térbeli intervallumokra $m(I)$ az intervallum hosszát, területét ill. térfogatát adja vissza.

3.31. Állítás.

1. *Ha $A \in \mathcal{E}^p$, akkor az $m(A)$ definíciója nem függ az A felbontásától.*
2. *m additív halmazfüggvény $\mathcal{E}^p$-n.*

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy az A halmazt kétféleképpen állítottuk elő páronként diszjunkt p-dimenziós intervallumok uniójaként:

$$A = I^{(1)} \cup \cdots \cup I^{(n)} = \tilde{I}^{(1)} \cup \cdots \cup \tilde{I}^{(k)}.$$

Ekkor az $E_{i,j} = I^{(i)} \cap \tilde{I}^{(j)}$ halmazok ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$) is intervallumok, sőt páronként diszjunktak, továbbá

$$I^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{k} E_{i,j} \qquad \text{és} \qquad \tilde{I}^{(j)} = \bigcup_{i=1}^{n} E_{i,j},$$

így m additivitását alkalmazva

$$\begin{aligned} m(A) &= \sum_{i=1}^{n} m(I^{(i)}) = \sum_{i=1}^{n} m\left(\bigcup_{j=1}^{k} E_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m(E_{i,j}) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} m(E_{i,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{k} m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{k} m(\tilde{I}^{(j)}). \end{aligned}$$

2. Legyen A és B diszjunkt elemi halmazok. Írjuk fel a halmazokat diszjunkt intervallumok uniójaként:

$$A = I^{(1)} \cup \cdots \cup I^{(n)}, \qquad B = J^{(1)} \cup \cdots \cup J^{(m)}.$$

Ekkor az $I^{(1)}, \ldots, I^{(n)}, J^{(1)}, \ldots, J^{(m)}$ halmazok is páronként diszjunktak, és így

$$A \cup B = I^{(1)} \cup \cdots \cup I^{(n)} \cup J^{(1)} \cup \cdots \cup J^{(m)}$$

diszjunkt felbontása $A \cup B$-nek. Ezért

$$m(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} m(I^{(i)}) + \sum_{i=1}^{m} m(J^{(i)}) = m(A) + m(B).$$

□

3.32. Példa.
A kockadobás lehetséges kimenetelei: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Homogén kocka esetén annak valószínűsége, hogy a lehetséges kimenetek valamelyike teljesül: $p = \frac{1}{6}$. Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és $\mathcal{H}$ jelölje Ω összes lehetséges részhalmazainak halmazát. Ekkor $\mathcal{H}$ elemeit eseményeknek nevezzük. Definiáljuk az események valószínűségét a következő halmazfüggvénnyel:

$$P\colon \mathcal{H} \to [0,1], \qquad P(A) = \frac{\text{az } A \text{ halmaz elemeinek száma}}{6}, \qquad (P(\emptyset) = 0).$$

Ekkor könnyen látható, hogy $\mathcal{H}$ gyűrű, és P egy nemnegatív, additív halmazfüggvény.

Általánosabban, legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots\}$ az *állapottér*, ahol az $\{\omega_i\}$ halmazokat *elemi eseményeknek* nevezzük, és egy $\{\omega_i\}$ elemi esemény valószínűsége legyen p_i $(i = 1, 2, \ldots)$, ahol

$$p_i \geq 0, \ (i = 1, 2 \ldots), \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Legyen most is $\mathcal{H}$ az események halmazrendszere, azaz Ω összes lehetséges részhalmazainak halmaza. Ekkor $\mathcal{H}$ σ-gyűrű, a

$$P(A) = \sum_{i\colon \omega_i \in A} p_i, \qquad A \in \mathcal{H}$$

függvény egy nemnegatív, σ-additív halmazfüggvény $\mathcal{H}$-n, $P(\Omega) = 1$ és $P(\emptyset) = 0$. A P függvényt *valószínűségi mértéknek* nevezzük, az $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ hármast pedig *klasszikus valószínűségi mezőnek* hívjuk. □

3.33. Definíció. Azt mondjuk, hogy $E \subset \mathbb{R}^p$ *Borel-halmaz*, ha E előállítható nyílt halmazokból kiindulva, megszámlálhatóan sok művelettel, amelyek az egyesítés, a metszet, a különbség képzés és komplementum képzés műveletek sorozatából áll.

3.34. Példa. Bármely $[a,b]$ zárt intervallum egydimenziós Borel-halmaz, hiszen

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right).$$

Hasonló módon, az egy pontból álló $\{a\}$ halmaz is Borel-halmaz, mivel

$$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right).$$

A végtelen ill. félig végtelen intervallumok is Borel-halmazok, mivel pl.

$$[a,\infty) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)\right) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}, a + n\right)\right).$$

□

3.35. Állítás. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$. A következő állítások teljesülnek.*

1. *A Borel-halmazok osztálya a legszűkebb olyan σ-algebra, amely tartalmazza az $\mathcal{E}^p$ elemi halmazokat (azaz a Borel-halmazok osztályának valódi részhalmazai már nem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal).*
2. *Ha A megszámlálható vagy véges számosságú, akkor A Borel-halmaz.*
3. *Ha A nyílt halmaz, akkor A Borel-halmaz.*
4. *Ha A zárt halmaz, akkor A Borel-halmaz.*

Bizonyítás:
1. Az állítás a Borel-halmazok definíciójából és az előbbi példában látott ötletek segítségével könnyen adódik. A részleteket nem mutatjuk meg.

2. Az állítás következik abból, hogy az egy pontból álló halmaz Borel-halmaz, és A előáll $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{a_i\}$ alakban.

3. Ha A nyílt halmaz, akkor előáll megszámlálható sok nyílt intervallum uniójaként, mivel minden $a \in A$-hoz található olyan I nyílt intervallum, amelyre $a \in I \subset A$, és I végpontjai racionális számok. Az ilyen intervallumokból a 3.7. Állítás 5. pontjából következően megszámlálható sok van, ezek uniója visszaadja A-t, így következik az állítás.

4. Az állítás abból következik, hogy ha A zárt, akkor $\mathbb{R}^p \setminus A$ nyílt halmaz, ezért Borel-halmaz, így A is az. □

3.3. Reguláris, additív, nemnegatív halmazfüggvények kiterjesztése

3.36. Definíció. Az $\mathcal{E}^p$-n értelmezett valamely $F \geq 0$ halmazfüggvényt *regulárisnak* nevezzük, ha $\forall A \in \mathcal{E}^p$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén van olyan $H \in \mathcal{E}^p$ zárt és $G \in \mathcal{E}^p$ nyílt halmaz, hogy

$$H \subset A \subset G \qquad \text{és} \qquad F(G) - \varepsilon < F(A) < F(H) + \varepsilon.$$

3.37. Definíció. Az $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_p, \beta_p)$ p-dimenziós intervallumot *nyílt intervallumnak*, az $I = [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_p, \beta_p]$ p-dimenziós intervallumot pedig *zárt intervallumnak* nevezzük.

3.38. Állítás. *Az m elemi halmazok térfogata halmazfüggvény (lásd a 3.30. definíciót) reguláris.*

Bizonyítás: Legyen $A \in \mathcal{E}^p$ és $\varepsilon > 0$ rögzített. Ekkor $A = I^{(1)} \cup \cdots \cup I^{(n)}$, ahol $I^{(i)} \cap I^{(j)} = \emptyset$ $(i \neq j)$, és az $I^{(i)}$ p-dimenziós intervallum előallítása $I^{(i)} = I_1^{(i)} \times \cdots \times I_p^{(i)}$, ahol az $I_j^{(i)}$ a (3.1) egyenletben felsorolt valamelyik típusú egydimenziós intervallum, ahol az intervallum végpontjait jelölje $\alpha_j^{(i)}$ és $\beta_j^{(i)}$. Ekkor

$$m(I^{(i)}) = \prod_{k=1}^{p} \left(\beta_k^{(i)} - \alpha_k^{(i)}\right).$$

Nyilván minden $i = 1, \ldots, n$-re (kicsit csökkentve az $I^{(i)}$ intervallum méreteit) található olyan $\tilde{I}^{(i)}$ p-dimenziós zárt intervallum, hogy

$$\tilde{I}^{(i)} \subset I^{(i)}, \qquad \tilde{I}^{(i)} \cap \tilde{I}^{(j)} = \emptyset,\ (i \neq j), \qquad \text{és} \qquad m(\tilde{I}^{(i)}) > m(I^{(i)}) - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Legyen $H = \tilde{I}^{(1)} \cup \cdots \cup \tilde{I}^{(n)}$. Ekkor nyilván $H \subset A$, H zárt halmaz, és

$$m(H) = \sum_{i=1}^{n} m(\tilde{I}^{(i)}) > \sum_{i=1}^{n} \left(m(I^{(i)}) - \frac{\varepsilon}{n}\right) = m(A) - \varepsilon.$$

Hasonló módon, minden $i = 1, \ldots, n$-re található olyan $\hat{I}^{(i)}$ p-dimenziós nyílt intervallum, hogy

$$I^{(i)} \subset \hat{I}^{(i)}, \qquad \text{és} \qquad m(\hat{I}^{(i)}) < m(I^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Megjegyezzük, hogy az $\hat{I}^{(i)}$ halmazok már nem biztos, hogy páronként diszjunktak lesznek. Legyen $G = \hat{I}^{(1)} \cup \cdots \cup \hat{I}^{(n)}$. Ekkor $A \subset G$, G nyílt halmaz, és a 3.20. Állítás 5. pontja szerint

$$m(G) = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \hat{I}^{(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m\left(\hat{I}^{(i)}\right) < \sum_{i=1}^{n} \left(m\left(I^{(i)}\right) + \frac{\varepsilon}{n}\right) = m(A) + \varepsilon.$$

□

Egy reguláris halmazfüggvény tehát bizonyos értelemben az m halmazfüggvény általánosításának tekinthető. A következő példában megadunk egy az m függvénytől eltérő reguláris halmazfüggvényt.

3.39. Példa. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy rögzített monoton növekvő függvény. Definiáljuk a μ_g függvényt az egydimenziós intervallumokra a következő módon:

$$\begin{aligned}
\mu_g(\emptyset) &= 0, \\
\mu_g\left([\alpha, \beta)\right) &= g\left(\beta-\right) - g\left(\alpha-\right), \\
\mu_g\left([\alpha, \beta]\right) &= g\left(\beta+\right) - g\left(\alpha-\right), \\
\mu_g\left((\alpha, \beta]\right) &= g\left(\beta+\right) - g\left(\alpha+\right), \\
\mu_g\left((\alpha, \beta)\right) &= g\left(\beta-\right) - g\left(\alpha+\right).
\end{aligned}$$

Ezután μ_g-t a 3.30. Definícióhoz hasonló módon egyértelműen kiterjeszthetjük $\mathcal{E}^1$-re, azaz az egydimenziós elemi halmazokra. Világos, hogy μ_g egy nemnegatív és additív halmazfüggvény $\mathcal{E}^1$-n. Ha g folytonos, akkor $\mu_g\left([\alpha, \beta)\right) = \mu_g\left([\alpha, \beta]\right) = \mu_g\left((\alpha, \beta]\right) = \mu_g\left((\alpha, \beta)\right) = g(\beta) - g(\alpha)$, és ekkor μ_g reguláris is. Másrészt, ha g olyan monoton növő függvény, amely nem folytonos egy α pontban, akkor $\mu_g(\{\alpha\}) > 0$. □

Megmutatjuk, hogy minden reguláris halmazfüggvény kiterjeszthető egy az elemi halmazokat tartalmazó σ-gyűrűre úgy, hogy a kiterjesztés σ-additív legyen. Szükségünk lesz a következő fogalmakra.

3.40. Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}^p$ adott halmaz. Az $\mathcal{U} = \{U_\gamma \subset \mathbb{R}^p \colon \gamma \in \Gamma\}$ halmazrendszer az *E lefedése*, ha

$$E \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma.$$

Ha minden U_γ nyílt intervallum, akkor $\mathcal{U}$-t *nyílt lefedésnek* hívjuk. Ha a Γ indexhalmaz megszámlálható, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}$ megszámlálható lefedése E-nek, ha pedig Γ véges halmaz, akkor $\mathcal{U}$-t *véges lefedésnek* nevezzük.

3.41. Definíció. Egy A halmazt *kompaktnak* hívunk, ha bármely nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedése is.

Az analízisben alapvető fontosságú a következő állítás.

3.42. Tétel. *Egy $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

3.43. Definíció. Legyen μ egy additív, reguláris, nemnegatív és véges halmazfüggvény $\mathcal{E}^p$-n. Ekkor a μ által generált *külső mértéken* a

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \colon A_n \text{ } p\text{-dimenziós nyílt intervallum, } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}, \qquad E \subset \mathbb{R}^p$$

halmazfüggvényt értjük, ahol az infimumot az E összes lehetséges megszámlálható, nyílt intervallumokkal történő $\{A_n\}_{n \geq 1}$ lefedéseire kell venni.

A külső mérték tehát az $\mathbb{R}^p$ tér bármely részhalmazán definiált, értéke lehet $+\infty$ is.

3.44. Állítás. *μ^* egy nemnegatív monoton halmazfüggvény, azaz minden $E_1 \subset E_2$-re*

$$0 \leq \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2).$$

Bizonyítás: Az állítás abból következik, hogy E_2 bármely megszámlálható lefedése egyben az E_1 halmaznak is megszámlálható lefedése, így $\mu^*(E_1)$ kiszámításakor bővebb halmaznak kell az infimumát venni, mint $\mu^*(E_2)$-nél. □

3.45. Példa. Tekintsük az m által generált m^* egydimenziós külső mértéket. Megmutatjuk, hogy a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazának külső mértéke nulla, azaz $m^*(\mathbb{Q}) = 0$. A 3.8. Példa szerint $\mathbb{Q}$ elemei egy $r_1, r_2, \ldots$ sorozatba rendezhetők. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és definiáljuk az

$$A_i = \left(r_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},\ r_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right)$$

nyílt intervallumokat $i = 1, 2, \ldots$-re. Ekkor nyilván $\{A_n \colon n = 1, 2 \ldots\}$ nyílt lefedése $\mathbb{Q}$-nak, és

$$m^*(\mathbb{Q}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $m^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Ehhez hasonló módon be lehet látni, hogy bármely megszámlálható $E \subset \mathbb{R}^p$ halmaz m^* külső mértéke mindig nulla. □

3.46. Definíció. Legyen F egy halmazfüggvény, amely $\mathbb{R}^p$ összes részhalmazán értelmezve van. Ekkor F-et *szubadditív* halmazfüggvénynek nevezzük, ha

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n).$$

3.47. Tétel. *Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény $\mathcal{E}^p$-n, μ^* az általa generált külső mérték $\mathbb{R}^p$-n. Ekkor*

1. *μ^* a μ kiterjesztése, azaz minden $A \in \mathcal{E}^p$ -re $\mu^*(A) = \mu(A)$;*

2. *μ^* egy szubadditív halmazfüggvény.*

Bizonyítás:

1. Legyen $A \in \mathcal{E}^p$ tetszőleges rögzített halmaz. Mivel μ reguláris, ezért bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan elemi nyílt G halmaz, amelyre $A \subset G$ és $\mu(G) \le \mu(A) + \varepsilon$. Másrészt a μ^* definíciója szerint $\mu^*(A) \le \mu(G)$. Összevetve a két egyenlőtlenséget

$$\mu^*(A) \le \mu(A) + \varepsilon \tag{3.2}$$

adódik. Másrészt ugyancsak a μ^* definíciója alapján van olyan nyílt intervallumokból álló $(A_n)_{n\ge1}$ sorozat, hogy $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu^*(A) + \varepsilon. \tag{3.3}$$

A μ mérték reguláris, ezért A tartalmaz olyan F zárt elemi halmazt, amelyre $\mu(F) \ge \mu(A) - \varepsilon$. Mivel F korlátos és zárt, ezért a 3.47. Tétel alapján az $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ lefedéséből kiválasztható egy véges lefedés is, azaz léteznek olyan $k_1, \dots, k_N$ indexek, hogy

$$F \subset A_{k_1} \cup \cdots \cup A_{k_N}.$$

Tehát a 3.20. Állítás 5. pontja és (3.3) alapján

$$\mu(A) \le \mu(F) + \varepsilon \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_{k_n}\right) + \varepsilon \le \sum_{n=1}^{N} \mu(A_{k_n}) + \varepsilon \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon \le \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

Megmutattuk tehát, hogy

$$\mu^*(A) - \varepsilon \le \mu(A) \le \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

minden rögzített pozitív ε-ra. Ha most $\varepsilon \to 0+$, akkor

$$\mu^*(A) \le \mu(A) \le \mu^*(A)$$

adódik, és ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mu(A) = \mu^*(A)$ minden $A \in \mathcal{E}^p$-re.

2. Legyen $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ és tegyük fel, hogy $\mu^*(E_n) < \infty$ minden $n \geq 1$-re. Ellenkező esetben nincs mit bizonyítanunk, ugyanis a szubadditivitás triviálisan teljesül.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor μ^* definíciója alapján van az E_n halmaznak olyan elemi nyílt intervallumokból álló $\{A_{n,k}\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ lefedése, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \leq \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Ekkor

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \right).$$

Másrészt $\mu^*(E)$ a definíció szerint a lehetséges lefedések által generált összegek infimuma, ezért

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) \right).$$

Ez az egyenlőtlenség összevetve a (3.4) becsléssel azt jelenti, hogy

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

minden $\varepsilon > 0$ -ra. Ha most $\varepsilon \to 0+$, akkor a kívánt

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

egyenlőtlenséget kapjuk és ezzel a tétel bizonyítása teljes.

$\square$

3.48. Definíció. Tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}^p$ halmazok *szimmetrikus differenciáját* $A \triangle B$-vel jelöljük és az

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

képlettel definiáljuk.

Könnyen ellenőrizhetők a szimmetrikus különbség halmazművelet alábbi tulajdonságai:

3.49. Állítás. *Legyen $A, B, C, A_1, A_2, B_1, B_2 \subset X$ tetszőleges. Ekkor*

1. $A \triangle B = \emptyset$, *akkor és csak akkor, ha* $A = B$,
2. $A \triangle B = B \triangle A$,
3. $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$,
4. $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$,
5. $(A_1 \cap A_2) \triangle (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$,
6. $(A_1 \setminus A_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$.

3.50. Definíció. Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény $\mathcal{E}^p$-n, μ^* az általa generált külső mérték $\mathbb{R}^p$-n. Az A és B halmazok μ által generált „távolságát” $d(A,B)$-vel jelöljük és definíciója:

$$d(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} \mu^*(A \triangle B).$$

Azt mondjuk, hogy az (A_n) *halmazsorozat konvergál* A-hoz ($A_n \to A$), ha

$$d(A_n, A) = \mu^*(A_n \triangle A) \to 0, \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

3.51. Állítás. *Legyen $A, B, C, A_1, A_2, A_n, B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^p$. Ekkor*

1. *$d(A,B) = 0$, akkor és csak akkor, ha $\mu^*(A \setminus B) = 0$ és $\mu^*(B \setminus A) = 0$;*
2. *$d(A,B) = d(B,A)$;*
3. *$d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B)$;*
4. *$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le \mu^*(A \triangle B)$.*
5. *Legyen $A_n \to A$. Ekkor $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$.*
6. *$d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.*
7. *$d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.*
8. *$d(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \le d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$.*

Bizonyítás:
1. A μ^* szubadditivitásából és az $A \triangle B$ definíciójából következik.
2. A 3.49. Állítás 2. pontjából rögtön következik.
3. A 3.49. Állítás 3. pontja, valamint μ^* monotonitása és szubadditivitása alapján

$$\mu^*(A \triangle B) \le \mu^*\Big((A \triangle C) \cup (C \triangle B)\Big) \le \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B).$$

4. Az előbbihez hasonló módon $\mu^*(A) \le \mu^*(B \cup (A \triangle B)) \le \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$, és ugyanígy $\mu^*(B) \le \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B)$ is teljesül, amiből következik az állítás.
5. A 4. pont következménye.
6. A 3.49. Állítás 4. pontját, valamint μ^* monotonitását és szubadditivitását felhasználva teljesül. A 7. és 8. pontok bizonyítása hasonló. $\square$

Megjegyezzük, hogy d nem távolság az 5.66. Definíció értelemében (lásd az 5.7. szakaszt), hiszen, a 3.51. Állítás 1. pontja szerint $d(A,B)$ lehet 0 akkor is, ha A és B nem azonos. Az 5.66. Definíció többi pontja viszont teljesül. Ennek következtében a konvergencia fenti definíciója szerint egy konvergens halmazsorozat határértéke nem egyértelmű: Például, ha $A_n \to A$, és ha B és A egy olyan pontban különbözik egymástól, amelynek külső mértéke nulla, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy $A_n \to B$ is teljesül.

3.52. Definíció. Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény $\mathcal{E}^p$-n, μ^* az általa generált külső mérték $\mathbb{R}^p$-n. Ha az $A \subset \mathbb{R}^p$ halmazhoz van olyan elemi halmazokból álló (A_n) sorozat, amelyre $A_n \to A$, akkor azt mondjuk, hogy A *végesen μ-mérhető.* A végesen μ-mérhető halmazok osztályát $\mathcal{M}_F(\mu)$ jelöli.

3.53. Tétel. *Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény $\mathcal{E}^p$-n, μ^* az általa generált külső mérték $\mathbb{R}^p$-n, $\mathcal{M}_F(\mu)$ a végesen μ-mérhető halmazok osztálya. Ekkor $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrű $\mathbb{R}^p$-n és μ^* az $\mathcal{M}_F(\mu)$-n értelmezett additív nemnegatív halmazfüggvény.*

Bizonyítás: Legyen $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Ekkor léteznek olyan elemi halmazokból álló (A_n) és (B_n) halmazsorozatok, hogy $A_n \to A$ és $B_n \to B$. A 3.51. Állítás 6. pontja alapján

$$d(A \cup B, A_n \cup B_n) \leq d(A, A_n) + d(B, B_n) \to 0,$$

és mivel $A_n \cup B_n$ elemi halmaz, ezért $A \cup B \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

A 3.49. Állítás 6. pontja és μ^* monotonitása miatt

$$d(A \setminus B, A_n \setminus B_n) = \mu^*\Big((A \setminus B) \triangle (A_n \setminus B_n)\Big) \leq \mu^*\Big((A \triangle A_n) \cup (B \triangle B_n)\Big) \leq \mu^*(A \triangle A_n) + \mu^*(B \triangle B_n).$$

Ezért $A_n \setminus B_n \to A \setminus B$, és így $A \setminus B \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Beláttuk tehát, hogy $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrű.

Megmutatjuk, hogy μ^* additív $\mathcal{M}_F(\mu)$-n. Legyen $A, B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ diszjunt halmazok, és legyen $A_n \to A$ és $B_n \to B$, ahol A_n és B_n elemi halmazok. Ekkor

$$A_n \cup B_n = (A_n \setminus B_n) \cup (B_n \setminus A_n) \cup (A_n \cap B_n),$$

és az utóbbi három halmaz páronként diszjunkt. Mivel az elemi halmazokon $\mu^* = \mu$, és μ additív, ezért

$$\mu^*(A_n \cup B_n) = \mu^*(A_n \setminus B_n) + \mu^*(B_n \setminus A_n) + \mu^*(A_n \cap B_n) = \mu^*(A_n) + \mu^*(B_n) - \mu^*(A_n \cap B_n).$$

Mivel $A \cap B = \emptyset$, ezért $A_n \cap B_n = (A \cap B) \triangle (A_n \cap B_n)$, és így a 3.49. Állítás 5. pontját és μ^* monotonítását felhasználva

$$\mu^*(A_n \cap B_n) = \mu^*\Big((A \cap B) \triangle (A_n \cap B_n)\Big) \leq \mu^*\Big((A \triangle A_n) \cup (B \triangle B_n)\Big) \leq \mu^*(A \triangle A_n) + \mu^*(B \triangle B_n) \to 0.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cup B) &= \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n \cup B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\mu^*(A_n) + \mu^*(B_n) - \mu^*(A_n \cap B_n)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) + \lim_{n\to\infty} \mu^*(B_n) - \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n \cap B_n) \\
&= \mu^*(A) + \mu^*(B),
\end{aligned}$$

azaz μ^* additív $\mathcal{M}_F(\mu)$-n. □

3.54. Megjegyzés. Az $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrű általában nem σ-gyűrű. Ehhez tekintsük $\mathbb{R}$-en az m halmazfüggvényt és az $\mathcal{M}_F(m)$ gyűrűt. Tegyük fel, hogy $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_F(m)$. Ekkor létezik olyan E elemi halmaz, hogy $m^*(\mathbb{R} \triangle E) < \infty$. Viszont $\mathbb{R} \triangle E = \mathbb{R} \setminus E$, ezért

$$m^*(\mathbb{R}) = m^*(E \cup (\mathbb{R} \setminus E)) \leq m^*(E) + m^*(\mathbb{R} \setminus E) < \infty,$$

emi ellentmond annak, hogy $m^*(\mathbb{R}) \geq m^*([-n, n]) = 2n$ tetszőleges n-re. Ezért $\mathbb{R} \notin \mathcal{M}_F(m)$. Másrészt $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$ és $(-n, n) \in \mathcal{M}_F(m)$.

A következő eredmény szerint μ^* σ-additív az $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrűn (amely az előző példa szerint nem σ-gyűrű).

3.55. Tétel. *Az μ^* külső mérték σ-additív az $\mathcal{M}_F(\mu)$ gyűrűn.*

Bizonyítás: Legyen $A_i \in \mathcal{M}_F(\mu)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ páronként diszjunkt, legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, és tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Mivel μ^* szubadditív, ezért

$$\mu^*(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Megmutatjuk, hogy a fordított egyenlőtlenség is teljesül. μ^* monotonitása miatt, és mivel μ^* additív $\mathcal{M}_F(\mu)$-n, ezért minden n-re

$$\mu^*(A) \ge \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i),$$

tehát

$$\mu^*(A) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

azaz μ^* σ-additív $\mathcal{M}_F(\mu)$-n. □

A következő tétel szerint $\mathcal{M}_F(\mu)$ zárt a halmazok határtéréke műveletre.

3.56. Tétel. *Legyen (A_n) olyan sorozat, amelyre $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$ minden n-re, és $A_n \to A$. Ekkor $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$.*

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan N, hogy

$$d(A, A_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $A_N \in \mathcal{M}_F(\mu)$, ezért létezik olyan $E_N \in \mathcal{E}^p$ elemi halmaz, hogy

$$d(A_N, E_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De ekkor a 3.51. Állítás 3. pontját felhasználva

$$d(A, E_N) \le d(A, A_N) + d(A_N, E_N) < \varepsilon,$$

amiből következik, hogy $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. □

3.57. Definíció. Ha $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, ahol B_n végesen μ-mérhető minden n-re, akkor A-t *μ-mérhetőnek* nevezzük. A μ-mérhető halmazok osztályát $\mathcal{M}(\mu)$ jelöli.

A következő tétel szerint a μ-mérhető halmazok között pontosan az $\mathcal{M}_F(\mu)$ halmazhoz tartozóknak véges az μ^* külső mértéke.

3.58. Tétel. $\mathcal{M}_F(\mu) = \{A \in \mathcal{M}(\mu) \colon \mu^*(A) < \infty\}$

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $E \in \mathcal{E}^p$, hogy $\mu^*(A \triangle E) < \varepsilon$. De ekkor $A \subset E \cup (A \triangle E)$, ezért μ^* szubadditivitása miatt

$$\mu^*(A) \le \mu^*(E) + \mu^*(A \triangle E) < \infty.$$

Most fordítva, tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{M}(\mu)$ és $\mu^*(A) < \infty$. Legyen $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, ahol $A_n \in \mathcal{M}_F(\mu)$. Legyen $B_1 = A_1$, és $B_n = A_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$, $n = 2, 3, \ldots$. Ekkor

$$A = \bigcup_{n=1}^\infty B_n,$$

és a $B_1, B_2, \ldots$ halmazok páronként diszjunkt végesen μ-mérhető halmazok. Mivel $\bigcup_{n=1}^m B_n \subset A$, $\mathcal{M}_F$ zárt a véges unióra, és μ^* additív a $\mathcal{M}_F$ gyűrűn, ezért

$$\sum_{n=1}^m \mu^*(B_n) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^m B_n\right) \le \mu^*(A).$$

A fenti becslés minden m-re teljesül, így

$$\sum_{n=1}^\infty \mu^*(B_n) < \infty.$$

Legyen $C_N = \bigcup_{n=1}^N B_n$. Ekkor $C_N \in \mathcal{M}_F(\mu)$, és

$$d(A, C_N) = \mu^*(A \triangle C_N) = \mu^*\left(\bigcup_{n=N+1}^\infty B_n\right) \le \sum_{n=N+1}^\infty \mu^*(B_n) \to 0, \qquad \text{ha } N \to \infty.$$

Ezért a 3.56. Tételből következik, hogy $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$. $\square$

Most már kimondhatjuk ennek a szakasznak a fő tételét:

3.59. Tétel. *Legyen μ egy additív, nemnegatív, reguláris véges halmazfüggvény $\mathcal{E}^p$-n, μ^* az általa generált külső mérték $\mathbb{R}^p$-n, $\mathcal{M}(\mu)$ a μ-mérhető halmazok osztálya. Ekkor $\mathcal{M}(\mu)$ σ-algebra $\mathbb{R}^p$-n és μ^* az $\mathcal{M}(\mu)$-n értelmezett mérték.*

Bizonyítás: 1. Először azt indokoljuk, hogy $\mathcal{M}(\mu)$ zárt a különbség képzésre. Legyen $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$. Ekkor léteznek olyan $A_i, B_i \in \mathcal{M}_F(\mu)$ halmazok, hogy $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ és $B = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$. De ekkor

$$A \setminus B = \left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \setminus B = \bigcup_{i=1}^\infty (A_i \setminus B).$$

Megmutatjuk, hogy $A_i \setminus B \in \mathcal{M}_F(\mu)$ minden i-re, amiből következik, hogy $A \setminus B \in \mathcal{M}(\mu)$. Legyen

$$C_{i1} = A_i \cap B_1, \quad C_{ij} = A_i \cap \left(B_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} B_k\right), \quad j = 2, 3, \ldots.$$

Ekkor $C_{ij} \subset A_i$ minden j-re, a $C_{i1}, C_{i2}, C_{i3}, \ldots$ halmazok páronként diszjunktak, és

$$A_i \setminus B = A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^\infty C_{ij}\right).$$

Legyen $N \ge 1$ tetszőleges. Mivel

$$(A_i \setminus B) \triangle \left(A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N C_{ij}\right)\right) = \bigcup_{j=N+1}^\infty C_{ij},$$

ezért

$$d\left(A_i \setminus B,\, A_i \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{N} C_{ij}\Big)\right) = \mu^*\Big(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij}\Big).$$

Másrészt

$$\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij} \subset A_i,$$

és így

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij}\Big) \le \mu^*(A_i) < \infty,$$

ezért a 3.58. Tétel szerint $\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij} \in \mathcal{M}_F(\mu)$, tehát a 3.55. Tételt alkalmazva

$$\mu^*\Big(\bigcup_{j=N+1}^{\infty} C_{ij}\Big) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \mu^*(C_{ij}) < \infty.$$

Ebből viszont következik, hogy

$$d\left(A_i \setminus B,\, A_i \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{N} C_{ij}\Big)\right) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \mu^*(C_{ij}) \to 0, \qquad \text{ha } N \to \infty,$$

így a 3.56. Tétel szerint $A_i \setminus B \in \mathcal{M}_F(\mu)$, hiszen $A_i \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{N} C_{ij}\Big) \in \mathcal{M}_F(\mu)$.

2. Legyen $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, és legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ekkor minden i-re léteznek olyan $A_{ij} \in \mathcal{M}_F(\mu)$ halmazok, hogy $A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$. De ekkor $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$, és mivel az unió megszámlálható, ezért $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{M}(\mu)$ σ-gyűrű.

3. Másrészt $\mathbb{R}^p = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] \times \cdots \times [-n, n]$, ezért $\mathbb{R}^p \in \mathcal{M}(\mu)$, azaz $\mathcal{M}(\mu)$ σ-algebra.

4. Megmutatjuk, hogy μ^* σ-additív. Legyen $A_i \in \mathcal{M}(\mu)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ páronként diszjunkt, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ha $A \in \mathcal{M}_F(\mu)$, akkor a 3.58. Tétel szerint $\mu^*(A) < \infty$, de ekkor $\mu^*(A_i) \le \mu^*(A) < \infty$, és így $A_i \in \mathcal{M}_F(\mu)$ minden i-re. De ekkor

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \tag{3.5}$$

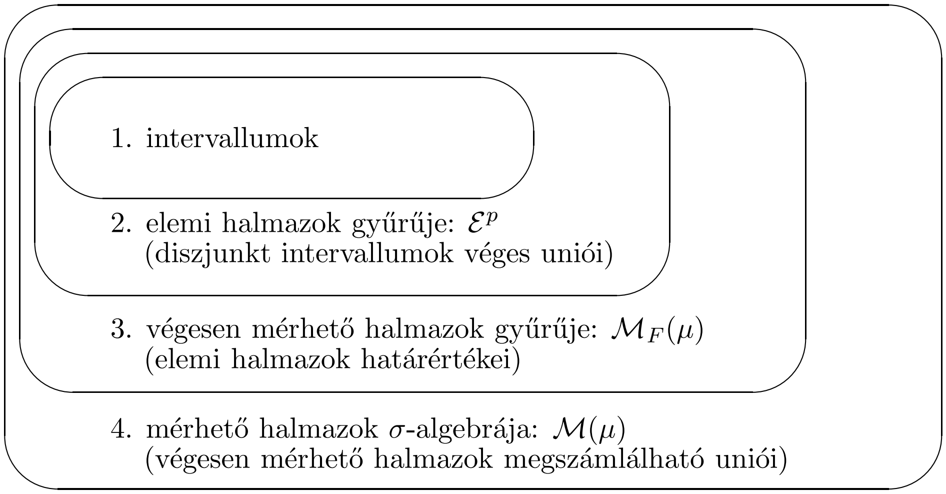
következik a 3.55. Tételből. Ha $A \notin \mathcal{M}_F(\mu)$, akkor a 3.58. Tétel szerint $\mu^*(A) = \infty$. Ezért μ^* szubadditívitása miatt

$$\infty = \mu^*(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i),$$

így (3.5) most is teljesül. □

3.60. Megjegyzés. Ebben a szakaszban kiindulva az elemi halmazokon értelmezett μ halmazfüggvényből, vettük az általa generált μ^* külső mértéket, amelyet a $\mathcal{M}(\mu)$ σ-algebrára megszorítva mértéket kaptunk. Ezt a mértéket is μ-vel jelöljük, ezzel is hangsúlyozva azt, hogy ez a μ halmazfüggvény kiterjesztése.

A mérhető halmazok körét a következő lépésekben bővítettük ki egyre bővebb halmazrendszerekre:



3.4. A Lebesgue-mérték

3.61. Definíció. Az m (p-dimenziós elemi halmazok térfogata) halmazfüggvény kitejesztését az $\mathcal{M}(m)$ σ-algebrára p-dimenziós *Lebesgue-mértéknek* nevezzük, és az $\mathcal{M}(m)$ σ-algebra elemeit *Lebesgue-mérhető* halmazoknak nevezzük.

3.62. Definíció. Az $E \subset \mathbb{R}^p$ halmazt *μ-nullmértékű*, ill. a $\mu = m$ esetben egyszerűen csak *nullmértékű* halmaznak nevezzük, ha $\mu^*(E) = 0$.

A μ^* definíciójából következik:

3.63. Állítás. *Egy $E \subset \mathbb{R}^p$ halmaz μ-nullmértékű akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz léteznek olyan $\{I_1, I_2, ...\}$ nyílt intervallumok, hogy*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \qquad \textit{és} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i) < \varepsilon.$$

A következő állítás segítséget nyújt annak elképzeléséhez, hogy milyen halmazok Lebesgue-mérhetők.

3.64. Állítás. *Legyen m a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}^p$-n, $\mathcal{M}(m)$ a p-dimenziós Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrája. Ekkor:*

1. *Minden véges és megszámlálható halmaz Lebesgue-mérhető és mértéke 0.*
2. *Ha A Borel-halmaz, akkor $A \in \mathcal{M}(m)$, azaz A Lebesgue-mérhető.*
3. *Minden nullmértékű halmaz Lebesgue-mérhető, azaz ha $m^*(A) = 0$, akkor $A \in \mathcal{M}(m)$.*
4. *Ha A Lebesgue-mérhető és B nullmértékű halmaz, akkor $A \cup B$ is Lebesgue-mérhető.*

5. *Ha $A \in \mathcal{M}(m)$ és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan zárt H és nyílt G halmaz, amelyre*

$$H \subset A \subset G \qquad \textit{és} \qquad m(G \setminus A) < \varepsilon, \quad m(A \setminus H) < \varepsilon.$$

6. *Ha $A \in \mathcal{M}(m)$, akkor léteznek olyan H és G Borel-halmazok, hogy*

$$H \subset A \subset G \qquad \textit{és} \qquad m(G \setminus A) = m(A \setminus H) = 0.$$

7. *Ha A Lebesgue-mérhető, akkor minden $b \in \mathbb{R}^p$-re az $A + b \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b \in \mathbb{R}^p \colon a \in A\}$ halmaz is Lebesgue-mérhető és $m(A) = m(A + b)$ (azaz a Lebesgue-mérték invariáns az eltolásra).*

Bizonyítás: 1. Legyen $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, és

$$E_n = \left(a_1 - \frac{1}{n}, a_1 + \frac{1}{n}\right) \times \cdots \times \left(a_p - \frac{1}{n}, a_p + \frac{1}{n}\right).$$

Ekkor E_n p-dimenziós nyílt intervallum, amelyre $m(E_n) = (2/n)^p$. Ezért

$$d(\{a\}, E_n) = m^*(\{a\} \triangle E_n) \le m(E_n) \to 0, \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

azaz $\{a\} \in \mathcal{M}_F(m) \subset \mathcal{M}(m)$ és $m(\{a\}) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0$.

Ha A megszámlálható, akkor elemeit rendezzük egy (a_n) sorozatba. Ekkor $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$, ezért $A \in \mathcal{M}(m)$. Másrészt

$$m(A) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(\{a_n\}) = 0.$$

2. Az állítás a 3.35. Állítás 1. pontjából következik.

3. Legyen A olyan, hogy $m^*(A) = 0$. Mivel $\emptyset \in \mathcal{E}^p$, ezért

$$d(A, \emptyset) = m^*(A \triangle \emptyset) = m^*(A) = 0,$$

és így $A \in \mathcal{M}_F(m)$.

4. A 3. pont szerint B Lebesgue-mérhető, ezért $A \cup B$ is az.

5. Tegyük fel először, hogy $A \in \mathcal{M}_F(m)$, azaz $m^*(A) < \infty$, és rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t. A külső mérték definíciója szerint léteznek olyan $I_1, I_2, \ldots$ nyílt p-dimenziós intervallumok, hogy

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Legyen $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Ekkor G nyílt halmaz,

$$A \subset G \qquad \text{és} \qquad m^*(G) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Ekkor, használva, hogy $m = m^*$ a Lebesgue-mérhető halmazokon, következik az állítás.

Legyen ezután $A \in \mathcal{M}(m)$, és $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, ahol $A_i \in \mathcal{M}_F(m)$ minden i-re. Ekkor az előző eredmény miatt minden i-re létezik olyan G_i nyílt halmaz, hogy

$$A_i \subset G_i \qquad \text{és} \qquad m(G_i \setminus A_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Legyen $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ekkor G nyílt halmaz,

$$A \subset G \qquad \text{és} \qquad m(G \setminus A) \le m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \setminus A_i)\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i \setminus A_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

A zárt halmazokra vonatkozó állítást visszavezethetjük a nyílt halmazokra igazolt eredményre: Legyen $A \in \mathcal{M}(m)$. Ekkor $\bar{A} \in \mathcal{M}(m)$, ezért az előbbi eredmény szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan G nyílt halmaz, hogy

$$\bar{A} \subset G \qquad \text{és} \qquad m(G \setminus \bar{A}) < \varepsilon.$$

Legyen $H = \bar{G}$. Ekkor H zárt halmaz,

$$H \subset A \qquad \text{és} \qquad m(A \setminus H) = m(G \setminus \bar{A}) < \varepsilon.$$

6. Az 5. pont szerint minden n-re léteznek olyan G_n nyílt és H_n zárt halmazok, hogy

$$H_n \subset A \subset G_n \qquad \text{és} \qquad m(A \setminus H_n) < \frac{1}{n}, \quad m(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}.$$

Legyen

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \qquad \text{és} \qquad G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Ekkor H és G Borel-halmazok, amelyekre teljesül az állítás.

7. Az állítás intervallumokra nyilván teljesül. Ezután lépésenként megmutatható, hogy elemi halmazokra, végesen mérhető és végül a mérhető halmazokra is teljesül az eltolásra vonatkozó invariancia. A részleteket itt elhagyjuk. □

3.65. Megjegyzés. Az előbbi állítás 2., 4. és 6. pontja szerint tehát a Lebesgue-mérhető halmazok és a Borel-halmazok nullmértékű halmazokban térnek el egymástól.

Az előbbi állítás szerint minden megszámlálható halmaz Lebesgue-mérhető (és mértéke 0). Most megmutatjuk, hogy létezik olyan nullmértékű végtelen halmaz, amely nem megszámlálható számosságú.

3.66. Példa. Az $E_0 = [0, 1]$ intervallumból kiindulva definiálunk egy (E_n) halmazsorozatot: Legyen $E_1 = E_0 \setminus (1/3, 2/3)$. Ekkor E_1 két, $1/3$ hosszú zárt intervallum uniója. Ezután hagyjuk el E_1-ből is a két intervallum középső harmadát: legyen $E_2 = E_1 \setminus \Big((1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)\Big)$. Ekkor E_2 4 db $1/9$ hosszú zárt intervallum uniója. Ezután újra mindegyik intervallum középső (nyílt) harmadát elhagyva kapjuk E_3-at, amely 8 db $1/27$ hosszú zárt intervallum uniója lesz. Így definiáljuk az E_n halmazsorozatot, amelyben E_n 2^n db $1/3^n$ hosszú zárt intervallum uniója lesz. Nyilván E_n Lebesgue-mérhető, és $m(E_n) = (2/3)^n$. Definiáljuk a $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ halmazt, amelyet *Cantor-halmaznak* nevezünk. Ennek legfontosabb tulajdonságai:

1. C Borel-halmaz.
2. C mérhető és nullmértékű halmaz.
3. C zárt halmaz.
4. C kontinuum számosságú.

Az 1. tulajdonság nyilvánvaló a Cantor-halmaz definíciójából. Mivel C Borel-halmaz, ezért mérhető is (amit a definíciójából is nyilván láthatunk). Jelölje F_n az E_n komplementerét a $[0, 1]$ intervallumra, azaz $F_n = [0, 1] \setminus E_n$. Mivel $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$, ezért $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$. De ekkor a 3.24. Tétel szerint

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(F_n),$$

és ezért

$$\begin{aligned} m(C) &= m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}([0,1]\setminus F_n)\right) = m\left([0,1]\setminus\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)\right) = 1 - m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} m(F_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} m([0,1]\setminus E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) = 0. \end{aligned}$$

Ezzel a 2. állítást is beláttuk. A 3. állítás következik abból, hogy végtelen sok zárt halmaz metszete is zárt halmaz.

A 4. tulajdonság vázlatos indoklása a következő: Úgy mint a tizes számrendszerben (lásd a 3.6. Példát), a hármas számrendszerben is felírhatunk minden $x \in [0,1]$ számot az

$$x = (0, x_1x_2x_3\ldots)_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \cdots \tag{3.6}$$

végtelen tört alakban, ahol $x_i \in \{0,1,2\}$. Akár a tizes számrendszerben, itt is vannak olyan számok, amelyeket felírhatunk véges sok (nem nulla) tört jeggyel és végtelen sok tört jeggyel is. Például $(0{,}1)_3 = (0{,}02222\ldots)_3$. Ilyen esetekben mindig vegyük a végtelen tört jeggyel felírható alakját a számnak. Ekkor egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adtunk a $[0,1]$ intervallum pontjai és a (3.6) alakú végtelen törtek között. Az E_1 halmaz definíciójából következik, hogy pontosan azok a $[0,1]$-beli számok nem tartoznak E_1-hez, amelyek (3.6) előállításában $x_1 = 1$, azaz az E_1-beli számokra $x_1 = 0$ vagy 2. Hasonlóan, azokat a számokat hagyjuk el E_1-ből az E_2 generálásakor, amelyekre $x_2 = 1$. Megmutatható tehát, hogy azon $[0,1]$-beli számok tartoznak a Cantor-halmazhoz, amelyekre (3.6)-ben $x_i = 0$ vagy 2 minden i-re. Megadunk most egy kölcsönösen egyértelmű leképezést C és $[0,1]$ között: az $x \in C$ számhoz rendeljük hozzá azt a kettes számrendszerben felírt $y = (0{,}y_1y_2y_3\ldots)_2$ számot, amelyre $y_i = 0$, ha $x_i = 0$ és $y_i = 1$ ha $x_i = 2$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez egy kölcsönösen egyértelmű leképezés lesz, azaz C számossága megegyezik $[0,1]$ számosságával, azaz kontinuum számosságú. □

A következő pélában megmutatjuk, hogy nem minden $\mathbb{R}^p$-beli halmaz Lebesgue-mérhető, azaz a hossz, terület ill. térfogat fogalmát nem lehet természetes módon kiterjeszteni az összes $\mathbb{R}$-beli, síkbeli ill. térbeli halmazra.

3.67. Példa. Megmutatjuk, hogy létezik olyan részhalmaza a $[0,1)$ intervallumnak, amely nem Lebesgue-mérhető.

Vezessük be $[0,1)$-en az összeadás modulo 1 műveletet: legyen tetszőleges $x, y \in [0,1)$-re

$$x \oplus y = \begin{cases} x + y, & \text{ha } x + y < 1, \\ x + y - 1, & \text{ha } x + y \geq 1. \end{cases}$$

$E \subset [0,1)$-re jelölje $E \oplus y \stackrel{\text{def}}{=} \{x \oplus y \in [0,1)\colon\ x \in E\}$. Legyen $E \subset [0,1)$ mérhető, $y \in [0,1)$, és definiáljuk az

$$E_1 = E \cap [0, 1-y) \qquad \text{és} \qquad E_2 = E \cap [1-y, 1)$$

halmazokat. Ekkor $E = E_1 \cup E_2$, E_1 és E_2 diszjunkt és mérhető, így $m(E) = m(E_1) + m(E_2)$. Mivel $E_1 \oplus y = E_1 + y$ és $E_2 \oplus y = E_2 + (y-1)$ és mivel a Lebesgue-mérték eltolás invariáns (3.64. Állítás 7. pont), ezért $E_1 \oplus y$ és $E_2 \oplus y$ is mérhető és diszjunkt halmazok, és $m(E_1) = m(E_1 \oplus y)$, $m(E_2) = m(E_2 \oplus y)$. Másrészt $E \oplus y = (E_1 \oplus y) \cup (E_2 \oplus y)$, így $E \oplus y$ is mérhető, továbbá

$$m(E \oplus y) = m(E_1 \oplus y) + m(E_2 \oplus y) = m(E_1) + m(E_2) = m(E).$$

Vezessük be a következő ekvivalenciarelációt. Jelölje $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Q}$. Ennek segítségével ekvivalenciaosztályokra bontjuk a $[0,1)$ halmazt: egy osztályba azok a számok tartoznak, amelyek ekvivalensek, azaz különbségük egy racionális szám. Legyen $P \subset [0,1)$ olyan halmaz, amely minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy számot tartalmaz. Indirekt bizonyítással megmutatjuk, hogy a P halmaz nem Lebesgue-mérhető. Tegyük fel tehát, hogy P Lebesgue-mérhető. Legyen $r_1, r_2, \ldots$ a racionális számok egy sorozatba rendezése, és tekintsük a $P_i = P \oplus r_i$ halmazokat $(i = 1, 2, \ldots)$. Legyen $x \in P_i \cap P_j$ valamely $i \neq j$-re. Ekkor $x = p_i + r_i = p_j + r_j$ alakú, ahol $p_i \in P_i$, $p_j \in P_j$, amiből következik, hogy $p_i - p_j = r_j - r_i \in \mathbb{Q}$, ami ellentmond annak, hogy P minden ekvivalenciaosztályból csak egy elemet tartalmaz. Ezért a $P_1, P_2, \ldots$ halmazok páronként diszjunktak. De mivel $[0,1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, ezért

$$1 = m([0,1)) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(P),$$

ami ellentmondás. Ezért P nem lehet Lebesgue-mérhető.

□

3.5. Mértékterek

A 3.3. szakaszban a p-dimenziós vektortér elemi halmazai gyűrűjén megadott μ nemnegatív, additív, reguláris halmazfüggvényeit terjesztettük ki az $\mathcal{M}(\mu)$ σ-algebrára úgy, hogy a kiterjesztett függvény mérték legyen $\mathcal{M}(\mu)$-n. Az ilyen mértékeknek a legfontosabb példája a Lebesgue-mérték volt. Más kiindulási feltételekkel (pl. nem az $\mathbb{R}^p$ tér részhalmazain megadott halmazfüggvényből, vagy például nem reguláris halmazfüggvényből kiindulva) is lehet az alaphalmaz valamely σ-algebrájára kiterjesztve mértékeket definiálni, illetve bizonyos esetekben direkt módon is meg tudunk adni egy σ-algebrát és azon egy σ-additív halmazfüggvényt (lásd pl. a 3.32. Példát). Ezért tekintsük a következő definíciót.

3.68. Definíció. Legyen X tetszőleges halmaz, $\mathcal{M}$ az X részhalmazaiból álló σ-algebra és μ az $\mathcal{M}$-n értelmezett nemnegatív σ-additív halmazfüggvény. Ekkor az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ hármast *mértéktérnek* nevezzük, és az $\mathcal{M}$ halmaz elemeit *mérhető halmazoknak* nevezzük.

A következőkben arra adunk egyszerű példákat, hogy tetszőleges halmazon definiálhatunk mértékteret.

3.69. Példa. Legyen X egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{M}$ az X összes részhalmazainak halmaza és legyen tetszőleges véges $A \subset X$ esetén $\mu(A) =$ az A elemeinek a száma, ha pedig A végtelen számosságú halmaz, akkor legyen $\mu(A) = \infty$. Ekkor ellenőrizhető direkt módon, hogy μ mérték (az ú.n. *számosság mérték*), és így $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér. □

3.70. Példa. Legyen X egy tetszőleges halmaz, $x_0 \in X$ rögzített. Legyen $\mathcal{M}$ az X összes részhalmazainak halmaza, és μ a 3.25. Példában vizsgált

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$$

σ-additív halmazfüggvény. Ekkor $(X, \mathcal{M}, \mu)$ egy mértéktér. Ezt a μ mértéket *triviális mértéknek* nevezzük. □

A valószínűségszámítás elméletében a valószínűségi mező ismeretében tudunk következtetéseket levonni, azaz feltesszük, hogy adott egy $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ mértéktér, ahol $\mathcal{H}$ az Ω részhalmazaiból álló σ-algebra, $P\colon \mathcal{H} \to [0,1]$ mérték, azaz σ-additív nemnegatív halmazfüggvény, és amelyre $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$. Megjegyezzük, hogy ebben az általános esetben Ω nem minden részhalmaza mérhető, azaz nem minden részhalmazhoz (eseményhez) rendelhetünk valószínűséget.

3.71. Definíció. Adott egy $(X,\ \mathcal{M},\ \mu)$ mértéktér. Legyen T egy pontbeli tulajdonság valamely halmazon (például: egy függvény az adott pontban folytonos, vagy egy függvény az adott pontban nem zéró).

Azt mondjuk, hogy a T *tulajdonság egy adott halmazon μ-majdnem mindenütt teljesül*, ha azoknak a pontoknak a halmaza, ahol T nem teljesül vagy ahol T nincs értelmezve, μ-mérhető halmaz és a μ-mértéke nulla.

Pl.: Azt mondjuk, hogy az $f, g \in X \to \mathbb{R}$ függvények az $A \subset X$ halmazon *μ-majdnem mindenütt egyenlőek* (rövidítve $f = g$ μ-m.m.), ha az $\{x \in A\colon\ f(x) \neq g(x)\}$ halmaz μ-mérhető és μ-mértéke nulla. (Ha f és/vagy g egy adott pontban nincsen értelmezve, akkor azt úgy tekintjük, hogy f és g nem egyenlő ebben a pontban).

Ha a fenti definíciókban $\mu = m$, akkor az „m-majdnem mindenütt” helyett egyszerűen a „majdnem mindenütt” kifejezést használjuk.

3.72. Példa. Ha f és g definíciója a közös értelmezési tartományukon véges sok pontban tér csak el egymástól, akkor f majdnem mindenütt megegyezik g-vel, mert véges sok pontból álló halmaz Lebesgue-mértéke 0.

Legyen most
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0,1] \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \in [0,1] \text{ irracionális,} \end{cases}$$
és legyen g az azonosan nulla függvény $[0,1]$-en. Ekkor f majdnem mindenütt egyenlő g-vel, mert az $\{x \in [0,1]\colon\ f(x) \neq g(x)\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ halmaz nullmértékű. □

3.6. Mérhető függvények

Ebben a szakaszban feltesszük, hogy adott egy $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, így a mérhető halmazokon mindig az $\mathcal{M}$ elemeit, mérhetőségen μ-mérhetőséget, mértéken pedig a μ mértéket értjük. Olyan függvényeket vizsgálunk, amelyek X-en értelmezettek és értékeiket a kibővített valós számok halmazából, $\mathbb{R}_b \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$-ből veszik fel.

3.73. Definíció. Legyen $f : X \to \mathbb{R}_b$. Azt mondjuk, hogy f *mérhető függvény*, ha az
$$\{x \in X\colon\ f(x) > a\}$$
halmaz minden valós a esetén mérhető.

3.74. Tétel. *A következő állítások ekvivalensek:*

1. $\{x \in X\colon\ f(x) > a\} \in \mathcal{M}$ *minden* $a \in \mathbb{R}$*-re,*
2. $\{x \in X\colon\ f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$ *minden* $a \in \mathbb{R}$*-re,*
3. $\{x \in X\colon\ f(x) < a\} \in \mathcal{M}$ *minden* $a \in \mathbb{R}$*-re,*
4. $\{x \in X\colon\ f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$ *minden* $a \in \mathbb{R}$*-re.*

Bizonyítás: Az egyes implikációk következnek az alábbi összefüggésekből:

1. $\Rightarrow$ 2.: $\{x \in X\colon f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X\colon f(x) > a - \frac{1}{n}\}$;

2. $\Rightarrow$ 3.: $\{x \in X\colon f(x) < a\} = X \setminus \{x \in X\colon f(x) \geq a\}$;

3. $\Rightarrow$ 4.: $\{x \in X\colon f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X\colon f(x) < a + \frac{1}{n}\}$;

4. $\Rightarrow$ 1.: $\{x \in X\colon f(x) > a\} = X \setminus \{x \in X\colon f(x) \leq a\}$. □

3.75. Tétel. *Ha f mérhető, akkor $|f|$ is mérhető.*

Bizonyítás: Az állítás következik az $\{x \in X\colon |f(x)| > a\} = \{x \in X\colon f(x) > a\} \cup \{x \in X\colon f(x) < -a\}$ összefüggésből.

□

3.76. Tétel. *Ha f és g mérhető függvények, $c \in \mathbb{R}$, akkor a cf, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f+g$, $f \cdot g$ függvények szintén mérhetők. Ha $\mu(\{x \in X\colon g(x) = 0\}) = 0$, akkor $1/g$ és f/g is mérhető.*

Bizonyítás: Tekintsük például az $f+g$ függvény mérhetőségét. Legyen $r_1, r_2, \ldots$ a racionális számok egy sorozatba rendezése (lásd a 3.8. Példát). Ekkor

$$\{x \in X\colon f(x) + g(x) > a\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Big(\{x \in X\colon f(x) > r_i\} \cap \{x \in X\colon g(x) > a - r_i\}\Big) \in \mathcal{M}.$$

□

3.77. Tétel. *Legyen $f, g : X \to \mathbb{R}$ mérhető, valós értékű függvények, és legyen F valós és folytonos függvény $\mathbb{R}^2$-n, és legyen*

$$h(x) = F(f(x), g(x)), \quad x \in X.$$

Ekkor h mérhető.

3.78. Tétel. *Legyen $\{f_n\}$ mérhető függvények sorozata. Ekkor az*

$$\sup_{n\geq 1} f_n, \qquad \inf_{n\geq 1} f_n, \qquad \limsup_{n\geq 1} f_n \qquad \text{és} \qquad \liminf_{n\geq 1} f_n$$

függvények szintén mérhetők.

Bizonyítás: Legyen például $g(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)$. Ekkor a supremum definíciója miatt

$$\{x\colon g\,(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x\colon f_n(x) > a\}\,,$$

így g mérhető.

Legyen például $h(x) = \limsup_{n\geq 1} f_n(x)$. Ekkor

$$h(x) = \inf_{m\geq 1} \sup_{n\geq m} f_n(x),$$

így az előbbiekből következik az állítás. □

3.79. Következmény.

1. *Ha f és g mérhető, akkor* $\max\{f,g\}$ *és* $\min\{f,g\}$ *szintén mérhető. Speciálisan ha*

$$f^+ \overset{\text{def}}{=} \max\{f,0\} \qquad f^- \overset{\text{def}}{=} -\min\{f,0\},$$

akkor f^+ és f^- mérhető.

2. *Mérhető függvények konvergens sorozatának határértéke is mérhető.*

3.80. Tétel. *Ha $X \subset \mathbb{R}^p$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor Lebesgue-mérhető.*

Bizonyítás: Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített, és tekintsük az $\{x\colon f(x) > a\}$ halmazt. Ez nyílt halmaz, hiszen ha egy tetszőleges $x_0 \in \{x\colon f(x) > a\}$ pontot veszünk, f folytonosságából következik, hogy létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) > a$ teljesül minden x-re, amelyre $|x - x_0| < \delta$, ahol $|\cdot|$ az euklideszi távolság $\mathbb{R}^n$-en. A 3.64. Állítás szerint minden nyílt halmaz Lebesgue-mérhető, hiszen a nyílt halmazok Borel-halmazok is, tehát f Lebesgue-mérhető függvény. □

3.81. Tétel. *Legyen $X \subset \mathbb{R}^p$, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, f Lebesgue-mérhető és $f = g$ majdnem mindenütt. Ekkor g is Lebesgue-mérhető.*

Bizonyítás: A majdnem mindenütt definíciójából következik, hogy az $\{x\colon g(x) \neq f(x)\}$ halmaz Lebesgue-mérhető, és $m(\{x\colon g(x) \neq f(x)\}) = 0$. Ekkor persze az $\{x\colon g(x) = f(x)\}$ halmaz is Lebesgue-mérhető lesz. Mivel

$$\{x\colon g(x) > a\} \cap \{x\colon g(x) \neq f(x)\} \subset \{x\colon g(x) \neq f(x)\},$$

és minden m-nullmértékű halmaz részhalmaza is Lebesgue-mérhető, ezért az

$$\{x\colon g(x) > a\} = \Big(\{x\colon f(x) > a\} \cap \{x\colon f(x) = g(x)\}\Big) \cup \Big(\{x\colon g(x) > a\} \cap \{x\colon g(x) \neq f(x)\}\Big)$$

halmaz is Lebesgue-mérhető. □

3.82. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy az előbbi tétel általánosítható olyan $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértékterekre is, ahol minden olyan $E \in \mathcal{M}$ halmaznak, amelynek μ-mértéke 0, bármely részhalmaza is mérhető halmaz. Az ilyen tulajdonságú mértékteraket *teljes mértéktérnek* nevezzük. Például a Lebesgue-mértékhez tartozó $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}(m), m)$ mértéktér teljes (lásd a 3.64. Állítást).

3.83. Megjegyzés. A mérhető függvények osztálya csak az $\mathcal{M}$ σ-gyűrűtől függ (a konkrét mértéknek nincs szerepe a definícióban). Például $\mathbb{R}^p$-n beszélhetünk a Borel-mérhető függvényekről: Azt mondjuk, hogy f *Borel-mérhető*, ha bármely $a \in \mathbb{R}$-re az $\{x\colon f(x) > a\}$ halmaz Borel-halmaz.

3.84. Példa. Legyen $P \subset [0,1)$ a 3.67. Példában definiált olyan halmaz, amely nem Lebesgue-mérhető, és legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0,1) \cap P, \\ 0, & \text{ha } x \in [0,1) \setminus P. \end{cases}$$

Ekkor f nem Lebesgue-mérhető függvény, mivel pl. az $\{x \in [0,1)\colon f(x) > 0,5\} = P$ halmaz nem Lebesgue-mérhető. □

3.7. Egyszerű függvények

3.85. Definíció. Legyen s az X-en értelmezett valós értékű függvény. Ha s értékkészlete véges halmaz, akkor azt mondjuk, hogy s *egyszerű függvény.*

3.86. Definíció. Legyen $E \subset X$. Az E halmaz *karakterisztikus függvényének* nevezzük a

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

egyszerű függvényt.

Az egyszerű függvényeket mindig felírhatjuk karakterisztikus függvények lineáris kombinációjaként. Legyenek az s egyszerű függvény értékkészletének az elemei $c_1, ..., c_n$, és legyen

$$E_i = \{x\colon\ s(x) = c_i\} \qquad (i = 1, ..., n).$$

Ekkor

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}.$$

3.87. Állítás. *Az s egyszerű függvény akkor és csak akkor mérhető, ha az $E_1, ..., E_n$ halmazok mérhetők.*

Bizonyítás: Az állítás az

$$\{x\colon\ s(x) > a\} = \bigcup_{i\colon c_i > a} E_i$$

és valamely kis $\varepsilon > 0$-ra az

$$E_i = \{x\colon\ s(x) > c_i - \varepsilon\} \cap \{x\colon\ s(x) < c_i + \varepsilon\}$$

összefüggésekből rögtön következik. □

A következő tétel szerint bármely függvény közelíthető egyszerű függvényekkel.

3.88. Tétel. *Legyen $f\colon X \to \mathbb{R}_b$. Ekkor létezik olyan egyszerű függvényekből álló (s_n) sorozat, hogy minden $x \in X$-re $s_n(x) \to f(x)$, ha $n \to +\infty$. Ha f mérhető, akkor (s_n) mérhető függvényekből álló sorozatnak választható. Ha $f \geq 0$, akkor (s_n) monoton növekvő sorozatnak választható.*

Bizonyítás: Legyen $f \geq 0$ és

$$E_{n,i} = \left\{x\colon\ \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \qquad F_n = \{x\colon\ f(x) \geq n\},$$

$n = 1, 2, ...; i = 1, 2, ..., n2^n$. Definiáljuk az s_n függvényt az

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}$$

képlettel. Ekkor s_n egyszerű függvény minden n-re, $s_n \leq s_{n+1}$, és $s_n \geq 0$, $n \geq 1$. Ha az f függvény mérhető, akkor az $E_{n,i}$ és F_n halmazok mérhetők, így s_n is mérhető függvény a 3.76. Tétel szerint.

Rögzítsünk egy $x \in X$ számot. Tegyük fel először, hogy x olyan, hogy $f(x)$ véges. Ekkor válasszunk egy olyan n_0 természetes számot, hogy $f(x) < n_0$ legyen. Ekkor minden $n > n_0$-ra létezik olyan $i_n(x)$ index, hogy $x \in E_{n,i_n(x)}$, azaz

$$\frac{i_n(x)-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i_n(x)}{2^n}.$$

Így

$$0 \le f(x) - s_n(x) = f(x) - \frac{i_n(x)-1}{2^n} \le \frac{1}{2^n} \to 0, \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

Ha $f(x) = +\infty$, akkor minden n-re $x \in F_n$, ezért $s_n(x) = n\,\chi_{F_n}(x) \to +\infty$, ha $n \to +\infty$.

Ha f nem előjeltartó, akkor felírható két nemnegatív függvény különbségeként: $f = f^+ - f^-$, amiből az előzőek alapján az állítás következik. □

3.8. Integrálás mértéktereken

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, ahol X alaphalmaz, $\mathcal{M}$ σ-gyűrű és μ megszámlálható mérték. Ebben a szakaszban mérhető függvények μ mérték szerinti integrálját definiáljuk. Az integrálást fokozatosan terjesztjük ki az egyszerű függvények integráljától kiindulva az egyre általánosabb függvényekre.

3.89. Definíció. Legyen $E \in \mathcal{M}$. Ekkor a konstans 1 függvény *μ mérték szerinti integrálját* az E halmazon az

$$\int_E 1\,d\mu = \mu(E)$$

képlettel definiáljuk. Tegyük fel, hogy az

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$$

egyszerű függvény mérhető (azaz az E_i halmazok mind mérhetőek), és legyen $E \in \mathcal{M}$. Ekkor az *s egyszerű függvény integrálját* az E halmazon az

$$\int_E s\,d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$$

képlettel definiáljuk, ahol abban az esetben, amikor valamely $E \cap E_i$ halmaz mértéke végtelen, akkor feltesszük, azt is, hogy vagy minden $x \in E$-re $s(x) \ge 0$ (azaz $c_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$) vagy minden $x \in E$-re $s(x) \le 0$ (azaz $c_i \le 0$, $i = 1, \ldots, n$).

Speciálisan, ha A mérhető és $s = \chi_A$, akkor

$$\int_E \chi_A\,d\mu = \mu(E \cap A).$$

Ekkor az egyszerű függvények körében az integrál az megőrzi a Riemann-integrál szokásos tulajdonságait:

3.90. Állítás. *Legyen $s, s_1, s_2 \colon X \to \mathbb{R}$ mérhető elemi függvények, $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) < \infty$. Ekkor*

1. $\int\limits_E cs\,d\mu = c\int\limits_E s\,d\mu$ *minden* $c \in \mathbb{R}$*-re,*

2. $\int\limits_E (s_1+s_2)\,d\mu = \int\limits_E s_1\,d\mu + \int\limits_E s_2\,\mu$,

3. ha $s_1(x) \le s_2(x)$ *minden* $x \in E$*-re, akkor* $\int\limits_E s_1\,d\mu \le \int\limits_E s_2\,d\mu$.

A következő lépésben nemnegatív mérhető függvények integrálját vezetjük vissza egyszerű függvények integráljaira.

3.91. Definíció. Legyen $f: X \to \mathbb{R}_b$ mérhető és nemnegatív. Ekkor az f függvény $E \in \mathcal{M}$ halmazon vett μ *mérték szerinti integrálját* $\int\limits_E f d\mu$–vel jelöljük és ez definíció szerint

$$\int\limits_E f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup\left\{\int\limits_E s\,d\mu\colon\ 0 \le s \le f,\ s \text{ egyszerű függvény}\right\}.$$

Megjegyezzük, hogy a mérték szerinti integrált nem korlátos függvényekre, sőt olyan olyan függvényekre is értelmeztük, amelyek a végtelen értéket is felvehetik, és persze az integrál értéke is lehet végtelen.

3.92. Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \ne 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}$$

$E = [0,1]$, $E_i = (1/2^i, 1/2^{i-1}]$ $(i = 1,2,\ldots)$. Ekkor $E_1, E_2, \ldots$ páronként diszjunkt halmazok, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = (0,1]$. Definiáljuk az s_n egyszerű függvényt az $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}\chi_{E_i}$ képlettel. Ekkor $0 \le s_n \le f$ és

$$\int\limits_E f\,dm \ge \int\limits_E s_n\,dm = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \to \infty, \qquad (n \to \infty),$$

azaz $\int\limits_E f\,dm = \infty$.

Megjegyezzük, hogy ha f-et a 0-ban másképp definiáljuk, például az $f(0) = 0$ értékkel, a fenti számolás megismételhető a módosított f függvényre is, így annak az integrálja is ∞. □

3.93. Példa. Legyen $A, E \subset \mathbb{R}$ mérhető halmazok,

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x \in A \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

és számítsuk ki az $\int\limits_E f\,dm$ integrált!

Definíció szerint

$$\int\limits_E f\,dm = \sup_{\substack{0 \le s \le f, \\ s \text{ egyszerű}}} \int\limits_E s\,dm.$$

Ezért, ha vesszük az

$$s_n(x) = \begin{cases} n, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

egyszerű függvényt, akkor

$$\int_E f\,dm \geq \int_E s_n\,dm = n \cdot m(E \cap A) + 0 \cdot m(E \setminus A) = n \cdot m(E \cap A) \qquad \text{minden } n \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

Tehát ha $m(E \cap A) \neq 0$, akkor $\int_E f\,dm = \infty$.

Ha pedig $m(E \cap A) = 0$, akkor tetszőleges olyan s egyszerű függvényre, amelyre $0 \leq s(x) \leq f(x)$ minden $x \in E$-re, azaz $s(x) = 0$ minden $x \notin A$-ra, $\int_E s\,dm = 0$ teljesül, ezért $\int_E f\,dm = 0$. □

Végül az $f = f^+ - f^-$ összefüggés segítségével előjelváltó függvényekre terjesztjük ki az integrált.

3.94. Definíció. Legyen $f: X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvény, $E \in \mathcal{M}$, és tekintsük a nemnegatív (szintén mérhető) f^+ és f^- függvények

$$\int_E f^+ d\mu \quad \text{és} \quad \int_E f^- d\mu$$

mérték szerinti integrálját. Ha a fenti két integrál közül legalább az egyik véges, akkor azt mondjuk, hogy f az E-n a μ *mérték szerint integrálható*, és az f függvény μ-szerinti integrálját az

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

összefüggéssel definiáljuk. Ha f integrálható E-n és az integrálja véges, akkor azt mondjuk, hogy *f végesen integrálható az E halmazon a μ mérték szerint*, és ezt úgy rövidítjük, hogy $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Ha $\mu = m$, akkor a végesen Lebesgue-integrálható függvények halmazát egyszerűen $\mathcal{L}(E)$ jelöli.

Szükségünk lesz a következőkben az egyváltozós elemi függvények speciális osztályárára, a lépcsős függvényekre:

3.95. Definíció. Egy $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt *lépcsős függvénynek* nevezünk, ha létezik az $[a, b]$ intervallumnak egy $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztása és $c_0, \ldots, c_{n-1}$ konstansok, hogy $g(x) = c_i$ ha $x \in (t_i, t_{i+1})$.

Megjegyezzük, hogy a fenti definícióban a lépcsős függvény értéke tetszőleges lehet a t_i osztópontokban. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden lépcsős függvény egyben egyszerű függvény is.

Tegyük fel, hogy $f: [a, b] \to [0, \infty)$ adott, és tekintsük át az $\int_a^b f(x)\,dx$ Riemann-integrál definícióját a szokásostól egy kicsit eltérő jelölésekkel: vegyük az $[a, b]$ intervallum egy $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ felosztását, jelölje $k_i = \inf\{f(x) : t_i \leq x \leq t_{i+1}\}$ és $K_i = \sup\{f(x) : t_i \leq x \leq t_{i+1}\}$, és definiáljuk a

$$g = \sum_{i=0}^{n-1} k_i \chi_{(t_i, t_{i+1})} \qquad \text{és} \qquad g^* = \sum_{i=0}^{n-1} K_i \chi_{(t_i, t_{i+1})}$$

lépcsős függvényeket. (Ekkor $g(t_i) = 0$ és $g^*(t_i) = 0$ minden i-re.) Legyen m az egydimenziós Lebesgue-mérték. Ekkor a g ill. g^* lépcsős függvények $[a, b]$ intervallumon vett Lebesgue-integrálja visszaadja az f függvény P beosztáshoz tartozó Darboux-féle alsó ill. felső integrál közelítő öszegét:

$$\int\limits_{[a,b]} g\,dm = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(t_{i+1} - t_i) \qquad \text{és} \qquad \int\limits_{[a,b]} g^*\,dm = \sum_{i=0}^{n-1} K_i(t_{i+1} - t_i).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti összefüggések akkor is teljesülnek, ha a g és g^* lépcsős függvények értékeit a t_i osztópontokban tetszőlegesen definiáljuk. Láthatjuk tehát, hogy az $\int_a^b f(x)\,dx$ Riemann-integrál tehát akkor és csak akkor létezik, ha f korlátos $[a, b]$-n, továbbá

$$\sup_{\substack{0 \le g \le f,\\ g \text{ lépcsős függv.}}} \int\limits_{[a,b]} g\,dm = \inf_{\substack{g^* \ge f,\\ g^* \text{ lépcsős függv.}}} \int\limits_{[a,b]} g^*\,dm. \tag{3.7}$$

Látható, hogy a 3.91. Definíció a fentiek mintájára született, úgy, hogy a lépcsős függvények helyett az elemi függvények (tágabb) osztályára alkalmaztuk a (3.7) egyenlet bal oldalán álló kifejezést. Felmerül a kérdés, hogy ez a supremum mikor egyezik meg a (3.7) egyenlet jobb oldalának megfelelő, egyszerű függvényekre vett infimummal. A következő tétel szerint ez pontosan akkor teljesül, ha f mérhető. Ez mutatja a mérhetőség fogalmának jelentőségét, és emiatt a mérték szerinti integrálhatóság Riemann-integrálhatósággal analóg feltételét az egyszerűbben ellenőrizhető mérhetőséggel helyettesíthetjük. Azt is érdemes kiemelni, hogy a mérték szerinti integrál definiálásához nem kellett kikötni, hogy az f függvény korlátos legyen.

3.96. Tétel. *Legyen $f\colon E \to \mathbb{R}$ korlátos az $E \subset X$ mérhető halmazon, amelyre $\mu(E) < \infty$. Ekkor f akkor és csak akkor mérhető, ha*

$$\sup_{\substack{s \le f,\\ s \text{ egyszerű függv.}}} \int\limits_E s\,d\mu = \inf_{\substack{s^* \ge f,\\ s^* \text{ egyszerű függv.}}} \int\limits_E s^*\,d\mu.$$

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy az f függvény mérhető és $|f(x)| < M$ minden $x \in E$-re, legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és definiáljuk az

$$E_i = \left\{ x \in E\colon \frac{(i-1)M}{n} < f(x) \le \frac{iM}{n} \right\} \tag{3.8}$$

halmazokat $i = -n + 1, \ldots, n$-re. Ekkor $E_{-n+1}, \ldots, E_n$ μ-mérhető halmazok, páronként diszjunktak,

$$E = \bigcup_{i=-n+1}^{n} E_i, \qquad \text{és így} \quad \mu(E) = \sum_{i=-n+1}^{n} \mu(E_i).$$

Használjuk az

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{s \le f,\\ s \text{ egyszerű függv.}}} \int\limits_E s\,d\mu \qquad \text{és} \qquad I \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\substack{s^* \ge f,\\ s^* \text{ egyszerű függv.}}} \int\limits_E s^*\,d\mu(s)$$

jelöléseket. Legyen s és s^* olyan egyszerű függvények, hogy $s(x) \le f(x) \le s^*(x)$ minden $x \in E$-re. Ekkor a 3.90. Állítás 3. pontja értelmében

$$\int\limits_E s\,d\mu \le \int\limits_E s^*\,d\mu,$$

de ebből rögzített s^*-ra a bal oldal supremumát véve, majd ezután a kapott egyenlőtlenség jobb oldalának infimumát véve következik, hogy $S \le I$.

Definiáljuk a következő egyszerű függvényeket:

$$s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=-n+1}^{n} \frac{(i-1)M}{n}\chi_{E_i} \qquad \text{és} \qquad s_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=-n+1}^{n} \frac{iM}{n}\chi_{E_i}. \tag{3.9}$$

Ekkor nyilván $s_n(x) \le f(x) \le s_n^*(x)$ minden $x \in E$-re, ezért

$$I \le \int\limits_E s_n^*\, d\mu = \frac{M}{n} \sum_{i=-n+1}^{n} i\mu(E_i) \qquad \text{és} \qquad S \ge \int\limits_E s_n\, d\mu = \frac{M}{n} \sum_{i=-n+1}^{n} (i-1)\mu(E_i),$$

amiből következik, hogy

$$0 \le I - S \le \frac{M}{n} \sum_{i=-n+1}^{n} \mu(E_i) = \frac{M}{n}\mu(E).$$

Mivel n tetszőlegesen nagy lehet, ezért $S = I$.

2. Most tegyük fel, hogy $S = I$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re léteznek olyan s_n és s_n^* egyszerű függvények, hogy $s_n(x) \le f(x) \le s_n^*(x)$ minden $x \in E$-re és

$$0 \le \int\limits_E s_n^*\, du - \int\limits_E s_n\, du < \frac{1}{n}.$$

Legyen $s \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{s_n\colon\ n = 1, 2, \ldots\}$ és $s^* \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{s_n^*\colon\ n = 1, 2, \ldots\}$. Ekkor a 3.78. Tétel szerint s és s^* mérhető függvények, továbbá $s(x) \le f(x) \le s^*(x)$ minden $x \in E$-re. Legyen

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E\colon\ s(x) < s^*(x)\}, \qquad \text{és} \qquad A_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in E\colon\ s(x) < s^*(x) - \frac{1}{i}\right\} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Ekkor nyilván $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ és $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Másrészt

$$A_i \subset \left\{x \in E\colon\ s_n(x) < s_n^*(x) - \frac{1}{i}\right\} \qquad \text{minden } n\text{-re},$$

ezért

$$\frac{1}{n} > \int\limits_E (s_n^* - s_n)\, d\mu = \int\limits_{A_i} (s_n^* - s_n)\, d\mu + \int\limits_{E \setminus A_i} (s_n^* - s_n)\, d\mu \ge \int\limits_{A_i} (s_n^* - s_n)\, d\mu \ge \frac{1}{i}\mu(A_i),$$

és így $\mu(A_i) \le \frac{i}{n}$. Mivel n tetszőlegesen nagy lehet, ezért $\mu(A_i) = 0$ minden i-re, de így a 3.24. Tétel szerint $\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = 0$, azaz $s(x) = f(x) = s^*(x)$ μ-majdnem mindenütt, ezért f is μ-mérhető. □

A szakasz végéig legyen $\mu = m$ a Lebesgue-féle mérték a valós számegyenes $[a, b]$ intervallumán, $X = [a, b]$, $\mathcal{M}$ az $[a, b]$ intervallum Lebesgue-mérhető részhalmazainak összessége. Legyen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Ekkor az f függvény $[a, b]$ szakaszon vett Riemann-integrálját az

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

szokásos jelöléssel, a Lebesgue-integrálját pedig az

$$\int\limits_{[a,b]} f\,dm \qquad \text{vagy} \qquad \int_a^b f\,dm$$

képletekkel jelöljük. A következő tétel mutatja a kapcsolatot a Riemann- és a Lebesgue-féle integrálok között:

3.97. Tétel. *Ha az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor f mérhető és Lebesgue-integrálható is $[a,b]$-n továbbá*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f\,dm.$$

Bizonyítás: Mivel minden lépcsős függvény elemi függvény is, ezért az

$$\sup_{\substack{0\le g\le f\\ g \text{ lépcsős fgv.}}} \int_a^b g\,dm \le \sup_{\substack{0\le s\le f\\ s \text{ elemi fgv.}}} \int_a^b s\,dm \le \inf_{\substack{f\le s^*\\ s^* \text{ elemi fgv.}}} \int_a^b s^*\,dm \le \inf_{\substack{f\le g^*\\ g^* \text{ lépcsős fgv.}}} \int_a^b g^*\,dm$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ha f Riemann-integrálható, akkor f korlátos is, és a fenti relációkban mindenhol egyenlőség teljesül, azaz a 3.96. Tétel alapján f mérhető $[a,b]$-n, és a Riemann-integrál megegyezik a Lebesgue-integrállal. □

3.98. Példa. Tekintsük az $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ függvényt. Ez nem Riemann-integrálható $[0,1]$-en, mivel könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges olyan g és g^* lépcsős függvényre, amelyre $0 \le g \le f$ és $f \le g^*$, az

$$\int_0^1 g\,dm = 0 \qquad \text{és} \qquad \int_0^1 g^*\,dm = 1$$

relációk teljesülnek. Másrészt f mérhető egyszerű függvény, így Lebesgue-integrálható is, és

$$\int\limits_{[0,1]} f\,dm = \int\limits_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} 1\,dm = m([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 0.$$

□

Megmutatható a Riemann-integrálhatóság következő szükséges és elégséges feltétele.

3.99. Tétel (Lebesgue-kritérium). *Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha f majdnem mindenütt folytonos az $[a,b]$ intervallumon.*

3.9. A mérték szerinti integrálás tulajdonságai

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ egy rögzített mértéktér. Megmutatjuk, hogy a Riemann- (és egyéb) integrálás szokásos tulajdonságai teljesülnek a mérték szerinti integrálra is, sőt a mérték szerinti integrálás számos jobb tulajdonsággal is rendelkezik.

3.100. Tétel. *Legyen $f\colon X \to \mathbb{R}_b$ mérhető függvény.*

1. *Ha $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, akkor bármely $c \in R$ állandóra $cf \in \mathcal{L}(E, \mu)$ és*
$$\int_E cf\, d\mu = c \int_E f\, d\mu.$$
2. *Ha $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$, akkor $f + g \in \mathcal{L}(E, \mu)$, továbbá*
$$\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu.$$
3. *Ha $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ és $f(x) \le g(x)$, $x \in E$, akkor*
$$\int_E f\, d\mu \le \int_E g\, d\mu.$$
4. *Ha $x \in E$ esetén $k \le f(x) \le K$ és $\mu(E) < \infty$, akkor*
$$k\mu(E) \le \int_E f\, d\mu \le K\mu(E).$$
5. *Ha f mérhető és korlátos az E-n, továbbá $\mu(E) < \infty$, akkor $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.*
6. *Ha $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, akkor $|f| \in \mathcal{L}(E, \mu)$, és*
$$\left| \int_E f\, d\mu \right| \le \int_E |f|\, d\mu.$$
7. *Legyen f mérhető az E-n és $|f| \le g$, ahol $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Ekkor $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.*
8. *Legyen $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$, $f\colon B \to \mathbb{R}$ mérhető. Ekkor*
$$\int_A f\, d\mu = \int_B f\chi_A\, d\mu.$$
9. *Legyen $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B$. Ha $f \in \mathcal{L}(\mu)$ a B-n, akkor $f \in \mathcal{L}(\mu)$ az A-n, továbbá ha $f \ge 0$, akkor*
$$\int_A f\, d\mu \le \int_B f\, d\mu.$$

10. Ha $A, B \in \mathcal{M}$ diszjunkt halmazok, akkor

$$\int\limits_{A\cup B} f\,d\mu = \int\limits_{A} f\,d\mu + \int\limits_{B} f\,d\mu.$$

Bizonyítás:

1. Elemi függvényekre az állítás a 3.90. Állítás 1. pontja alapján teljesül. Tekintsük most azt az esetet, amikor $f \geq 0$ mérhető. Nyilván s akkor és csak akkor mérhető egyszerű függvény, ha cs $(c \neq 0)$ is az. Ha $c > 0$, akkor

$$\int\limits_E cf\,du = \sup_{\substack{0\leq s\leq f \\ s \text{ egyszerű fgv.}}} \int\limits_E cs\,d\mu = c\cdot \sup_{\substack{0\leq s\leq f \\ s \text{ egyszerű fgv.}}} \int\limits_E s\,d\mu = c\int\limits_E f\,du.$$

Ha $c < 0$, akkor $(cf)^+ = 0$ és $(cf)^- = -cf$, ezért a 3.94. Definíciót és az előbb bizonyított eredményt használva

$$\int\limits_E cf\,d\mu = \int\limits_E (cf)^+\,d\mu - \int\limits_E (cf)^-\,d\mu = -\int\limits_E -cf\,d\mu = -(-c)\int\limits_E f\,d\mu.$$

Legyen most f tetszőleges mérhető függvény. Ha $c > 0$, akkor $(cf)^+ = cf^+$ ill. $(cf)^- = cf^-$, ha pedig $c < 0$, akkor $(cf)^+ = -cf^-$ ill. $(cf)^- = -cf^+$. Ekkor $c > 0$-ra

$$\int\limits_E cf d\mu = \int\limits_E cf^+ d\mu - \int\limits_E cf^- d\mu = c\int\limits_E f^+ d\mu - c\int\limits_E f^- d\mu = c\int\limits_E f\,d\mu.$$

A $c < 0$ eset hasonló módon következik.

2. Elemi függvényekre az állítás a 3.90. Állítás 2. pontja alapján teljesül. Tegyük fel először, hogy $f, g \geq 0$ mérhető, és legyen s_1 és s_2 olyan egyszerű függvények, amelyekre

$$0 \leq s_1 \leq f \qquad \text{és} \qquad 0 \leq s_2 \leq g. \tag{3.10}$$

Ekkor $0 \leq s_1 + s_2 \leq f + g$, továbbá az $\int\limits_E (f+g)\,d\mu$ definíciója és a 3.90. Állítás 2. pontja alapján

$$\int\limits_E s_1\,d\mu + \int\limits_E s_2\,d\mu = \int\limits_E (s_1+s_2)\,d\mu \leq \int\limits_E (f+g)\,d\mu.$$

Azaz ha rögzítünk egy (3.10) tulajdonságú s_2 elemi függvényt, akkor minden (3.10) tulajdonságú s_1 elemi függvényre

$$\int\limits_E s_1\,d\mu \leq \int\limits_E (f+g)\,d\mu - \int\limits_E s_2\,d\mu.$$

De ekkor a bal oldal supremumát véve kapjuk, hogy

$$\int\limits_E f\,d\mu \leq \int\limits_E (f+g)\,d\mu - \int\limits_E s_2\,d\mu,$$

azaz

$$\int\limits_E s_2\,d\mu \leq \int\limits_E (f+g)\,d\mu - \int\limits_E f\,d\mu$$

teljesül minden (3.10) tulajdonságú s_1 elemi függvényre, így ezek supremumára is, tehát kapjuk, hogy

$$\int\limits_E f\,d\mu + \int\limits_E g\,d\mu \leq \int\limits_E (f+g)\,d\mu.$$

Legyen most s_1^* és s_2^* olyan elemi függvények, amelyekre $s_1^* \geq f$ és $s_2^* \geq g$. Ekkor a 3.96. Tételt alkalmazva az előzőhöz hasonló módon kapjuk, hogy

$$\int_E s_1^* \, d\mu + \int_E s_2^* \, d\mu \geq \int_E (f+g) \, d\mu,$$

és ebből következik, hogy

$$\int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu \geq \int_E (f+g) \, d\mu.$$

Ezzel a 2. állítást beláttuk arra az esetre, amikor $f, g \geq 0$. Az általános eset rögtön következik az $f = f^+ - f^-$ és $g = g^+ - g^-$ összefüggésekből.

3. Elemi függvényekre az állítás a 3.90. Állítás 3. pontja alapján teljesül. Legyen $0 \leq f$. Ekkor $\{s \text{ elemi fgv.}: \ 0 \leq s \leq f\} \subset \{s \text{ elemi fgv.}: \ 0 \leq s \leq g\}$, amiből következik az állítás. Tegyük fel most, hogy $f \leq g$. Ekkor $f^+ \leq g^+$ és $f^- \geq g^-$, így a nemnegatív esetre belátott egyenlőtlenségek alapján

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \leq \int_E g^+ \, d\mu - \int_E g^- \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

4. A 3. állítás következménye.

5. A 4. pontból következik.

6. Az $f = f^+ - f^-$ integrálható az E-n, akkor $f^+, f^- \in \mathcal{L}(E,\mu)$, és ezért a 2. állítás alapján $|f| = f^+ + f^-$ is végesen integrálható az E-n. Ezért a 4. állítást a $-|f| \leq f \leq |f|$ egyenlőtlenséggel alkalmazva következik az állítás.

7. Az előző ponthoz hasonlóan látható be.

8. Legyen először $f = \chi_E$ valamely $E \in \mathcal{M}$-re. Ekkor

$$\int_A f \, d\mu = \int_A \chi_E \, d\mu = \mu(A \cap E) = \mu((A \cap E) \cap B) = \int_B \chi_{A\cap E} \, d\mu = \int_B \chi_E \chi_A \, d\mu = \int_B f \chi_A \, d\mu.$$

Ha $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ mérhető elemi függvény, akkor

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_A \chi_{E_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_B \chi_{E_i} \chi_A \, d\mu = \int_B \left(\sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} \right) \chi_A \, d\mu = \int_B f \chi_A \, d\mu.$$

Ha $0 \leq f$ mérhető függvény, akkor az

$$\left\{ \int_A s \, d\mu \colon \ 0 \leq s(x) \leq f(x), \ x \in A, \ s \text{ elemi fgv.} \right\}$$
$$= \left\{ \int_B s \chi_A \, d\mu \colon \ 0 \leq s(x)\chi_A(x) \leq f(x)\chi_A(x), \ x \in B, \ s \text{ elemi fgv.} \right\}$$

összefüggés mindkét oldalának suprémumát véve következik az állítás. Az általános esetben pedig a nemnegatív esetre már belátott eredmény alapján

$$\int_A f \, d\mu = \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu = \int_B f^+ \chi_A \, d\mu - \int_B f^- \chi_A \, d\mu = \int_B f \chi_A \, d\mu.$$

9. Mivel $f(x)\chi_A(x) \leq f(x)\chi_B(x)$ minden $x \in B$-re, ezért a 3. és 8. pontot felhasználva kapjuk az állítást.

10. Ha A és B diszjunkt, akkor $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, ezért a 2. és 8. pontból következik az állítás. $\square$

Ismert, hogy ha az f_n Riemann-integrálható függvények egyenletesen konvergálnak az f függvényhez az $[a,b]$ intervallumon, akkor az f határérték függvény is Riemann-integrálható, valamint $\int_a^n f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$. A következőkben megmutatjuk, hogy hasonló tulajdonság a mérték szerinti integrálásra enyhébb feltételek mellett is teljesül. Első ilyen eredényünk a következő tétel.

3.101. Tétel (Lebesgue monoton konvergencia tétele). *Legyen $E \in \mathcal{M}$, és legyen (f_n) nemnegatív, mérhető függvények monoton növekvő sorozata, azaz*

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \quad (x \in E),$$

és legyen

$$f\colon E \to \mathbb{R}_b, \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

Bizonyítás:

A feltételekből és a 3.100. Tétel 3. pontjából következik $\int_E f_n\,d\mu \le \int_E f_{n+1}\,d\mu$ minden n-re, ezért a $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu$ (nem szükségképpen véges) határtérték létezik. Másrészt $\int_E f_n\,d\mu \le \int_E f\,d\mu$ is teljesül, így

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \le \int_E f\,d\mu.$$

Ha valamely n-re $\int_E f_n\,d\mu = \infty$, akkor $\int_E f\,d\mu = \infty$ is következik, így a tétel állítása teljesül. Feltehetjük tehát, hogy minden n-re $\int_E f_n\,d\mu < \infty$. De ekkor egy tetszőleges $0 \le s^* \le f_n$ egyszerű függvényre is $\int_E s^*\,d\mu < \infty$, ezért $\mu(\{x\colon\ s^*(x) \ne 0\}) < \infty$.

A fordított becslés igazolásához rögzítsünk egy olyan s egyszerű függvényt, hogy $0 \le s \le f$ az E-n, és definiáljuk az $A = \{x \in E\colon\ s(x) = 0\}$ és $B = \{x \in E\colon\ s(x) \ne 0\}$ halmazokat. Nyilván $A \cup B = E$, és az előzőek szerint $\mu(B) < \infty$. Legyen egy tetszőleges $0 < c < 1$ és $\varepsilon > 0$ is rögzítve. Definiáljuk az $M = \max\{s(x)\colon\ x \in E\}$ konstanst és a

$$B_n = \{x \in B\colon\ cs(x) \le f_n(x)\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

halmazokat. Ekkor a feltételekből következően

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \qquad \text{és} \qquad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

A 3.24. Tétel szerint $\mu(B_n) \to \mu(B)$, így $\mu(B \setminus B_n) = \mu(B) - \mu(B_n) \to 0$. Legyen n_0 olyan, hogy $\mu(B \setminus B_{n_0}) < \varepsilon/M$. Ekkor

$$\int_E s\,d\mu \;=\; \int_A s\,d\mu + \int_{B_{n_0}} s\,d\mu + \int_{B\setminus B_{n_0}} s\,d\mu$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{B_{n_0}} \frac{1}{c} f_{n_0}\,d\mu + \int_{B\setminus B_{n_0}} M\,d\mu \\
&\leq \frac{1}{c}\int_E f_{n_0}\,d\mu + M\mu(B\setminus B_{n_0}) \\
&\leq \frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mivel $0 < c < 1$ és $\varepsilon >$ tetszőleges volt, így ha most $c \to 1-$ és $\varepsilon \to 0+$, akkor a fenti egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\int_E s\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu.$$

De s is a $0 \leq s \leq f$ egyenlőtlenségeket teljesítő tetszőleges egyszerű függvény volt, így a bal oldal supremumát véve

$$\int_E f\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu$$

adódik. Ezzel a tétel bizonyítása teljes. □

3.102. Megjegyzés. A 3.88. Tétel szerint bármely nemnegatív mérhető f függvény előállítható egyszerű függvények monoton sorozatának határértékeként: $s_n \to f$. De ekkor a Lebesgue monoton konvergencia tétel szerint $\int_E s_n\,d\mu \to \int_E f\,d\mu$. Ezért a mérték szerinti integrálás definiálásának van olyan tárgyalási módja, ahol elemi függvények monoton sorozatai segítségével, azok integráljai határértékeként definiálják a nemnegatív mérhető függvények mérték szerinti integrálját.

A következő példa mutatja, hogy a Riemann-integrálra általában nem teljesül a Lebesgue-féle monoton konvergencia tétel.

3.103. Példa. Legyen $r_1, r_2, \ldots$ a $[0,1]$ intervallumba eső racionális számok egy sorozatba rendezése, és definiáljuk az

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \{r_1,\ldots,r_n\}, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvényt a $[0,1]$-en. Ekkor véges sok pont kivételével a függvény egyenlő 0-val, ezért f_n Riemann-, és így Lebesgue-integrálható is, továbbá $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$. Az f_n függvénysorozat nemnegatív, monoton növő függvénysorozat. Továbbá létezik az $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határtérték, mégpedig $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, ami a 3.98. Példa szerint nem Riemann-integrálható. Lebesgue monoton konvergencia tétele alapján viszont az f függvény Lebesgue-integrálható és $\int_0^1 f\,dm = 0$. Valóban, $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\,dm = m(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0$. □

Azt, hogy a 3.101. Tételben a monoton növekedést nem lehet monoton csökkenésre kicserélni, láthatjuk a következő példából.

3.104. Példa. Legyen

$$f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f_n(x)=\begin{cases}0, & x<n,\\ 1, & x\ge n.\end{cases}$$

Ekkor f_n monoton csökkenő függvénysorozat, amely pontonként tart az azonosan 0 függvényhez, $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n\,dm=\infty$, viszont $\int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} f_n\,dm=0$. □

Az előző tételt alkalmazva a végtelen sor részletösszegeire rögtön kapjuk a következő eredményt.

3.105. Következmény. *Legyen $E\in\mathcal{M}$, (f_n) nemnegatív, mérhető függvények sorozata és $f\colon E\to\mathbb{R}_b$ olyan, hogy*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\qquad x\in E\text{-re}.$$

Ekkor f mérhető, és

$$\int\limits_E f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_E f_n\,d\mu.$$

A Riemann-integrálok egyik alaptulajdonsága, hogy $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$, amit úgy szoktak röviden mondani, hogy az integrál additív a tartományban. A 3.100. Tételben láttuk, hogy a mérték szerinti integrál szintén rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, sőt, a Lebesgue-féle monoton konvergencia tétel segítségével megmutatjuk, hogy az integrál σ-additív is a tartományban.

3.106. Tétel. *Legyen $f,g\colon X\to\mathbb{R}_b$ mérhető függvény.*

1. *Definiáljuk a*

$$\Phi\colon \mathcal{M}\to\mathbb{R}_b,\qquad \Phi(E)=\int\limits_E f\,d\mu$$

halmazfüggvényt. Ekkor Φ σ-additív az $\mathcal{M}$ σ-algebrán. Ha ezenkívül $f\ge 0$, akkor Φ mérték $\mathcal{M}$-en.

2. *Ha $\mu(E)=0$ és f mérhető E-n, akkor*

$$\int\limits_E f\,d\mu=0.$$

3. *Ha $f(x)=g(x)$ μ-m.m. $x\in E$-re, akkor*

$$\int\limits_E f\,d\mu=\int\limits_E g\,d\mu.$$

4. *Ha $A,B\in\mathcal{M}$ olyan, hogy $\mu(A\triangle B)=0$, akkor*

$$\int\limits_A f\,d\mu=\int\limits_B f\,d\mu.$$

Bizonyítás:

1. Legyen $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$ páronként diszjunkt, legyen $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ekkor

$$\chi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n},$$

és így a 3.100. Tétel 8. pontja és a 3.105. Következmény szerint

$$\Phi(E) = \int_E f\,d\mu = \int_X f\chi_E\,d\mu = \int_X f \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f\chi_{E_n}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n).$$

2. Ha $|f| \le M$, akkor a 3.100. Tétel 8. pontját használva

$$\left| \int_E f\,d\mu \right| \le M\mu(E) = 0.$$

Ha f nem korlátos, de $|f(x)| < \infty$ minden $x \in E$-re, akkor definiáljuk az $A_n = \{x \in E : |f(x)| \le n\}$ halmazokat és a $B_1 = A_1 \cap E$, $B_n = (A_n \setminus A_{n-1}) \cap \mathrm{E}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ halmazokat. Ekkor $B_1, B_2, \ldots$ páronként diszjunkt, mérhető halmazok és $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_i = E$, valamint $\mu(B_n) = 0$ minden n-re. Ezért az integrál tartományra vonatkozó σ-additivitása és a korlátos esetre megmutatott eredmény alapján

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n} f\,d\mu = 0.$$

Most tekintsük az általános f esetét. Legyen $A = \{x \in E\colon |f(x)| < \infty\}$. Ekkor

$$\int_E f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_{E\setminus A} f\,d\mu,$$

így a 3.93. Példát, a $\mu(E \setminus A) = 0$ összefüggést és a véges eset alkalmazva adódik az állítás.

3. Legyen $A = \{x \in E\colon f(x) = g(x)\}$. Ekkor $\mu(E \setminus A) = 0$, így a 2. pont miatt

$$\int_E f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_{E\setminus A} f\,d\mu = \int_A g\,d\mu = \int_A g\,d\mu + \int_{E\setminus A} g\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

4. Az előző bizonyítás mintájára belátható. □

3.107. Példa. Számítsuk ki az $\int_{[0,1]} f\,dm$ Lebesgue-integrált, ahol

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2x - 3, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mivel $m([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0$, az f függvény és a $g(x) = 2x - 3$ függvény majdnem mindenütt megegyezik. Ezért az előző tétel 3. pontja szerint és a 3.97. Tétel szerint az integrált visszavezethetjük Riemann-integrál számolására:

$$\int_{[0,1]} f\,dm = \int_{[0,1]} g\,dm = \int_0^1 (2x - 3)\,dx = -2.$$

□

3.108. Tétel (Fatou lemmája). *Tegyük fel, hogy $E \in \mathcal{M}$, (f_n) nemnegatív mérhető függvények sorozata, és legyen $f\colon E \to \mathbb{R}_b$ olyan, hogy*

$$f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad x \in E.$$

Ekkor f mérhető és

$$\int_E f\,d\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

Bizonyítás: f mérhetősége a 3.78. Tételből következik. Legyen $g_n(x) = \inf\{f_i(x) : i \ge n\}$. Ekkor

$$0 \le g_1(x) \le g_2(x) \le \cdots \qquad \text{és} \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

Továbbá $g_n \le f_n$, emiatt $\int_E g_n\,d\mu \le \int_E f_n\,d\mu$, és így Lebesgue monoton konvergencia tételét használva

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\,d\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_E f_n\,d\mu.$$

□

3.109. Tétel (Lebesgue "nagy" konvergenciatétele). *Tegyük fel, hogy $E \in \mathcal{M}$. Legyen (f_n) mérhető függvények olyan sorozata, amelyre*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in E\text{-re.}$$

Ha van olyan g függvény, hogy $g \in \mathcal{L}(E,\mu)$ és

$$|f_n(x)| \le g(x), \qquad x \in E\text{-re,}$$

akkor $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ és

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

Bizonyítás: A feltételek miatt $g - f_n \ge 0$, így a Fatou-lemmát alkalmazva

$$\int_E (g-f)\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E (g-f_n)\,d\mu = \int_E g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu,$$

tehát

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \le \int_E f\,d\mu.$$

A $g + f_n$ függvényre alkalmazva az előbbi számolást kapjuk, hogy

$$\int_E f\,d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \le \int_E f\,d\mu,$$

azaz az állítás teljesül. □

3.110. Következmény (Lebesgue "kis" konvergenciatétele). *Legyen $E \in \mathcal{M}$ olyan halmaz, amelyre $\mu(E) < \infty$, a mérhető függvények (f_n) sorozata egyenletesen korlátos az E-n, azaz van olyan $M > 0$, hogy $|f_n(x)| \le M$, $x \in E$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re, és $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Ekkor*

$$\int_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu.$$

Általános mérték szerinti integrálok kiszámolásához hasznos a következő állítás, amelynek igazolását az olvasóra bízzuk.

3.111. Tétel. *Legyen μ_1 és μ_2 mérték az $\mathcal{M}$ σ-algebrán, α_1 és α_2 pozitív konstansok. Legyen $f: X \to \mathbb{R}_b$ mérhető az $\mathcal{M}$ σ-algebra szerint, $E \in \mathcal{M}$. Ekkor $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ is mérték $\mathcal{M}$-en, továbbá*

$$\int_E f\, d(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) = \alpha_1 \int_E f\, d\mu_1 + \alpha_2 \int_E f\, d\mu_2.$$

A Riemann-integrálokra ismert eredmény általánosítása a következő tétel, amely a differenciálás és a Lebesgue-integrálás kapcsolatát vizsgálja. A bizonyítástól eltekintünk.

3.112. Tétel. *Legyen*

$$F\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_a^x f\, dm \quad (a \le x \le b)\,,$$

ahol $f \in \mathcal{L}([a,b])$, azaz $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ végesen Lebesgue-integrálható függvény. Ekkor

$$F'(x) = f(x), \qquad m.m.\ x \in [a,b]\text{-re.}$$

Megfordítva: ha egy $F : [a,b] \to R$ függvény az $[a,b]$ intervallum minden pontjában differenciálható és $F' \in \mathcal{L}([a,b])$, akkor

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'\, dm.$$

3.10. A Riemann–Stieltjes-integrál

Ebben a szakaszban a Riemann-integrál egy másik lehetséges kiterjesztését, a Riemann–Stieltjes-integrál fogalmát definiáljuk. Ez az integrálfogalom is fontos szerepet játszik például az analízis, valószínűségszámítás és a fizika több ágában is.

Legyenek $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ és $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvények. Tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ *beosztását.* A *beosztás finomsága* legyen $|P| \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x_{i+1} - x_i\colon i = 0, \ldots, n-1\}$. Minden intervallumból válasszunk egy $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ pontot. Ekkor a P beosztáshoz és a $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ *közbülső pontok* rendszeréhez definiáljuk az

$$S(f, G, P, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\, [G(x_{k+1}) - G(x_k)]$$

összeget, amelyet az *f függvény G függvényre vonatkozó Riemann–Stieltjes-féle integrál közelítő összegének* nevezünk. Ez az összeg a $G(x) = x$ ($x \in [a, b]$) esetben a Riemann-féle integrál közelítő összeggel egyezik meg.

3.113. Definíció. Ha létezik olyan I szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta > 0$, hogy az $[a, b]$ intervallum minden olyan P beosztásra, amelynek finomsága $|P| < \delta$ és az adott beosztáshoz tartozó tetszőleges ξ közbülső pontok rendszerére az $S(f, G, P, \xi)$ Riemann-Stieltjes közelítő összegre $|S(f, G, P, \xi) - I| < \varepsilon$ teljesül, akkor az f függvényt a G függvény szerint *Riemann–Stieljes-integrálható* függvénynek nevezzük, és az I számot az f függvény G-re vonatkozó *Riemann–Stieltjes-integráljának* nevezzük az $[a, b]$ intervallumon, és azt az

$$\int_a^b f(x)\, dG(x)$$

képlettel jelöljük. A G függvényre nézve az $[a, b]$ intervallumon Riemann–Stieltjes-integrálható függvények halmazát $\mathcal{L}_S([a, b], G)$-vel jelöljük.

3.114. Példa. Ha $G(x) = c$ konstans, akkor a definícióból rögtön következik, hogy tetszőleges f függvény Riemann–Stieltjes-integrálható G szerint és $\int_a^b f(x)\, dG(x) = 0$.

Ha $G(x) = x$, akkor a Riemann–Stieltjes-integrál megegyezik a Riemann-integrállal. Ha $G(x) = \alpha x + \beta$, akkor a definícióból könnyen következik, hogy ha f Riemann-integrálható, akkor a G függvény szerint Riemann–Stieltjes-integrálható is, és

$$\int_a^b f(x)\, dG(x) = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

Az is könnyen látható a definícióból, hogy bármely G függvényre

$$\int_a^b c\, dG(x) = c(G(b) - G(a)).$$

$\square$

3.115. Definíció. A G függvényt *korlátos változásúnak* nevezzük, ha felírható két monoton növekvő függvény különbségeként.

Speciálisan a monoton növekvő függvények is korlátos változású függvények, hiszen $g = g - 0$ alakban felírhatók. Hasonlóan, ha g monoton csökkenő, akkor korlátos változású is, hiszen $g = 0 - (-g)$. Ha $g = g_1 - g_2$, ahol g_1 és g_2 monoton csökkenő, akkor g korlátos változású is, hiszen $g = -g_2 - (-g_1)$.

Megmutatjuk, hogy folytonos f függvény mindig Riemann–Stieltjes-integrálható egy korlátos változású G függvény szerint.

3.116. Tétel. *Legyen $f, G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, ahol f folytonos, G pedig korlátos változású. Ekkor f Riemann–Stieltjes-integrálható a G függvény szerint az $[a, b]$ intervallumon.*

Bizonyítás:

1. Tegyük fel először, hogy G monoton növő. Feltehetjük ekkor azt is, hogy $G(b) > G(a)$, hiszen egyébként G konstans függvény volna, amire az állítás teljesül. Legyen

$$m_i = \min_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) \qquad \text{és} \qquad M_i = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x), \qquad i = 0, \dots, n-1.$$

Definiáljuk az

$$\underline{S}(f,G,P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} m_k \left[G(x_{k+1}) - G(x_k)\right] \qquad \text{és} \qquad \overline{S}(f,G,P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} M_k \left[G(x_{k+1}) - G(x_k)\right],$$

ú.n. *Riemann–Stieltjes-féle alsó és felső integrál közelítő összegeket.* Ekkor G monotonitása miatt

$$\underline{S}(f,G,P) \le S(f,G,P,\xi) \le \overline{S}(f,G,P), \tag{3.11}$$

ami egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\sup_P \underline{S}(f,G,P) \le \inf_P \overline{S}(f,G,P),$$

ahol a supremumot ill. infimumot az összes beosztásra vesszük.

Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Az f függvény folytonos, ezért egyenletesen is folytonos az $[a,b]$-n, azaz $\varepsilon/(G(b)-G(a))$-hoz is található olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x-\tilde{x}| < \delta$, akkor $|f(x)-f(\tilde{x})| < \varepsilon/(G(b)-G(a))$. Vegyünk egy tetszőleges olyan P beosztást, amelyre $|P| < \delta$. Ekkor

$$M_k - m_k = \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} \{f(x)\} - \min_{x_k \le x \le x_{k+1}} \{f(x)\} < \frac{\varepsilon}{G(b)-G(a)}, \qquad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

így ehhez a felosztáshoz tartozó alsó és felső Riemann–Stieltjes-összegekre

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,G,P) - \underline{S}(f,G,P) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\left[G(x_{k+1}) - G(x_k)\right] \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{G(b)-G(a)} \left[G(x_{k+1}) - G(x_k)\right] \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy

$$\inf_P \overline{S}(f,G,P) = \sup_P \underline{S}(f,G,P),$$

de ekkor (3.11) miatt a Riemann–Stieltjes-féle közelítő összeg is konvergens és

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \inf_P \overline{S}(f,G,P) = \sup_P \underline{S}(f,G,P).$$

2. Ha G monoton csökkenő, akkor $-G$ monoton növő, és minden P-re és ξ-re $S(f,G,P,\xi) = -S(f,-G,P,\xi)$, ezért az 1. pont szerint $f \in \mathcal{L}_S([a,b],-G)$, így $f \in \mathcal{L}_S([a,b],G)$ is teljesül, és

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = -\int_a^b f(x)\,d(-G(x)).$$

3. Ha $G = G_1 - G_2$ alakú, ahol G_1 és G_2 monoton függvények, akkor minden P-re és ξ-re

$$S(f,G,P,\xi) = S(f,G_1-G_2,P,\xi) = S(f,G_1,P,\xi) - S(f,G_2,P,\xi),$$

ezért ha $|P| \to 0$ kapjuk, hogy $f \in \mathcal{L}_S([a,b],G)$, továbbá

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \int_a^b f(x)\,dG_1(x) - \int_a^b f(x)\,dG_2(x).$$

□

Ahogy az az előző tétel bizonyításából is látható, a Riemann–Stietjes-integrál tulajdonságai hasonlók a Riemann-integrál tulajdonságaihoz. A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

3.117. Állítás. *Legyen* $f, f_1, f_2, G, G_1, G_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

1. *Tegyük fel, hogy az* $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_S([a,b], G)$. *Ekkor* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{L}_S([a,b], G)$, *és*
$$\int_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\, dG(x) = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dG(x) + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\, dG(x).$$

2. *Legyen* $G = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$, *és tegyük fel, hogy* $f \in \mathcal{L}_S([a,b], G_1)$ *és* $f \in \mathcal{L}_S([a,b], G_2)$. *Ekkor* $f \in \mathcal{L}_S([a,b], G)$, *továbbá*
$$\int_a^b f(x)\, dG(x) = \lambda_1 \int_a^b f(x)\, dG_1(x) + \lambda_2 \int_a^b f(x)\, dG_2(x).$$

3. *Legyen* $a < c < b$, *és tegyük fel, hogy* $f \in \mathcal{L}_S([a,c], G) \cap \mathcal{L}_S([c,b], G)$. *Ekkor* $f \in \mathcal{L}_S([a,b], G)$, *és*
$$\int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^c f(x)\, dG(x) + \int_c^b f(x)\, dG(x).$$

4. *Tegyük fel, hogy* G *monoton függvény az* $[a,b]$*-n,* $|f(x)| \le M$ *az* $[a,b]$*-n, és* $f \in \mathcal{L}_S([a,b], G)$. *Ekkor*
$$\left| \int_a^b f(x)\, dG(x) \right| \le M |G(b) - G(a)|.$$

A következő állítás szerint bizonyos speciális függvénytípusok korlátos vátozású függvények.

3.118. Állítás. *A következő függvények korlátos változásúak* $[a,b]$*-n:*

1. $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *olyan, hogy* G *folytonosan differenciálható* $[a,b]$*-n.*

2. G *lépcsős függvény* $[a,b]$*-n.*

3. G *szakaszonként folytonosan differenciálható* $[a,b]$*-n (az 1.6. Definíció értelmében).*

Bizonyítás:

1. A 3.112. Tételt alkalmazva (a Lebesgue-integrál ebben az esetben a Riemann-integrállal megegyezik) kapjuk, hogy
$$G(x) = G(a) + \int_a^x G'(t)\, dt.$$
Ekkor $G = G_1 - G_2$, ahol
$$G_1(x) = G(a) + \int_a^x [G'(t)]^+\, dt, \qquad \text{és} \qquad G_2(x) = \int_a^x [G'(t)]^-\, dt$$
monoton nemcsökkenő függvények $[a,b]$-n, hiszen $G_1'(x) = [G'(x)]^+ \ge 0$ és $G_2'(x) = [G'(x)]^- \ge 0$.

2. Legyen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ olyan, hogy $G(x)$ konstans az $x \in (t_i, t_{i+1})$ intervallumokon. Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen
$$\alpha_i = G(t_i) - G(t_i-), \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \text{és} \qquad \beta_i = G(t_i+) - G(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, m-1$$

a G függvény bal és jobb oldali ugrásai a t_i pontokban (az intervallum végpontjaiban persze csak az egyik oldalról). Az egyszerűbb jelölés kedvéért vezessük be az $\alpha_0 = 0$ konstanst is. Ekkor a G függvény képletét felírhatjuk az ugrások segítségével a következő módon:

$$G(x) = \begin{cases} G(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_j + \beta_j) + \alpha_i, & x = t_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ G(t_0) + \sum_{j=0}^{i} (\alpha_j + \beta_j), & t_i < x < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

Definiáljuk a G_1 és G_2 függvényeket az ugrások pozitív ill. negatív részei segítségével:

$$G_1(x) = \begin{cases} G(t_0) + \sum_{j=0}^{i-1} ([\alpha_j]^+ + [\beta_j]^+) + [\alpha_i]^+, & x = t_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ G(t_0) + \sum_{j=0}^{i} ([\alpha_j]^+ + [\beta_j]^+), & t_i < x < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1, \end{cases}$$

és

$$G_2(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} ([\alpha_j]^- + [\beta_j]^-) + [\alpha_i]^-, & x = t_i, \quad i = 0, \dots, m, \\ \sum_{j=0}^{i} ([\alpha_j]^- + [\beta_j]^-), & t_i < x < t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

Ekkor nyilván G_1 és G_2 monoton nemcsökkenő függvények, és $G = G_1 - G_2$.

3. Legyen G olyan függvény, amelynek az $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ pontban van (pontosabban szólva lehet) szakadási pontja, és a $G(t_i+)$ ill $G(t_i-)$ egyoldali határtékek léteznek (az intervallum végpontjaiban csak egyik oldalról). Vezessük be az

$$u_i = G(t_i+) - G(t_i-), \qquad i = 1, \dots, m-1$$

ugrásokat, és legyen

$$F(x) = \begin{cases} G(t_0+), & x = t_0, \\ G(t_i+) - \sum_{j=1}^{i} u_j, & x = t_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ G(t_m-) - \sum_{j=1}^{m-1} u_j, & x = t_m, \\ G(x) - \sum_{j=1}^{i} u_j, & t_i < x < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases}$$

és $H(x) = G(x) - F(x)$. Ekkor F folytonos, és H lépcsős függvény, mivel $x \in (t_i, t_{i+1})$-re $H(x) = \sum_{j=1}^{i} u_j$. Mivel F a t_i pontok kivételével folytonosan differenciálható is (azaz F' m.m. létezik és folytonos), ezért a 3.112. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\, dt.$$

Így az 1. ponthoz hasonló módon belátható, hogy F korlátos változású. A H függvényről a 2. pont értelmében tudjuk, hogy korlátos változású, de ekkor az összegük is az. $\square$

A következő eredmények arra vonatkoznak, hogyan tudjuk az előző állításban vizsgált típusú G függvényekre kiszámítani a Riemann–Stieltjes-integrált.

3.119. Tétel. *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, és legyen*

1. *$G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \int_a^b f(x)G'(x)\,dx.$$

2. *$G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ lépcsős függvény az $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ szakadási pontokkal. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \sum_{i=0}^{m} f(t_i)[G(t_i+) - G(t_i-)],$$

ahol legyen $G(t_0-) = G(t_0)$ és $G(t_m+) = G(t_m)$.

3. *legyen $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, az $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ szakadási pontokkal, a G függvény (t_i, t_{i+1}) intervallumokra vett megszorítását jelölje G_i, és legyen $G(t_0-) = G(t_0)$ és $G(t_m+) = G(t_m)$. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)G_i'(x)\,dx + \sum_{i=0}^{m} f(t_i)[G(t_i+) - G(t_i-)].$$

Bizonyítás:
1. A 3.116. Tételből következik, hogy $f \in \mathcal{L}_S([a,b],G)$. Vegyünk egy tetszőleges $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ beosztását $[a,b]$-nek. Ekkor a Lagrange-féle középérték tétel miatt léteznek olyan $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ számok, hogy

$$G(x_{k+1}) - G(x_k) = G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Legyen $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$, és tekintsük az ezekhez a közbülső pontokhoz tartozó Riemann–Stieltjes-féle közelítő összeget. Ez a speciálisan választott Riemann–Stieltjes-féle közelítő összeg is tart az $\int_a^b f(x)\,dG(x)$ integrálhoz, ha $|P| \to 0$. Másrészt erre az összegre

$$S(f,G,P,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,[G(x_{k+1}) - G(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

azaz megegyezik az $f(x)G'(x)$ folytonos függvény egy Riemann-féle integrál közelítő összegével, ami konvergens ha $|P| \to 0$ és a határértéke $\int_a^b f(x)G'(x)\,dx$.

2. Az integrál tartományra vonatkozó additivitását alkalmazva

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\,dG(x).$$

Tekintsük a $[t_i, t_{i+1}]$ intervallumot, és definiáljuk a

$$H_1(x) = \begin{cases} G(t_i) - G(t_i+), & x = t_i, \\ 0, & t_i < x \le t_{i+1}, \end{cases} \qquad H_2(x) = G(t_i+), \quad t_i \le x \le t_{i+1},$$

és a

$$H_3(x) = \begin{cases} G(t_{i+1}) - G(t_{i+1}-), & x = t_{i+1}, \\ 0, & t_i \le x < t_{i+1} \end{cases}$$

függvényeket. Ekkor $G(x) = H_1(x) + H_2(x) + H_3(x)$, ezért

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\,dG(x) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\,dH_1(x) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\,dH_3(x),$$

hiszen H_2 konstans, így a rá vonatkozó Riemann–Stieltjes-integrál nulla. Legyen $t_i = x_0 < \cdots < x_n = t_{i+1}$ egy beosztása $[t_i, t_{i+1}]$-nek, $\xi = (\xi_0 \dots, \xi_{n-1})$ egy tetszőleges közbülső pontrendszer. Ekkor a H_1-re vonatkozó Riemann–Stieltjes-féle közelítő összeg

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[H_1(x_{k+1}) - H_1(x_k)] = f(\xi_0)[H_1(x_1) - H_1(x_0)].$$

Ha $|P| \to 0$, akkor kapjuk, hogy

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\, dH_1(x) = f(t_i)(H_1(t_i+) - H_1(t_i)] = f(t_i)(G(t_i+) - G(t_i)].$$

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\, dH_3(x) = f(t_{i+1})(G(t_{i+1}) - G(t_{i+1}-)].$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\, dG(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\, dG(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \Big(f(t_i)(G(t_i+) - G(t_i)] + f(t_{i+1})(G(t_{i+1}) - G(t_{i+1}-)] \Big) \\
&= \sum_{i=0}^{m} f(t_i)[G(t_i+) - G(t_i-)].
\end{aligned}$$

3. Az integrál tartományra vonatkozó additivitását és az 1. és 2. tulajdonságokat használva

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\, dG(x) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x)\, dG(x) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) G_i'(x)\, dx + f(t_i)[G(t_i+) - G(t_i)] + f(t_{i+1})[G(t_{i+1}) - G(t_{i+1}-)] \right) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) G_i'(x)\, dx + \sum_{i=0}^{m} f(t_i)(G(t_i+) - G(t_i-)).
\end{aligned}$$

□

3.120. Példa. Legyen

$$G(x) = \begin{cases} 4, & x = -2, \\ x^2 - 1, & -2 < x < -1, \\ 1, & x = -1, \\ 3x - 2, & -1 < x \le 1, \\ x^3 - 4x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Számítsuk ki az $\int_{-2}^{2} (x^2 + 5x)\, dG(x)$ integrált!

A G függvény szakadási pontjai $x = -2, -1$ és 1, így az előző tétel szerint

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(x^2+5x)\,dG(x) &= \int_{-2}^{-1}(x^2+5x)(x^2-1)'\,dx + \int_{-1}^{1}(x^2+5x)(3x-2)'\,dx \\ &\quad + \int_{1}^{2}(x^2+5x)(x^3-4x)'\,dx + \Big((-2)^2+5\cdot(-2)\Big)\Big(((-2)^2-1)-4\Big) \\ &\quad + \Big((-1)^2+5\cdot(-1)\Big)\Big((3\cdot(-1)-2)-((-1)^2-1)\Big) \\ &\quad + \Big(1^2+5\cdot 1\Big)\Big((1^3-4\cdot 1)-(3\cdot 1-2)\Big) \\ &= \int_{-2}^{-1}(x^2+5x)2x\,dx + \int_{-1}^{1}(x^2+5x)3\,dx + \int_{1}^{2}(x^2+5x)(3x^2-4)\,dx \\ &\quad +6+20-24 \\ &= \frac{95}{6}+2+\frac{2131}{60}+6+20-24 \\ &= \frac{1107}{20}.\end{aligned}$$

□

3.121. Példa. Legyen $f, G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = G(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Vegyük a $[0,1]$ egy tetszőleges $0 = x_0 < \cdots < x_n = 1$ beosztását és egy $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ közbülső pontrendszert. Ekkor f és G definíciója alapján

$$S(f,G,P,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,[G(x_{k+1}) - G(x_k)] = f(\xi_{n-1}).$$

De ekkor ha ξ olyan, hogy $\xi_{n-1} \neq 1$, akkor $S(f,G,P,\xi) = 0$, ha pedig $\xi_{n-1} = 1$, akkor $S(f,G,P,\xi) = 1$. Ezért a $\int_0^1 f(x)\,dG(x)$ a közelítő összegnek nem létezik a határértéke, azaz a Riemann–Stieltjes-integrál nem definiálható. □

A korlátos változású függvények egy jellemzését adja a következő tétel, amelyet bizonyítás nélkül tekintünk.

3.122. Tétel. *A $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor korlátos változású, ha létezik olyan M szám, hogy az $[a,b]$ intervallum bármely $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ beosztására*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |G(x_{k+1}) - G(x_k)| \leq M.$$

3.123. Definíció. Ha G korlátos változású $[a,b]$-n, akkor a

$$V_a^b(G) \overset{\text{def}}{=} \sup_P \sum_{k=0}^{n-1} |G(x_{k+1}) - G(x_k)|$$

számot (ahol a supremumot az $[a,b]$ összes beosztására vesszük) a G függvény $[a,b]$ intervallumra vonatkozó *teljes változásának* hívjuk.

A definícióból könnyen adódnak a teljes változás alábbi tulajdonságai:

3.124. Állítás. *Legyen G, G_1, G_2 korlátos változású függvények $[a,b]$-n. Ekkor*

1. *G konstans $[a,b]$-n, akkor és csak akkor, ha $V_a^b(G) = 0$;*
2. *ha G monoton $[a,b]$-n, akkor $V_a^b(G) = |G(b) - G(a)|$;*
3. *ha $a \le c \le b$, akkor $V_a^b(G) = V_a^c(G) + V_c^b(G)$;*
4. *$V_a^b(G_1 + G_2) \le V_a^b(G_1) + V_a^b(G_2)$;*
5. *minden $c \in \mathbb{R}$-re $V_a^b(cG) = |c|V_a^b(G)$.*

A teljes változás fogalma segítségével általánosíthatjuk a 3.117. Állítás 4. pontját, amely a Riemann–Stieltjes-integrál becslésére vonatkozik. A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

3.125. Állítás. *Tegyük fel, hogy G korlátos változású függvény az $[a,b]$-n, $|f(x)| \le M$ az $[a,b]$-n, és $f \in \mathcal{L}_S([a,b], G)$. Ekkor*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dG(x) \right| \le M V_a^b(G).$$

3.11. A Lebesgue- és a Riemann–Stieltjes-integrál kapcsolata és egy valószínűségszámítási alkalmazás

Legyen $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ egy valószínűségi mező, azaz egy olyan speciális mértéktér ahol

$$P(\Omega) = 1, \quad \text{továbbá} \quad P(A) \ge 0, \quad A \in \mathcal{M}.$$

Ebből világos, hogy

$$P(\emptyset) = 0 \qquad \text{és} \qquad 0 \le P(A) \le 1, \quad A \in \mathcal{M}.$$

A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt *valószínűségi változónak* nevezzük, ha ξ mérhető. A ξ valószínűségi változó *várható értéke* alatt az

$$M(\xi) = \int_\Omega \xi\, dP$$

mennyiséget értjük, feltéve, hogy $M(\xi)$ véges. Legyen ξ korlátos függvény, azaz van olyan $k, K \in \mathbb{R}$, hogy $k < \xi(\omega) < K$, $\omega \in \Omega$. Ekkor

$$k = kP(\Omega) \le M(\xi) \le KP(\Omega) = K,$$

azaz ξ-nek létezik a várható értéke. (Ha speciálisan $\xi(\omega) = c,\ \omega \in \Omega$, akkor $M(\xi) = c$.)

Vizsgáljuk tovább azt az esetet, amikor ξ korlátos és így $k < \xi(\omega) < K$, $\omega \in \Omega$. Legyen $k = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = K$ és legyen

$$A_i = \{\omega \in \Omega\colon\ x_{i-1} \le \xi(\omega) < x_i\}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Ekkor

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{továbbá} \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j.$$

Így

$$M(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \xi dP,$$

és ezért

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} P(A_i) \leq M(\xi) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i).$$

3.126. Definíció. A $\xi \colon \Omega \to R$ valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* az

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega \colon \xi(\omega) < x\}), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvényt nevezzük.

Az F függvény monoton nem csökkenő és

$$P(A_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

ugyanis

$$\begin{aligned} P(A_i) &= P(\{\omega \in \Omega \colon x_{i-1} \leq \xi(\omega) < x_i\}) \\ &= P(\{\omega \in \Omega \colon \xi(\omega) < x_i\} \setminus \{\omega \in \Omega \colon \xi(\omega) < x_{i-1}\}) = F(x_i) - F(x_{i-1}). \end{aligned}$$

Tehát

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \leq M(\xi) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Ha most a $[k, K]$ intervallum $(x_0, \ldots, x_n)$ beosztását minden határon túl finomítjuk, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \to \int_{k}^{K} x \, dF(x)$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} x_i [F(x_i) - F(x_{i-1})] \to \int_{k}^{K} x \, dF(x).$$

Másrészt $F(x) = 0$ ha $x \leq k$ és $F(x) = 1$ ha $x > K$. Tehát

$$\lim_{\substack{k \to -\infty \\ K \to +\infty}} \int_{k}^{K} x \, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

és így a várható érték kiszámítására két kiszámítási módot is kapunk:

$$M(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Ez az összefüggés kapcsolatot teremt a valószínűségi mérték szerinti integrál és az eloszlásfüggvény szerinti Riemann–Stieltjes-integrál között.

3.127. Megjegyzés.
(a) A ξ valószínűségi változót *diszkrét valószínűségi változónak* nevezzük, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz

$$\mathrm{Im}(\xi) = \{c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots\}, \quad \text{ahol} \quad c_1 < c_2 < \cdots < c_m < \cdots.$$

Ekkor

$$P(\{\omega \in \Omega\colon\ \xi(\omega) = c_i\}) = p_i, \qquad 0 \le p_i \le 1,$$

és így

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i c_i.$$

(b) A ξ valószínűségi változót *folytonos valószínűségi változónak* nevezzük, ha az eloszlásfüggvénye $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad (x \in \mathbb{R})$ alakú, ahol f vagy Riemann- vagy Lebesgue-integrálható. Az f függvényt a valószínűségi változó *sűrűségfüggvényének* hívjuk. Ekkor

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \left(= \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) \right),$$

ahol az improprius integrál definíciója:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \lim_{\substack{k\to-\infty \\ K\to+\infty}} \int\limits_{k}^{K} x f(x)dx.$$

3.128. Példa. A ξ valószínűségi változót *egyenletes eloszlásúnak* nevezzük a $[k, K]$ intervallumon, ha eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x > K, \\ \frac{x-k}{K-k}, & k \le x \le K, \\ 0, & x < k. \end{cases}$$

Ekkor a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{K-k}, & k < x < K, \\ 0, & x < k \ \text{ vagy } \ x > K \end{cases}$$

lesz, a várható értéke pedig

$$M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int\limits_{k}^{K} \frac{x}{K-k}dx = \frac{1}{K-k}\frac{K^2-k^2}{2} = \frac{K+k}{2}.$$

□