5. Absztrakt terek elmélete

5.1. Lineáris terek

5.1. Definíció. Az X halmazt *lineáris térnek* vagy *vektortérnek* nevezzük a valós számtest (komplex számtest) felett, ha bármely $x, y \in X$ elemekre és $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) skaláris értékre az

$$(x, y) \longmapsto x + y \in X \qquad \text{és} \qquad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \in X$$

műveletek értelmezve vannak, és amelyekre teljesülnek a következő axiómák:

1. $x + y = y + x$ (kommutativitás), $x, y \in X$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asszociativitás), $x, y, z \in X$;
3. van olyan Θ nullelem (zéruselem), hogy $\Theta \in X$ és $x + \Theta = x$ minden $x \in X$-re, (a következőkben Θ helyett általában egyszerűen a 0 jelölést használjuk);
4. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), $\quad x, y \in X$;
5. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$), $\quad x \in X$;
6. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$), $\quad x \in X$;
7. $0 \cdot x = \Theta$ és $1 \cdot x = x$, $\quad (0, 1 \in \mathbb{R})$, $\quad x \in X$.

A valós számtest feletti lineáris teret röviden *valós lineáris térnek* (*valós vektortérnek*), a komplex számtest feletti lineáris teret pedig *komplex lineáris térnek* (*komplex vektortérnek*) is nevezzük. A lineáris tér elemeit *vektoroknak* vagy *pontoknak* is nevezzük.

Az x vektor -1-szeresét $-x$-szel jelöljük. Az x és y vektorok különbsége alatt az $x + (-y)$ összeget értjük és $x - y$ -nal jelöljük.

5.2. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ valós ($\mathbb{C}^n$ komplex) szám-n-esek halmaza valós (komplex) lineáris tér a következő műveletekkel: Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ valós (komplex) szám-n-es, és λ valós (komplex) szám. Ekkor definíció szerint

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \text{és} \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\,.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek a műveletek teljesítik a lineáris tér tulajdonságait. □

5.3. Példa. Jelöljük $\mathbb{R}^\infty$-nel a valós (végtelen) számsorozatok halmazát, azaz $x \in \mathbb{R}^\infty$, ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Ekkor $\mathbb{R}^\infty$ lineáris tér a szokásos műveletekkel: legyen

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \qquad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ekkor definíció szerint

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots) \qquad \text{és} \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots).$$

Ezt a lineáris teret a valós számsorozatok lineáris terének nevezzük. Nyilván a komplex számsorozatok $\mathbb{C}^\infty$-nel jelölt halmaza hasonló módon (komplex) lineáris teret képez. □

5.4. Példa. Jelölje $C([a,b],\mathbb{R})$ az $[a,b]$ intervallumon értelemezett valós értékű folytonos függvények halmazát. Ezen a halmazon bevezetjük a következő műveleteket: Ha $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, akkor $f+g$ jelöli azt az $[a,b]$-n definiált függvényt, amelyet az $(f+g)(t)=f(t)+g(t)$ képlettel definiálunk. Hasonlóan, $\lambda\in\mathbb{R}$-ra λf az az $[a,b]$-n értelmezett függvény, amelyet a $(\lambda f)(t)=\lambda f(t)$ képlettel értelmezünk. Mivel folytonos függvények összege és konstansszorosa is folytonos függvény, ezért $f+g,\lambda f\in C([a,b],\mathbb{R})$, és ellenőrizhető, hogy az összeadás és a skaláris számmal való szorzás teljesítik az 5.1. Definíció mind a 7 követelményét, azaz $C([a,b],\mathbb{R})$ valós lineáris tér.

Hasonló módon definiálhatjuk a $C([a,b],\mathbb{C})$-t, az $[a,b]$ intervallumon értelemezett komplex értékű folytonos függvények halmazát, amely lineáris tér a komplex számtest felett. □

5.5. Példa. Jelölje $C^k([a,b],\mathbb{R})$ az $[a,b]$ intervallumon értelemezett, k-szor folytonosan differenciálható valós függvények halmazát. Az előző példához hasonlóan megmutatható, hogy ez a halmaz is lineáris tér az összeadás és a skaláris számmal való szorzás műveletekkel.

Jelölje $C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ az akárhányszor differenciálható, $[a,b]$-n értelmezett valós függvények halmazát, amely szintén lineáris tér. □

5.6. Példa. Ha az 5.4. Példában definiált $C([a,b],\mathbb{R})$ folytonos valós függvények lineáris terének vesszük azt az Y részhalmazát, amely az $[a,b]$ intervallumon értelmezett nemnegatív folytonos valós függvényeket tartalmazza, akkor Y nem lineáris tér, hiszen az összeadásra ugyan zárt lesz, de ha Y egy (nem nulla) elemét egy negatív skaláris számmal szorozzuk, az már nem lesz eleme Y-nak. □

5.7. Definíció. Egy X lineáris tér Y részhalmazát lineáris *altérnek* nevezzük, ha Y maga is lineáris tér az X-en bevezetett összeadás és skaláris szorzás műveletekre nézve. Tehát ha $x,y\in Y$, akkor $x+y\in Y$, és ha $\lambda\in\mathbb{R}$ ($\lambda\in\mathbb{C}$), akkor $\lambda x\in Y$.

5.8. Példa. Legyen $C([a,b],\mathbb{R})$ az 5.4. Példában definiált folytonos valós függvények lineáris tere. Ekkor könnyen láthaló, hogy $C([a,b],\mathbb{R})$-nek altere lesz az $Y=\{f\in C([a,b],\mathbb{R})\colon\ f(a)=0\}$ halmaz. □

5.9. Példa. Könnyen látható, hogy a

$$C([a,b],\mathbb{R})\supset C^1([a,b],\mathbb{R})\supset C^2([a,b],\mathbb{R})\supset C^3([a,b],\mathbb{R})\supset\cdots\supset C^\infty([a,b],\mathbb{R})$$

tartalmazások teljesülnek, és a fenti tartalmazásláncban szereplő szűkebb halmaz a láncban szereplő bővebb lineáris tér altere. □

5.10. Példa. Legyen Y azon részhalmaza $\mathbb{R}^\infty$-nek, amelyek a konvergens sorozatokból állnak. Mivel bármely két konvergens sorozat összege illetve konstansszorosa is konvergens, ezért Y altér $\mathbb{R}^\infty$-ben. □

5.11. Definíció. Az $x,y\in X$ elemek *lineáris kombinációja* alatt a $\lambda x+\mu y$ alakú elemet értjük, ahol λ,μ skaláris szám (azaz valós vagy komplex szám). Hasonlóan, az $x_1,\dots,x_n\in X$ elemek lineáris kombinációja alatt az $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ összeget értjük, ahol $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ skaláris számok.

Az $x_1, \ldots, x_n \in X$ elemeket *lineárisan összefüggőnek* nevezzük, ha vannak olyan nem csupa nulla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skaláris számok, hogy $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Ellenkező esetben az $x_1, \ldots, x_n$ elemeket *lineárisan függetleneknek* nevezzük. (Ha tehát $x_1, \ldots, x_n$ lineárisan független, akkor $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$-ból következik, hogy $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.)

A $\mathcal{H} \subset X$ halmazt *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha minden véges részhalmaza lineárisan független.

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{H} \subset X$ *előállítja* (*generálja, kifeszíti*) az X lineáris teret, ha az X minden vektora a $\mathcal{H}$ elemeinek (véges) lineáris kombinációja.

5.12. Példa. Definiáljuk az $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ szám-n-eseket, és legyen $\mathcal{H} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Ekkor a $\mathcal{H}$ halmaz előállítja az $\mathbb{R}^n$ lineáris teret, hiszen egy tetszőleges $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorra $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots x_n e_n$. □

5.13. Példa. A $C([a, b], \mathbb{R})$ folytonos függvények terében jelölje Y a legfeljebb n-edfokú polinomok halmazát. Ekkor Y nyilván lineáris altér, mivel két legfeljebb n-edfokú polinom összege is egy legfeljebb n-edfokú polinom, valamint egy legfeljebb n-edfokú polinom konstansszorosa is legfeljebb n-edfokú polinom. Legyen $\mathcal{H} = \{1, t, \ldots, t^n\}$ a legfeljebb n-edfokú hatványfüggvények halmaza. Ekkor ellenőrizhető, hogy az $1, t, \ldots, t^n$ polinomok lineárisan függetlenek, másrészt előállítják az Y alteret, hiszen $p \in Y$ akkor és csak akkor, ha $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_n t^n$.

Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett összes polinomok halmaza ugyancsak lineáris altér, azonban ennek a halmaznak az elemeit a megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmazó $\mathcal{H} = \{1, t, \ldots, t^n, \ldots\}$ halmaz állítja elő. □

5.14. Példa. Tekintsük a végtelen valós számsorozatok $\mathbb{R}^\infty$ lineáris terét. Jelölje e_i azt a végtelen valós számsorozatot, amelynek i-edik eleme 1, a többi 0, azaz

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0, 0 \ldots), \\
e_2 &= (0, 1, 0, 0 \ldots), \\
e_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots), \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

és legyen $\mathcal{H} = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Ekkor $\mathcal{H}$ megszámlálható részhalmaza $\mathbb{R}^\infty$-nek, és a $\mathcal{H}$ halmaz lineárisan független. Másrészt $\mathcal{H}$ azt a Y alteret állítja elő $\mathbb{R}^\infty$-ben, amely azon sorozatokat tartalmazza, amelyekben véges sok elem kivételével csupa 0 áll. Valóban, a $\mathcal{H}$-beli elemek (véges) lineáris kombinációjával csak olyan sorozatot kapunk, amelyben véges sok tag kivételével minden tag 0. Fordítva, ha $x \in Y$ olyan, hogy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, és minden $x_i = 0$, ha $i > n$, akkor $x = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n$. □

Lineáris algebrából ismert a következő állítás.

5.15. Állítás. *Ha $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ véges lineárisan független halmazok, és mindketten előállítják az X lineáris teret, akkor $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ számossága megegyezik.*

5.16. Definíció. A $\mathcal{H}$ halmazt az X lineáris tér *bázisának* nevezzük, ha $\mathcal{H}$ előállítja az X lineáris teret. Ha az X lineáris tér egy $\mathcal{H}$ bázisa csak véges sok vektort tartalmaz, akkor azt mondjuk, hogy az X lineáris tér *véges dimenziós*, és a $\mathcal{H}$ elemeinek a számát az X lineáris tér *dimenziójának* hívjuk. Ha az X lineáris térnek nincs véges bázisa, akkor X-et *végtelen dimenziós* lineáris térnek nevezzük.

Az 5.15. Állítás szerint egy véges dimenziós lineáris tér dimenziója egyértelműen meghatározott. Végtelen dimenziós terekben is megmutatható, hogy mindig létezik bázis, de ezzel ebben a jegyzetben nem foglalkozunk.

5.17. Példa. Az 5.12. Példa alapján látható, hogy az $\mathbb{R}^n$ ill. a $\mathbb{C}^n$ lineáris terek n-dimenziós vektorterek.

Az 5.13. Példából következik, hogy a $C([a,b],\mathbb{R})$ tér végtelen dimenziós tér, hiszen a $\mathcal{H} = \{1, t, \ldots, t^n, \ldots\}$ halmaz a tér egy végtelen lineárisan független részhalmaza.

Az 5.14. Példa szerint a végtelen valós sorozatok $\mathbb{R}^\infty$ halmaza is végtelen dimenziós lineáris tér, hiszen az $e_1, e_2, \ldots$ elemek lineárisan függetlenek. □

5.18. Definíció. Azt mondjuk, hogy K az X lineáris tér *konvex részhalmaza*, ha bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja benne van K-ban, azaz ha $x, y \in K$, akkor bármely $\alpha \in [0,1]$-re $\alpha x + (1-\alpha)y \in K$.

5.19. Példa. A végtelen valós sorozatok lineáris terének vegyük azt a K részhalmazát, hogy $K = \{x = (x_1, x_2, \ldots)\colon\, x_i \geq 0 \text{ minden } i = 1, 2, \ldots\text{-re}\}$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy K konvex. □

5.2. Lineáris operátorok

Operátor, leképezés, transzformáció, függvény alatt lényegében ugyanazt értjük: egy előírás, amely egy halmaz elemeihez hozzárendeli ugyanazon vagy egy másik halmaz elemeit.

Legyen X, Y két halmaz, $D \subset X$. Ekkor a $T: D \to Y$ *operátor* alatt egy olyan előírást értünk, amely a D halmaz minden egyes x eleméhez hozzárendeli az Y halmaz egy $T(x)$-szel jelölt elemét. A D halmazt a T operátor *értelmezési tartományának* hívjuk és $\mathrm{Dom}(T)$-vel jelöljük. Az $\mathrm{Im}(T) = \{T(x) \in Y\colon\, x \in D\}$ halmazt pedig a T operátor *értékkészletének*, *képének* vagy *képterének* nevezzük.

Ha speciálisan $Y = \mathbb{R}$, akkor a $T\colon D \to Y$ operátort *funkcionálnak* nevezzük.

Legyen Y lineáris tér. Ekkor értelmezhetjük az Y-ba leképező operátorok összegét és skalárszorosát: Legyen $D \subset X$, $T, S\colon D \to Y$ operátorok, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ill. $\lambda \in \mathbb{C}$, ha Y a komplex számtest feletti vektortér). Ekkor $T + S\colon D \to Y$ és $\lambda T\colon D \to Y$ azok az operátorok, amelyekre definíció szerint

$$(T+S)(x) = T(x) + T(y) \qquad \text{és} \qquad (\lambda T)(x) = \lambda(T(x)).$$

A T operátort *kölcsönösen egyértelműnek* (*injektívnek*) nevezzük, ha $x_1 \neq x_2$, akkor $Tx_1 \neq Tx_2$, vagy ezzel ekvivalens, hogy $Tx_1 = Tx_2$, $x_1, x_2 \in D$ akkor és csak akkor, ha $x_1 = x_2$.

T *ráképezés* (*szürjektív*), ha bármely $y \in Y$-hoz van olyan $x \in X$, hogy $Tx = y$.

Ha T kölcsönösen egyértelmű, akkor T-nek létezik az inverz operátora, azaz egy olyan T^{-1} operátor, amelynek értelmezési tartománya a T operátor értékkészlete, értékkészlete a T értelmezési tartománya, továbbá $T^{-1}(T(x)) = x$, $x \in \mathrm{Dom}(T)$, és $T(T^{-1}(y)) = y$, $y \in \mathrm{Dom}(T^{-1}) = \mathrm{Im}(T)$.

5.20. Definíció. Legyen X, Y valós (komplex) lineáris terek, $D \subset X$ altér X-ben. Ekkor a $T\colon D \to Y$ operátort *lineáris operátornak* nevezzük, ha

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{C}$) és $x, y \in D$-re.

Ha T lineáris operátor, akkor a $T(x)$ helyett gyakran a Tx jelölést használjuk az operátor értékének jelölésére.

5.21. Példa. Legyen A egy $n \times n$-es valós mátrix. Ekkor a

$$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad T(x) = Ax$$

operátor egy lineáris operátor.

Hasonlóan, egy $m \times n$-es valós A mátrixra is az

$$S\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad S(x) = Ax$$

operátor lineáris operátor. $\square$

5.22. Példa. Legyen $\mathbb{R}^\infty$ a valós számsorozatok lineáris tere és $D \subset X$ a konvergens sorozatok lineáris altere. Ekkor D-n definiálhatjuk a

$$T\colon D \to \mathbb{R}, \qquad T(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

lineáris leképezést (funkcionált). $\square$

5.23. Példa. A folytonos függvények $C([a,b],\mathbb{R})$ terében definiáljuk a

$$T\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}), \qquad (Tf)(t) = \int_a^t f(x)\,dx, \quad t \in [a,b].$$

Ellenőrizhető, hogy a fenti képlettel definiált Tf függvény valóban egy folytonos függvényt definiál, és T egy lineáris operátor $C([a,b],\mathbb{R})$-n.

Hasonlóan, könnyen belátható, hogy az

$$S\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad Sf = \int_a^b f(x)\,dx$$

operátor egy lineáris funkcionál $C([a,b],\mathbb{R})$-en. $\square$

5.24. Példa. Tekintsük $C^1([a,b],\mathbb{R})$-t, az $[a,b]$-n értelemzett folytonosan differenciálható függvények lineáris terét. A differenciálás műveletét ezért a $C([a,b],\mathbb{R})$ vektortérnek a $C^1([a,b],\mathbb{R})$ lineáris alterén definiálhatjuk, így a

$$D\colon C^1([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}), \qquad (Df)(t) = f'(t), \quad t \in [a,b]$$

leképezés egy lineáris operátor, hiszen $(c_1 f_1 + c_2 f_2)' = c_1 f_1' + c_2 f_2'$. $\square$

5.25. Definíció. Azt mondjuk, hogy X és Y *izomorf lineáris terek*, ha létezik $T: X \to Y$ *izomorfizmus*, azaz olyan T, hogy $\mathrm{Dom}(T) = X$, $\mathrm{Im}(T) = Y$ és T kölcsönösen egyértelmű ráképezés (*bijekció*), amely lineáris.

5.26. Tétel. *Minden n-dimenziós X valós (komplex) lineáris tér izomorf az $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) szám-n-esek terével.*

Bizonyítás: Legyen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ az X egy bázisa. Ekkor tetszőleges $x \in X$-hez vannak olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ skaláris számok, hogy

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

Legyen $Tx = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ekkor $T: X \to \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Dom}(T) = X$, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^n$ és könnyen ellenőrizhető, hogy T bijektív lineáris operátor, azaz izomorfizmus a két lineáris tér között. $\square$

5.3. Normált terek

A valós számokra ismert abszolút érték tulajdonságai általánosításával kapjuk a norma és a normált tér fogalmát.

5.27. Definíció. Egy X valós (komplex) lineáris téren értelmezett $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ függvényt *normának* nevezzük, ha

1. $\|x\| \geq 0, \quad x \in X \qquad$ és $\qquad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta.$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \qquad x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda \in \mathbb{C}).$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad x, y \in X \quad$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Az $(X, \|\cdot\|)$ párost *normált térnek* hívjuk.

Az alábbi állításból következik, hogy minden norma egyben folytonos függvény.

5.28. Állítás. *Legyen $\|\cdot\|$ egy norma az X lineáris téren. Ekkor minden $x, y \in X$-re*

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|.$$

Bizonyítás: A háromszög-egyenlőtlenség szerint $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, amiből $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ adódik. Ugyanígy látható be, hogy $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$, amiből következik az állítás.

□

5.29. Példa. Tekintsük a valós szám-n-esek $\mathbb{R}^n$ lineáris terét. Ezen különböző normákat definiálhatunk:

Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Az

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

képlet a síkbeli és térbeli geometriai vektorok hosszának természetes általánosítása, *kettes-* vagy *euklideszi-normának* nevezzük. A norma 1. és 2. tulajdonságai könnyen ellenőrizhetők. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkowski-egyenlőtlenségből kapjuk (lásd az 5.32. Állítást).

Az

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

képlettel definiált normát *1-es normának* nevezzük. Ez valóban norma $\mathbb{R}^n$-en, hiszen a norma 1. és 2. tulajdonsága triviálisan teljesül, a 3. pedig a valós számokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből következik, hiszen $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Az

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

kifejezést végtelen- vagy *supremum-normának* nevezzük. Az olvasóra bízzuk annak ellenőrzését, hogy ez a képlet norma $\mathbb{R}^n$-en.

Megmutatható, hogy minden $p \geq 1$-re a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

képlet norma $\mathbb{R}^n$-n. A normát *p-normának* hívjuk. (A háromszög-egyenlőtlenség bizonyításához lásd az 5.32. Állítást). Ennek speciális esetei a fenti képletek. (Megmutatható, hogy $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.)

A fenti képletekkel $\mathbb{C}^n$-n is definiálhatunk normákat. □

Szükségünk lesz az alábbi elemi egyenlőtlenségre:

5.30. Lemma (Young-egyenlőtlenség). *Minden $a, b \geq 0$-ra*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

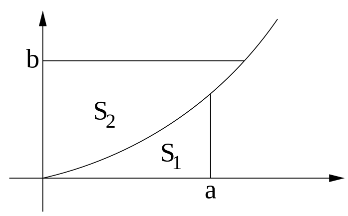
ahol

$$p > 1, \quad q > 1 \qquad \textit{és} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Bizonyítás: Tekintsük az $y = x^{p-1}$ görbét. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $x = y^{q-1}$. Legyen

$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p} \qquad \text{és} \qquad S_2 = \int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{b^q}{q}.$$

Ekkor az S_1 és S_2 az alábbi ábrán látható területek,



így nyilván tetszőleges $a, b \geq 0$-ra

$$ab \leq S_1 + S_2 = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

teljesül. □

5.31. Állítás (Hölder-egyenlőtlenség). *Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ komplex számokra*

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}$$

teljesül, minden olyan p és q-ra, ahol

$$p > 1, \quad q > 1 \qquad \textit{és} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Bizonyítás: Legyen

$$A = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \qquad \text{és} \qquad B = \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Ha $A=0$ vagy $B=0$, akkor minden $a_k=0$ illetve $b_k=0$, és az állítás teljesül. Feltehető tehát, hogy $A\neq 0$ és $B\neq 0$. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{A}\frac{|b_k|}{B}\leq 1.$$

Az 5.30. Lemmát alkalmazva

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{A}\frac{|b_k|}{B}\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{|a_k|^p}{A^p}+\frac{1}{q}\frac{|b_k|^q}{B^q}\right)=\frac{1}{p}\frac{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p}{A^p}+\frac{1}{q}\frac{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q}{B^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

□

5.32. Állítás (Minkowski-egyenlőtlenség). *Bármely $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ komplex számra és $p\geq 1$-re*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Bizonyítás: $p=1$-re az állítás rögtön következik az abszolút értékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből. Legyen $p>1$ és q olyan, hogy $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ekkor a Hölder-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p &\leq \sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\\ &= \sum_{k=1}^{n}|a_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}|b_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}\\ &\leq \left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Mivel $(p-1)q=p$, ezért egyszerűsítés után kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. □

5.33. Példa. Definiáljuk $f\in C([a,b],\mathbb{R})$-re az

$$\|f\|_\infty=\max_{a\leq t\leq b}|f(t)|$$

normát, amellyel a $C([a,b],\mathbb{R})$ lineáris tér normált tér. □

5.34. Példa. A $C([a,b],\mathbb{R})$ folytonos függvények terén értelmezhetünk más normát is: legyen például

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|\,dt.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\|\cdot\|_1$ teljesíti a norma mindhárom tulajdonságát. □

5.35. Példa. Jelöljük az $[a,b]$ intervallumon értelmezett valós értékű, végesen Lebesgue-integrálható függvények lineáris terét $L^1([a,b],\mathbb{R})$-rel. Ezen a vektortéren definiáljuk az m Lebesgue-mérték szerinti

$$\|f\|_1=\int_a^b|f|\,dm$$

kifejezést. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\|f\|_1 \geq 0$ minden f-re, és $\|\cdot\|_1$ teljesíti a norma 2. és 3. tulajdonságait is. Viszont abból, hogy $\|f\|_1 = 0$, csak az következik, hogy $f(x) = 0$ majdnem minden $x \in [a,b]$-re. Ezért az $L^1([a,b],\mathbb{R})$ halmazt az $\|\cdot\|_1$ függvénnyel úgy tekinthetjük normált térnek, hogy a majdnem mindenütt azonos függvényeket azonosnak tekintjük. □

5.36. Példa. Az előző példához hasonlóan legyen $L^2([a,b],\mathbb{R})$ azon Lebesgue-mérhető függvények lineáris tere, amelyre az $\int_a^b |f|^2\,dm$ Lebesgue-integrál véges. (Itt is a majdnem mindenütt azonos függvényeket azonosnak tekintjük.) Megmutatható, hogy ezen a halmazon az

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2\,dm}$$

függvény norma. A háromszög-egyenlőtlenség igazolását lásd később (5.93. Tétel és az 5.99. Példa). Ugyanezzel a képlettel a $L^2([a,b],\mathbb{C})$ lineáris téren is normát definiálhatunk. □

5.37. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ térhez hasonlóan a függvényekre is értelmezhetjük a p-norma fogalmát, amely általánosítja az előző két példában szereplő eseteket. Legyen $1 \leq p < \infty$, és legyen $L^p([a,b],\mathbb{R})$ azon Lebesgue-mérhető függvények lineáris tere, amelyre az $\int_a^b |f|^p\,dm$ Lebesgue-integrál véges. (Megint a majdnem mindenütt azonos függvényeket azonosnak tekintjük.) Megmutatható, hogy ezen a halmazon az

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\,dm\right)^{1/p}$$

függvény norma. Ehhez először belátható az 5.31. Állítás bizonyításához hasonló módon a Hölder-egyenlőtlenség

$$\int_a^b |fg|\,dm \leq \left(\int_a^b |f|^p\,dm\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\,dm\right)^{1/q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{5.1}$$

változata, és ennek segítségével beláthatjuk a Minkowski-egyenlőtlenség

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\,dm\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p\,dm\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\,dm\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

alakját. A részleteket az olvasóra bízzuk.

Megmutatjuk, hogy ha $p < q$, akkor $L^q([a,b],\mathbb{R}) \subset L^p([a,b],\mathbb{R})$, azaz speciálisan az

$$L^1([a,b],\mathbb{R}) \supset L^2([a,b],\mathbb{R}) \supset L^3([a,b],\mathbb{R}) \supset \cdots$$

tartalmazások teljesülnek. Legyen $p' = q/p$ és $q' = q/(q-p)$. Ekkor $1/p' + 1/q' = 1$. Az (5.1) egyenlőtlenséget alkalmazva p' és q'-re az f^p és $g = 1$ függvénnyel kapjuk

$$\int_a^b |f|^p\,dm \leq \left(\int_a^b |f|^{pp'}\,dm\right)^{1/p'} \left(\int_a^b 1\,dm\right)^{1/q'} = \left(\int_a^b |f|^q\,dm\right)^{1/p'} (b-a)^{1/q'} < \infty,$$

azaz $f \in L^p([a,b],\mathbb{R})$, ha $f \in L^q([a,b],\mathbb{R})$. □

5.38. Példa. Tekintsük a valós sorozatok $\mathbb{R}^\infty$ lineáris terének azt az ℓ_1 részhalmazát, amelyre

$$\ell_1 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\},$$

vagyis ℓ_1 az abszolut konvergens végtelen sorok halmaza. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezen a halmazon az

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

függvény normát definiál.

Hasonló módon legyen

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\},$$

és az ℓ_2-n tekintsük a

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

normát.

Az előző két képletet általánosítva legyen $1 \le p < \infty$, és legyen

$$\ell_p = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \colon \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Megmutatható, hogy a

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

képlet egy normát definiál ℓ_p-n. A háromszög-egyenlőtlenség bizonyításához először alkalmazzuk a Minkowski-egyenlőtlenséget:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p \right)^{1/p},$$

amiből $N \to \infty$ határértéket véve adódik az állítás.

Végül legyen

$$\ell_\infty = \{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \colon (x_1, x_2, \dots) \text{ korlátos sorozat} \},$$

ahol a

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \ge 1} |x_n|$$

képlet egy normát definiál.

Megjegyezzük, hogy a fenti képletekkel a $\mathbb{C}^\infty$ megfelelő részhalmazain is normát definiálhatunk. $\square$

5.4. Konvergencia normált terekben, normák ekvivalenciája

5.39. Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér valamely (x_n) sorozata *konvergens*, ha van olyan $x \in X$ elem, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N küszöbszám, hogy ha $n > N$, akkor $\|x - x_n\| < \varepsilon$. (Más szóval, $\|x - x_n\| \to 0$, ha $n \to \infty$.) Jelölés: $x_n \to x$, ha $n \to \infty$, vagy $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5.40. Definíció. Az (x_n) sorozat *Cauchy-sorozat*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N küszöbszám, hogy $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ valahányszor $n, m > N$

Megjegyezzük, hogy a normált terekben a sorozat határértékének a definíciója csak annyiból tér el a valós számsorozatok konvergenciájának definíciójától, hogy abban a valós szám abszolút értéke helyett normát használunk. A normát definiáló 3 tulajdonság megegyezik az abszolút érték alapvető tulajdonságaival, és a valós számsorozatokra vonatkozó határérték tulajdonságainak levezetésekor csak az abszolút értéknek ezt a 3 tulajdonságát használtuk fel, ezért a normált térben ugyanazok az algebrai tulajdonságok teljesülnek a konvergens sorozatokra, mint a valós sorozatokra.

5.41. Tétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált tér, (x_n) egy X-beli sorozat.*

1. *Konvergens sorozatok határértéke egyértelmű.*
2. *Legyen $x_n \to x$ ha $n \to \infty$. Ekkor (x_n) bármely részsorozata is konvergens, és a határértéke x.*
3. *Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor* korlátos *is, azaz van olyan $M > 0$ valós szám, amelyre $\|x_n\| \le M$ minden $n \ge 1$-re.*
4. *Ha $x_n \to x$ és $y_n \to y$, akkor $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$, ha $n \to \infty$.*
5. *Ha $x_n \to x$, akkor az $(\|x_n\|)$ számsorozat is konvergens, és $\|x_n\| \to \|x\|$, ha $n \to \infty$.*
6. *Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor Cauchy-sorozat is.*

Bizonyítás: A 6. pontot mutatjuk meg, a többi a valós esethez hasonlóan látható be.

Legyen (x_n) konvergens. Ekkor van olyan $x \in X$, hogy $x_n \to x$, ha $n \to +\infty$. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $\varepsilon/2$-höz is van olyan $N = N(\varepsilon/2)$, hogy $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, minden $n > N$-re. Így a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \le \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad n, m > N.$$

□

5.42. Definíció. Legyen adott $\|\cdot\|$ és $|||\cdot|||$ két norma az X lineáris téren. Azt mondjuk, hogy $\|\cdot\|$ és $|||\cdot|||$ *ekvivalens*, ha léteznek olyan m és M pozitív konstansok, hogy

$$m\|x\| \le |||x||| \le M\|x\|, \qquad x \in X.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti definíció szimmentikus a két normára nézve, hiszen ha a fenti egyenlőtlenségek teljesülnek, akkor $\frac{1}{M}|||x||| \le \|x\| \le \frac{1}{m}|||x|||$ is teljesül.

Hangsúlyozni kell, hogy a normált térben a konvergencia fogalma függ a norma választásától. Elképzelhető, hogy az egyik normában az adott sorozat konvergens, de a másik normában nem. A következő állítás szerint viszont ekvivalens normák ugyanazt a határérték fogalmat definiálják.

5.43. Állítás. *Legyen adott* $\|\cdot\|$ *és* $|||\cdot|||$ *két ekvivalens norma az* X *lineáris téren,* (x_k) *egy sorozat* X*-en. Ekkor* (x_k) *akkor és csak akkor konvergens a* $\|\cdot\|$ *normában, ha konvergens a* $|||\cdot|||$ *normában, és a két normában a határértékek is megegyeznek.*

Bizonyítás: Az állítás rögtön következik az

$$m\|x_k - x\| \le |||x_k - x||| \le M\|x_k - x\|$$

egyenlőtlenségből, ahol m és M a normák ekvivalenciájának definíciójában szereplő konstansok. □

5.44. Példa. Az $\mathbb{R}^n$-en az $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek, mivel ellenőrizhető, hogy

$$\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2, \qquad \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty, \qquad \|x\|_\infty \le \|x\|_1, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

(Az első becslés a Hölder-egyenlőtlenségből következik $p = q = 2$-re.) Ezért az $(x^{(k)})$ $\mathbb{R}^n$-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens az egyik normában, ha a másikban is az. □

A következő tétel szerint egy tetszőleges véges dimenziós normált térben bármely két norma ekvivalens.

5.45. Tétel. *Legyen* X *egy véges dimenziós lineáris tér. Ekkor* X*-en bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás: A bizonyítást csak az $X = \mathbb{R}^n$ speciális esetre adjuk meg. (A bizonyítás az $X = \mathbb{C}^n$ esetre triviálisan kiterjeszthető.)

Elegendő megmutatnunk, hogy egy tetszőleges $\|\cdot\|$ norma ekvivalens az $\|\cdot\|_1$ normával. Legyen $A = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x\|_1 = 1\}$. Ekkor A korlátos és zárt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, így bármely folytonos függvény felveszi minimumát és maximumát A-n. Az 5.28. Állítás szerint a $\|\cdot\|$ függvény is folyonos, ezért

$$m = \min\{\|y\|\colon\ y \in A\} \qquad \text{és} \qquad m = \max\{\|y\|\colon\ y \in A\}$$

létezik és véges. Ekkor viszont tetszőleges $x \ne 0$-ra $\frac{x}{\|x\|_1} \in A$, ezért

$$m \le \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \le M,$$

amiből következik, hogy $m\|x\|_1 \le \|x\| \le M\|x\|$ minden x-re. □

A tétel következményekén kapjuk:

5.46. Következmény. *Az* $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *normált térben az* $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *vektorsorozat akkor és csak akkor konvergál az* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *vektorhoz, ha* $x_i^{(k)} \to x_i$ $(k \to \infty)$ *minden* $i = 1, \ldots, n$*-re.*

Bizonyítás: A bizonyítás következik abból, hogy az 5.45. Tétel szerint feltehető, hogy $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$, és ekkor az

$$|x_i^{(k)} - x_i| \le \|x^{(k)} - x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j|, \qquad i = 1, \ldots, n$$

egyenlőtlenségekből adódik az állítás. □

5.47. Példa. Végtelen dimenziós térben viszont a koordinátánkénti konvergencia nem mindig ekvivalens a normában való konvergenciával. Ehhez elegendő az ℓ_1 teret tekinteni. Tekintsük a következő sorozatot ℓ_1-ben:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (1,0,0,0,\ldots) \\ x^{(2)} &= (1,1,0,0,\ldots) \\ x^{(3)} &= (1,1,1,0,\ldots) \\ \vdots\quad & \quad\vdots \end{aligned}$$

azaz $x^{(k)}$ az a sorozat, amelynek az első k tagja 1, a többi pedig 0. Ekkor az $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots)$ sorozat bármely koordinátájára $x_i^{(k)} \to 1$, ha $k \to \infty$, másrészt $x^{(k)} \not\to (1,1,1,\ldots)$, hiszen a konstans 1 sorozat nincs is benne ℓ_1-ben.

Természetesen ez a példa ℓ_1 helyett bármely ℓ_p térben ugyanígy elmondható. □

5.48. Állítás. *A $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normált térben $f_n \to f$, ha $n \to \infty$, akkor és csak akkor, ha az (f_n) függvénysorozat egyenletesen tart f-hez.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $f_n \to f$ a $\|\cdot\|_\infty$ normában. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N küszöbszám, hogy

$$\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

ha $n > N$. Ekkor természetesen bármely $x \in [a,b]$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N$, azaz (f_n) egyenletesen tart f-hez.

Tegyük fel most, hogy az (f_n) folytonos függvények sorozata egyenletesen konvergál f-hez. Ekkor tudjuk, hogy f folytonos függvény, és így $f_n - f$ is az, és mivel folytonos függvények felveszik maximális értéküket, ezért minden n-hez létezik olyan $x_n \in [a,b]$, hogy

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Így ha bármely $x \in [a,b]$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N$, akkor $\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ is teljesül $n > N$-re, azaz $f_n \to f$ a $\|\cdot\|_\infty$ normában. □

A bizonyításból rögtön következik:

5.49. Következmény. *Legyen $f_n \in C([a,b],\mathbb{R})$ és tegyük fel, hogy valamely $[a,b]$-n értelmezett f függvényre $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, ha $n \to \infty$. Ekkor f folytonos, azaz $f \in C([a,b],\mathbb{R})$.*

Megjegyezzük, hogy ha egy (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az f függvényhez az $[a,b]$ intervallumon, akkor még általában nem következik, hogy a supremum-normában is konvergens lenne a sorozat. Ehhez elegendő az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozatot tekinteni a $[0,1]$ intervallumon.

Végtelen dimenziós terekre, ahogy azt az alábbi példa illusztrálja, már általában nem igaz az 5.45. Tétel.

5.50. Példa. Tekinsük a $C([0,1],\mathbb{R})$ lineáris teret. Az integrál becsléséből következik, hogy $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$ teljesül minden f-re. Megmutatjuk, hogy a $\|\cdot\|_\infty$ és $\|\cdot\|_1$ normák mégsem ekvivalensek. Tegyük fel, hogy létezik olyan $M > 0$ konstans, hogy

$$\|f\|_\infty \le M\|f\|_1 \quad \text{teljesül minden } f \in C([0,1],\mathbb{R})\text{-re.} \tag{5.2}$$

Legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & x \in [0, 1/n], \\ 0, & x \in (1/n, 1]. \end{cases}$$

Ekkor f_n minden n-re szakaszonként lineáris és folytonos, ezért $f_n \in C([0,1], \mathbb{R})$. Másrészt

$$\|f_n\|_\infty = f_n(0) = 1 \qquad \text{és} \qquad \|f_n\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^{1/n} 1 - nx\,dx = \left[x - \frac{nx^2}{2}\right]_0^{1/n} = \frac{1}{2n}.$$

Ez ellentmond az (5.2) relációnak, hiszen n tetszőleges nagy lehet, így a két norma nem ekvivalens a $C([0,1], \mathbb{R})$ téren.

Az $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$ becslésből következik, hogy ha a (g_n) függvénysorozat a $\|\cdot\|_\infty$ normában tart egy g függvényhez, akkor a $\|\cdot\|_1$ normában is konvergál g-hez. Fordítva viszont ez általában nem teljesül. Ehhez tekintsük a $g_n(x) = x^n$ függvénysorozatot. Erre $\|g_n - 0\|_1 \to 0$, ha $n \to \infty$, hiszen $\|g_n\|_1 = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0$, ha $n \to \infty$. Másrészt $\|g_n - 0\|_\infty = 1$ minden n-re, azaz (g_n) nem konvergens a $\|\cdot\|_\infty$ normában. □

5.5. Banach-terek

Valós számokra ismert a következő tétel.

5.51. Tétel (Cauchy-féle konvergenciatétel). *A valós számokból alkotott (x_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Megmutatható, hogy véges dimenziós normált terekre átvihető az állítás, de ahogy azt az 5.53. Példában megmutatjuk, végtelen dimenziós esetben egy sorozat lehet Cauchy-sorozat úgy is, hogy az nem konvergens az adott normált térben.

5.52. Tétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy véges dimenziós normált tér, $(x^{(k)})$ egy X-beli sorozat. Ekkor $(x^{(k)})$ akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás: Az 5.26. Tétel szerint X izomorf az $\mathbb{R}^n$ (ill. komplex esetben a $\mathbb{C}^n$) vektortérrel, ezért feltehető, hogy $X = \mathbb{R}^n$. Mivel az 5.45. Tétel szerint bármely norma ekvivalens az $\|\cdot\|_1$ normával, ezért az is feltehető, hogy $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$. Legyen $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ egy vektor sorozat. Ekkor viszont bármely $k, m \ge 1$-re és $i = 1, \dots, n$-re

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| \le \|x^{(k)} - x^{(m)}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(m)}|,$$

ezért az $(x^{(k)})$ vektorsorozat akkor és csak akkor Cauchy-sorozat, ha az $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ koordináta sorozatok Cauchy-sorozatok minden $i = 1, \dots, n$-re. De ekkor az 5.46. Következményből kapjuk az állítást. □

5.53. Példa. Megmutatjuk, hogy a $(C([-1,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes, azaz létezik olyan Cauchy-sorozat a térben, amely nem konvergens. Definiáljuk az

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t < 0, \\ nt, & 0 \le t \le 1/n, \\ 1, & 1/n < t \le 1 \end{cases}$$

függvénysorozatot. Világos, hogy f_n folytonos függvény, így $f_n \in C([-1,1],\mathbb{R})$. Legyen $n > m$, ekkor $1/m > 1/n$. Ezért

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_1 &= \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \\
&= \int_0^{1/n} (n-m)t\,dt + \int_{1/n}^{1/m} (1-mt)\,dt \\
&= \frac{n-m}{2n^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\
&< \frac{1}{2n} + \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Tehát $\|f_n - f_m\|_1 \to 0$, ha $n, m \to \infty$, azaz (f_n) Cauchy-sorozat az $\|\cdot\|_1$ normában. Definiáljuk az

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0, \\ 1, & 0 < t \le 1 \end{cases}$$

függvényt. Nyilván $f_n(t) \to f(t)$ minden $t \in [-1,1]$-re. Másrészt

$$\int_{-1}^{1} |f_n(t) - f(t)|\,dt = \int_0^{1/n} (1-nt)\,dt = \frac{1}{2n} \to 0,$$

ha $n \to \infty$. Viszont $f \notin C([-1,1],\mathbb{R})$, azaz (f_n) nem konvergens az $\|\cdot\|_1$ normában az adott téren.

Megjegyezzük, hogy ha a $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normált tér helyett a $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normált teret vesszük, és az (f_n) függvénysorozat tagjait megszorítjuk a $[0,1]$ intervallumra, akkor ellenőrizhetjük, hogy a kapott (f_n) sorozat konvergens lesz a $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normált térben, és a határértéke az azonosan 1 függvény lesz.

Ugyanezen a példán indokolható az is, hogy a $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ normált tér sem teljes, azaz nem Banach-tér. □

5.54. Definíció. Az X normált teret *teljesnek* nevezzük, ha az X minden Cauchy-sorozatának létezik határértéke X-ben. (Tehát az X tér pontosan akkor teljes, ha érvényes benne a Cauchy-féle konvergenciatétel.) Egy teljes normált teret *Banach-térnek* nevezünk.

5.55. Példa. Az 5.52. Tétel szerint az $\mathbb{R}^n$ ill. $\mathbb{C}^n$ halmazon bármely normát tekintve a kapott normált tér teljes, azaz Banach-tér. □

5.56. Példa. Az 5.53. Példa alapján látható, hogy a $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes tér, azaz nem Banach-tér. □

5.57. Tétel. *Az $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normált tér Banach-tér.*

Bizonyítás: Legyen (f_n) egy Cauchy-sorozat a $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normált térben. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy minden $x \in [a,b]$-re

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \quad \text{ha } n, m > N, \tag{5.3}$$

azaz $(f_n(x))$ egy Cauchy-sorozat. De ekkor $(f_n(x))$ konvergens. Legyen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [a,b]$. Ezért ha $m \to \infty$, akkor az (5.3) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon, \quad \text{ha } n > N,$$

azaz (f_n) egyenletesen konvergál f-hez, és így $f_n \to f$ a $\|\cdot\|_\infty$ normában. □

Megmutatható az alábbi alapvető eredmény:

5.58. Tétel (Riesz–Fischer-tétel). *Az $(L^p([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ normált tér Banach-tér minden $p \ge 1$-re.*

Megjegyezzük, hogy a Riesz–Fischer-tétel és az 5.56. Példa mutatja a Lebesgue-integrál jelentőségét: Riemann-integrált és például a $\|\cdot\|_2$-es normát használva a folytonos függvények halmazán nem kapunk terjes normált teret, pedig ahogy azt majd késbb látni fogjuk, ez a norma alapvető fontosságú a függvényterekben.

5.59. Tétel. *Az $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ normált tér Banach-tér minden $p \ge 1$-re.*

Bizonyítás: Legyen az $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_i^{(n)}, \ldots\right) \in \ell_p$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat Cauchy-sorozat, azaz bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N = N(\varepsilon)$, hogy

$$\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p, \qquad n, m > N. \tag{5.4}$$

Másrészt tetszőleges rögzített j indexre:

$$\left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|^p \le \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p, \qquad n, m > N,$$

és így az $(x_j^{(n)})_{n=1,2\ldots}$ valós számsorozat is Cauchy-sorozat, tehát konvergens is. Így minden rögzített j indexre létezik $x_j \in \mathbb{R}$, hogy $x_j = \lim_{n\to\infty} x_j^{(n)}$. Mivel (5.4) alapján

$$\sum_{j=1}^{k} \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|^p \le \sum_{i=1}^{\infty} \left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p, \qquad n, m > N$$

minden $k \ge 1$ egészre, ezért az $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{k} \left|x_j^{(n)} - x_j\right|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|^p \le \varepsilon^p, \quad n > N,$$

minden rögzített $k \ge 1$ -re. De ekkor

$$\left\|x^{(n)} - x\right\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(n)} - x_j\right|^p \le \varepsilon^p, \qquad n > N. \tag{5.5}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\|_p = 0$, ami azt jelenti, hogy $x^{(n)}$ az ℓ_p normában konvergál x-hez.

Meg kell még mutatnunk, hogy $x \in \ell_p$. (5.5) alapján elegendő nagy n-re $x^{(n)} - x \in \ell_p$, másrészt $x^{(n)} \in \ell_2$, ezért $x = x^{(n)} - \left(x^{(n)} - x\right) \in \ell_p$, ugyanis ℓ_p lineáris tér. □

Egy végtelen dimenziós $(X, \|\cdot\|)$ Banach-tér (x_n) sorozatát *Schauder-bázisnak* nevezzük, ha az $\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ halmaz lineárisan független, és tetszőleges $x \in X$-hez létezik olyan (α_n) skaláris sorozat, hogy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

5.60. Példa. Az ℓ_p Banach-térben könnyen belátható, hogy az

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (1,0,0,0,\ldots) \\ x_2 & = & (0,1,0,0,\ldots) \\ x_3 & = & (0,0,1,0,\ldots) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

sorozat Schauder-bázist alkot. □

5.6. Folytonos lineáris operátorok

Legyen X és Y normált (lineáris) terek. A normát az egyszerűség kedvéért mindkét térben $\|\cdot\|$ jelöli, de ezek természetesen általában különböző normák, hiszen a terek különbözők lehetnek.

5.61. Definíció. A $T : X \to Y$ operátort az $x_0 \in X$ pontban *folytonosnak* nevezzük, ha bármely $x_n \in X$ pontsorozatra, amely konvergál $x_0 \in X$-hez, $T(x_n) \to T(x_0)$, ha $n \to \infty$, azaz $\|Tx_n - Tx_0\| \to 0$, $n \to \infty$, ha $\|x_n - x_0\| \to 0$, $n \to \infty$.

Azt mondjuk, hogy a T operátor *folytonos*, ha az X tér minden pontjában folytonos.

A valós függvényekre ismert Heine-féle átviteli elv itt is megmutatható:

5.62. Tétel. *Legyenek X, Y normált terek. A $T\colon X \to Y$ operátor pontosan akkor folytonos az $x_0 \in X$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz található olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$, valahányszor $\|x - x_0\| < \delta$.*

Lineáris operátor folytonossága ekvivalens azzal, hogy a lineáris operátor folytonos a 0-ban:

5.63. Tétel. *Legyenek X, Y normált terek, $T\colon X \to Y$ lineáris operátor. Ekkor T akkor és csak akkor folytonos X-en, ha T folytonos $0 \in X$-ben.*

Bizonyítás: Minden lineáris operátorra $T0 = T(0 + 0) = T0 + T0$, azaz $T0 = 0$. Legyen $x_n \to x_0$, ha $n \to \infty$. Ekkor $Tx_n - Tx_0 = T(x_n - x_0) \to 0$ akkor és csak akkor, ha T folytonos a 0-ban. □

5.64. Definíció. A $T\colon X \to Y$ lineáris operátort *korlátosnak* nevezzük, ha van olyan $M > 0$, hogy $\|Tx\| \le M\,\|x\|$ minden $x \in X$-re.

5.65. Tétel. *Legyenek X, Y normált terek. Egy $T\colon X \to Y$ lineáris operátor pontosan akkor korlátos, ha folytonos.*

Bizonyítás: Legyen T korlátos, azaz $\|Tx\| < M\,\|x\|$, ahol $M > 0$ adott állandó, $x \in X$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-hoz, van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\|Tx\| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \|x\| < \delta, \quad x \in X.$$

Legyen ugyanis $\delta = \varepsilon/M$. Ekkor

$$\|Tx\| \le M\|x\| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \|x\| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta.$$

Tehát T folytonos 0-ban, és így az 5.63. Tétel szerint f folytonos X-en is.

Legyen T folytonos. Ekkor T folytonos 0-ban is. Legyen $\delta > 0$ olyan, hogy $\|Tx\| < 1$, ha $\|x\| \le \delta$. Ekkor tetszőleges $x \in X$-re $\left\|\delta\frac{x}{\|x\|}\right\| = \delta$, és így

$$\left\|T\frac{\delta x}{\|x\|}\right\| < 1.$$

De ekkor

$$\left\|T\frac{\delta x}{\|x\|}\right\| = \frac{\delta}{\|x\|}\,\|Tx\| < 1,$$

és így $\|Tx\| \le \frac{1}{\delta}\,\|x\|$ minden $x \in X$-re, azaz T korlátos. □

5.66. Definíció. Legyen $T\colon X \to Y$ korlátos lineáris operátor. A

$$\|T\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

számot a T operátor *normájának* nevezzük.

5.67. Állítás. *Legyen $T\colon X \to Y$ korlátos lineáris operátor. Ekkor*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|\colon \|x\| = 1,\ x \in X\} = \inf\{M\colon \|Tx\| \le M\|x\| \text{ minden } x \in X\text{-re}\}.$$

Bizonyítás: Először megmutatjuk az első azonosságot. Legyen a $T\colon X \to Y$ lineáris operátor korlátos. Ekkor van olyan $M \ge 0$ szám, hogy $\|Tx\| \le M\,\|x\|$ minden $x \in X$-re. Így speciálisan $\|Tx\| \le M$, ha $x \in X$ és $\|x\| = 1$. Tehát $M_1 = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$ véges valós szám. Megmutatjuk, hogy $M_1 = \|T\|$. Az világos, hogy $\|T\| \le M_1$, hiszen T linearitását és a norma tulajdonságait használva

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \le M_1, \qquad \text{ugyanis} \quad \frac{x}{\|x\|} \in X \quad \text{és} \quad \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1.$$

Tegyük fel, hogy $M_1 > \|T\|$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $M_1 - \varepsilon > \|T\|$. Másrészt, mivel $M_1 = \sup\{\|Tx\|\colon \|x\| = 1\} > M_1 - \varepsilon$, így van olyan $x_0 \in X$ elem, hogy $\|x_0\| = 1$ és $\|Tx_0\| > M_1 - \varepsilon > \|T\|$. Tehát $\|Tx_0\| > \|T\|\,\|x_0\|$ ami ellentmond $\|T\|$ definíciójának, azaz kapjuk, hogy $\|T\| = M_1$.

A $\|T\| = \inf\{M : \|Tx\| \le M\|x\| \text{ minden } x \in X\text{-re}\}$ összefüggés rögtön következik a $\|T\|$ definíciójából és a legkisebb felső korlát fogalmából. □

Megmutatjuk, hogy a lineáris operátor normája teljesíti a norma „szokásos” tulajdonságait.

5.68. Állítás. *Legyen $T, S\colon X \to Y$ lineáris operátorok. Ekkor*

1. *$\|T\| \geq 0$, és $\|T\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $T = 0$.*

2. *$\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ (vagy $\lambda \in \mathbb{C}$).*

3. *$\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$*

Bizonyítás: 1. Nyilván $\|T\| \geq 0$, és $\|0\| = 0$. Tegyük fel most, hogy $\|T\| = 0$. Ez $\|T\|$ definíciójából következen csak akkor lehet, ha $\|Tx\| = 0$ minden $x \in X$-re. De ekkor a norma tulajdonságai miatt $Tx = 0$ következik minden x-re, így T az azonosan 0 leképezés.

2. A definíciókból következik

$$\|\lambda T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda|\|Tx\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = |\lambda|\|T\|.$$

3. A vektornorma és a supremum tulajdonságait alkalmazva

$$\|T + S\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T+S)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\| + \|Sx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|T\| + \|S\|.$$

□

5.69. Következmény. *Az $X \to Y$ korlátos lineáris operátorai halmaza lineáris tér.*

Legyen $\mathcal{L}(X, Y)$ az $X \to Y$ korlátos lineáris operátorok halmaza. Az előbbiek szerint tehát $\mathcal{L}(X, Y)$ egy lineáris tér. Megmutatható a következő állítás.

5.70. Tétel. *Legyen X normált tér, Y pedig Banach-tér. Ekkor az $\mathcal{L}(X, Y)$ korlátos lineáris operátorok tere Banach-tér a $\|\cdot\|$ operátor normával.*

Könnyen megmutatható a következő állítás is:

5.71. Tétel. *Legyenek X, Y, Z normált terek, $T : X \to Y$ és $S : Y \to Z$ korlátos lineáris operátorok. Ekkor $ST \colon X \to Z$, $(ST)x = S(Tx)$ szintén korlátos lineáris operátor, és*

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|.$$

Bizonyítás:

$$\|ST\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|S(Tx)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|S\|\|Tx\|}{\|x\|} = \|S\| \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|S\|\|T\|.$$

□

Az 5.21. Példa szerint egy A $n \times n$-es mátrixhoz hozzárendelhető egy lineáris operátor. Fordítva is igaz, lineáris algebrából ismert eredmény, hogy a véges dimenziós terek közötti lineáris operátorok azonosíthatók a mátrixokkal. Egy *A mátrix normáján* az $x \mapsto Ax$ lineáris leképezés normáját értjük. Mátrixok normáját könnyű kiszámítani az $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_\infty$ normában.

5.72. Tétel. *Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es valós vagy komplex mátrix. Ekkor*

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \textit{és} \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Bizonyítás: Legyen $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ (oszlopvektor). Ekkor a háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \le \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) |x_j| \\ &\le \sum_{j=1}^n \left\{ \max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^m |a_{ik}| \right\} |x_j| = \left\{ \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right\} \|x\|_1, \end{aligned}$$

így

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \le \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| .$$

Másrészt legyen $\max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}| = \sum\limits_{i=1}^m |a_{ik}|$, és legyen $x = e_k$ a k-adik egységvektor, azaz az a vektor, amelynek minden komponense 0, kivéve a k-adikat, amely 1. Ekkor $Ax = Ae_k = (a_{1k}, \dots, a_{mk})^T$, $\|x\|_1 = 1$, és ezért $\|Ax\|_1 = \left\{ \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^m |a_{ij}| \right\} \|x\|_1$. Ezzel beláttuk az első állítást.

A második norma azonosság az előzőhöz hasonló módon bizonyítható. □

Az euklideszi-normában sokkal nehezebb kiszámolni a mátrixok normáját. Bizonyítás nélkül tekintsük a következő állítást:

5.73. Tétel. *Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es valós vagy komplex mátrix, A^* az A mátrix adjungáltja (azaz konjugált transzponáltja). Ekkor az A^*A mátrix sajátértékei nemnegatív valós számok: $\lambda_1 \ge \dots \ge \lambda_n \ge 0$, továbbá*

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}.$$

5.74. Példa. Tekintsük az 5.23. példában már vizsgált

$$T\colon \left(C\left([a,b], \mathbb{R}\right), \|\cdot\|_\infty\right) \to \left(C\left([a,b], \mathbb{R}\right), \|\cdot\|_\infty\right), \qquad (Tf)(t) = \int_a^t f(x)\,dx, \quad a \le t \le b$$

lineáris operátort. Erre

$$\|Tf\|_\infty = \max_{a\le t\le b} |(Tf)(t)| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le (b-a)\|f\|_\infty ,$$

ezért $\|T\|_\infty \le b - a$, így az operátor korlátos. Másrészt az $f(x) = 1$ konstans függvényre a fenti egyenlőtlenségekben egyenlőséget kapunk, ezért $\|T\|_\infty = b - a$. □

5.75. Példa. Rögzítsünk egy $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, és tekintsük az

$$S\colon \left(C\left([a,b], \mathbb{R}\right), \|\cdot\|_\infty\right) \to \mathbb{R}, \qquad Sf = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

lineáris funkcionált. Ekkor

$$|Sf| = \left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)||g(x)|\,dx \le \|f\|_\infty \int_a^b |g(x)|\,dx,$$

ezért

$$\|S\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|Sf|}{\|f\|_\infty} \leq \int_a^b |g(x)|\, dx,$$

azaz S egy korlátos lineáris funkcionál. Ha $g(x) \geq 0$ az $[a, b]$ intervallumon, akkor az $f(x) = 1$ függvényre $Sf = \int_a^b g(x)\, dx$, és ezért $\|S\| = \int_a^b g(x)\, dx$. □

A lineáris operátor normája természetesen függ az adott normált terekben választott normától, sőt lehet, hogy egy leképezés korlátos az egyik normát használva, de nem korlátos egy másik normát tekintve. Erre mutatunk most példát.

5.76. Példa. Tekintsük a folytonos valós függvények $C([a, b], \mathbb{R})$ terén értelmezett $Tf = f(b)$ lineáris funkcionált. Nyilván T lineáris. Tekintsük ezt a lineáris funkcionált, mint a

$$T\colon\ (C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}, \qquad Tf = f(b)$$

Banach-téren értelmezett leképezést. Ekkor

$$\|T\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|Tf|}{\|f\|_\infty} = \sup_{f \neq 0} \frac{|f(b)|}{\max\{|f(x)|\colon\ x \in [a, b]\}} \leq 1,$$

azaz T korlátos lineáris funkcionál ezen a Banach-téren. Megmutatható, hogy $\|T\| = 1$.

Ha viszont az $\|\cdot\|_1$ integrál normát használjuk az értelmezési tartományon, akkor T-t mint a

$$T\colon\ (C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}, \qquad Tf = f(b)$$

leképezést tekintjük. Ekkor legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq b - \frac{1}{n}, \\ n\left(x - b + \frac{1}{n}\right), & x > b - \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Erre a függvényre $f_n(b) = 1$ és $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$, azaz

$$\frac{|Tf_n|}{\|f_n\|_1} = 2n,$$

ami tetszőlegesen nagy, ha n elegendően nagy. Ezért T ezen a téren nem egy korlátos lineáris funkcionál. □

5.77. Példa. Tekintsük a differenciálás operátort: $Df(t) = f'(t)$. Természetesen ez az operátor nem értelmezhető a $C([a, b], \mathbb{R})$ tér egészén, csak a differenciálható függvényeken. Legyen a D operátor értelmezési tartománya $C^1([a, b], \mathbb{R})$, a folytonosan differenciálható függvények lineáris altere $C([a, b], \mathbb{R})$-ben. Ha ezen az értelmezési tartományon a folytonos függvényekre szokásosan alkalmazott $\|\cdot\|_\infty$ normát használjuk, akkor a differenciálás operátort, mint

$$D\colon\ (C^1([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

normált terek közötti leképezést tekintjük. Ekkor D nem lesz korlátos, azaz folytonos lineáris operátor, hiszen nem folytonos a 0-ban. Ehhez elegendő az $f_n(t) = \frac{b-a}{n\pi} \sin \frac{n\pi t}{b-a}$, $\quad a \leq t \leq b$, $\quad n = 1, 2, \ldots$ függvénysorozatot tekinteni. Erre $\|f_n\|_\infty = \frac{b-a}{n\pi} \to 0$, ha $n \to +\infty$. Másrészt $(Df_n)(t) = \cos \frac{n\pi t}{b-a}$, így $\|Df_n\|_\infty = 1$, azaz $Df_n \not\to 0$, ha $n \to \infty$. Mivel D nem folytonos, ezért nem is korlátos. □

5.78. Példa. Tekintsük újra az előbbi példában vizsgált differenciálás operátort. Most a $C^1([a,b],\mathbb{R})$ halmazon vezessünk be egy új normát. Legyen

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \left\|f'\right\|_\infty .$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez norma $C^1([a,b],\mathbb{R})$-n. Tekintsük most a

$$D\colon\ (C^1([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1}) \to (C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

Ekkor nyilván

$$\frac{\|Df\|_\infty}{\|f\|_{C^1}} = \frac{\|f'\|_\infty}{\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty} \le 1,$$

azaz ezek között a normált terek között a differenciálás lineáris operátor korlátos, azaz folytonos is. □

Az 5.75. Példában láttuk, hogy integrál segítségével felírhatunk korlátos lineáris funkcionálokat. A következő tétel szerint a folytonos függvények halmazán definiált tetszőleges korlátos lineáris funkcionál megadható Riemann–Stieltjes-integrál segítségével is.

5.79. Tétel (Riesz reprezentációs tétel). *Egy tetszőleges $T\colon (C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egy $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvény, hogy*

$$Tf = \int_a^b f(x)\, dG(x), \qquad f \in C([a,b],\mathbb{R}),$$

továbbá $\|T\| = V_a^b G$.

5.7. Metrika, metrikus terek

5.80. Definíció. Legyen X egy adott halmaz. Az X halmazon értelmezett $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ függvényt *távolságnak* vagy *metrikának* nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$-re:

1. $d(x,y) \ge 0$ és $d(x,y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$,
3. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Az X halmazt *metrikus térnek* nevezzük, ha értelmezve van rajta egy távolság. A metrikus tér jelölése: (X,d).

Érdemes hangsúlyozni, hogy metrikus terek alaphalmaza nem lineáris tér, lehet tetszőleges halmaz is.

5.81. Állítás. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált tér. Ekkor a $d(x,y) = \|x-y\|$ függvény távolság X-en, azaz minden normált tér egyúttal metrikus tér is.*

Bizonyítás: A távolság 1. és 2. tulajdonsága rögtön következik a norma 1. és 2. tulajdonságából ill. a távolság definíciójából. A 3. pedig a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből adódik:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \le \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

□

5.82. Állítás. *Tegyük fel, hogy az X valós (komplex) lineáris téren adott egy d metrika. Ha a d metrika egy normából származtatott, akkor*

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

teljesül minden $\lambda \in \mathbb{R}$ (ill. $\lambda \in \mathbb{C}$) skaláris számra és minden $x, y \in X$-re.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a metrikát a $\| \cdot \|$ normából származtathatjuk. Ekkor

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x, y).$$

□

Az 5.81. Állításból és a normákra vonatkozó konvergencia definícióból könnyen látható, hogy a konvergencia fogalma természetes módon kiterjeszthető metrikus terekre:

5.83. Definíció. Legyen (X, d) egy metrikus tér, (x_n) egy X-beli sorozat. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat az (X, d) metrikus térben *konvergens*, ha van olyan $x \in X$, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N küszöbszám, hogy $d(x_n, x) < \varepsilon$, ha $n > N$; azaz $d(x_n, x) \to 0$, ha $n \to \infty$.

Az (x_n) sorozat az (X, d) metrikus térben *Cauchy-sorozat*, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, ha $n, m > N$.

Az (X, d) metrikus tér *teljes*, ha bármely Cauchy-sorozata konvergens.

5.84. Példa. Legyen X tetszőleges halmaz. Tetszőleges $x, y \in X$-re definiáljuk a d függvényt a következő módon:

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d\,(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \neq y, \\ 0, & \text{ha} \quad x = y. \end{cases}$$

Ez könnyen ellenőrizhetően teljesíti a metrika 3 tulajdonságát. Ezt a metrikát *triviális metrikának* nevezzük.

Egy (x_n) sorozat akkor és csak akkor konvergál x-hez a triviális metrikában, ha létezik olyan N küszöbszám, hogy $x_n = x$ minden $n > N$-re, hiszen egyébként $d(x_n, x) = 1$ lenne tetszőleges nagy n-re. □

5.85. Példa. Legyen X a 0 és 1 elemekből álló (bináris) sorozatoknak a halmaza, amelyekben tetszőleges sok, de legfeljebb véges sok 1-es lehet. Ekkor legyen $d(x, y)$ az x és y sorozatokban az azonos indexű, eltérő számjegyek száma. Például

$$\begin{aligned} x &= (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots) \\ y &= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots) \end{aligned}$$

esetén $d(x, y) = 4$. Világos, hogy d metrika. □

5.86. Példa. Legyen $\mathbb{R}^\infty$ a végtelen valós értékű sorozatok halmaza.

Tetszőleges $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ és $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ sorozatokra X-ből legyen

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}.$$

Világos, hogy $0 \leq d(x,y) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} - 1 = 2 - 1 = 1$, és $d(x,y) = 0 \iff x = y$. Nyilván $d(x,y) = d(y,x)$ is teljesül. A háromszög-egyenlőtlenség ellenőrzéséhez meg kell mutatni, hogy

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|} = d(x,z) + d(z,y).$$

Ez abból következik, hogy az $\frac{u}{1+u}$ függvény monoton növekvő $u > 0$-ra, és $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$, és ezért

$$\begin{aligned}
\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} &\leq \frac{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \\
&= \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \\
&\leq \frac{|x_i - z_i|}{1 + |x_i - z_i|} + \frac{|z_i - y_i|}{1 + |z_i - y_i|}.
\end{aligned}$$

Megmutattuk tehát, hogy (X,d) metrikus tér. Másrészt bármely $x \neq y$ sorozatra és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra $|\lambda| \neq 1$ esetén

$$d(\lambda x, \lambda y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\lambda|\,|x_i - y_i|}{1 + |\lambda|\,|x_i - y_i|} \neq |\lambda| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} = |\lambda| d(x,y),$$

így az 5.81. Állítás szerint d nem származtatható normából, azaz nem definiálható a téren olyan norma, hogy $d(x,y) = \|x - y\|$ lenne.

Ha az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ sorozatban az x_n elemek csak binárisak (x_n értéke 0 vagy 1) lehetnek, akkor

$$\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x_i = y_i \\ \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad x_i \neq y_i \end{cases}$$

így $d(x,y)$-ból pontosan megmondható az eltérés oka és az is, hogy az x és y melyik komponenseiben tér el egymástól, továbbá

$$0 \leq d(x,y) \leq \frac{1}{2}.$$

Ezért ez a metrika előnyös például átviteli hiba javításánál. □

Egy (X,d) metrikus tér A részhalmazának *lezártján* azt az $[A]$ halmazt értjük, amely az A-beli konvergens sorozatok határértékeit tartalmazza. Ezzel ekvivalens az a megfogalmazás, hogy $x \in [A]$, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $a \in A$, hogy $d(x,a) < \varepsilon$. Nyilván $A \subset [A]$, és ellenőrizhető, hogy $[A]$ zárt halmaz.

Megmutatható, hogy bármely nem teljes metrikus tér beágyazható (lényegében egyértelmű módon) egy teljes metrikus térbe:

5.87. Tétel. *Legyen (X,d) egy nem teljes metrikus tér. Ekkor létezik egy olyan (X^*, d^*) metrikus tér és egy $T\colon X \to X^*$ operátor, amelyre*

1. *(X^*, d^*) teljes metrikus tér,*
2. *T izometria, azaz $d(x,y) = d^*(Tx, Ty)$ minden $x, y \in X$-re,*
3. *$[T(X)] = X^*$, ahol $T(X) = \{T(x)\colon x \in X\}$.*

Az X^* kiterjesztése X-nek izometriától eltekintve egyértelmű, azaz ha is (X', d') teljesíti a fenti tulajdonságokat, akkor (X', d') és (X^*, d^*) izometrikus, azaz létezik $S : (X^*, d^*) \to (X', d')$ ráképezés, amely izometria is.

A fenti tétel által meghatározott (X^*, d^*) kiterjesztést az (X, d) (nem teljes) metrikus tér *teljes burkának* hívjuk.

5.88. Példa. A $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ racionális számok normált tere nem teljes, hiszen irracionális számhoz konvergáló racionális sorozatoknak nincs határértéke a racionális számok terében. A tér teljes burka az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ tér. Másként fogalmazva, $\mathbb{Q}$ lezártja $\mathbb{R}$. $\square$

5.89. Példa. Az 5.53. Példában láttuk, hogy a $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normált tér nem teljes. Megmutatható, hogy a lezártja az $(L^1([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ Banach-tér. $\square$

5.8. Pre-Hilbert-terek

5.90. Definíció. Legyen X egy komplex lineáris tér. Az $X \times X \to \mathbb{C}$ leképezést, amelyet $\langle\cdot,\cdot\rangle$-vel jelölünk, *(komplex) skaláris szorzatnak* (vagy *belső szorzatnak*) nevezzük, ha

1. bármely $x \in X$-re, $\langle x, x\rangle \geq 0$, és $\langle x, x\rangle = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$;
2. bármely $x, y \in X$-re $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (ahol $\overline{\langle y, x\rangle}$ az $\langle y, x\rangle$ komplex szám konjugáltját jelöli);
3. bármely α, β (komplex) skaláris számokra és $x, y, z \in X$ esetén $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

Egy X valós lineáris téren értelmezett *valós skaláris szorzaton* egy olyan $X \times X \to \mathbb{R}$ leképezést értünk, amely a fenti tulajdonságokkal rendelkezik.

Az X komplex (valós) lineáris teret *pre-Hilbert-térnek* vagy *euklideszi-térnek* nevezzük, ha az X-en értelmezve van egy komplex (valós) skaláris szorzat.

5.91. Megjegyzés.

1. Egy X valós lineáris téren értelmezett (valós) skaláris szorzatra a fenti definícióban szereplő 2. tulajdonság egyszerűen csak azt követeli meg, hogy $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ legyen minden $x, y \in X$-re, azaz a valós skaláris szorzat szimmetrikus.
2. Ha X valós lineáris tér, akkor az előző megjegyzés és a skaláris szorzat 3. tulajdonsága alapján a skaláris szorzat lineáris a 2. komponensében is, azaz
$$\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle z, x\rangle + \beta\langle z, y\rangle, \qquad x, y, z \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
3. Ha X komplex lineáris tér, akkor a (komplex) skaláris szorzat additív a második komponensében, hiszen
$$\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.$$
4. Ha X komplex lineáris tér, akkor
$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$$
minden $x, y \in X$-re és $\lambda \in \mathbb{C}$-re.

5. Minden $x \in X$-re $\langle x, 0\rangle = 0$, hiszen a 2. tulajdonság szerint $\langle x, 0\rangle = \langle x, 0+0\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle x, 0\rangle$.

A skaláris szorzás néhány tulajdonsága:

5.92. Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz). *Ha X pre-Hilbert-tér, akkor*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, \qquad x, y \in X.$$

Bizonyítás: Ha $y = 0$, akkor $\langle x, y\rangle = 0$, és ezért a kívánt egyenlőtlenség teljesül.
Legyen $y \ne 0$. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)-re

$$\begin{aligned}
0 &\le \langle x - \lambda y,\ x - \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle -\lambda y, x\rangle + \langle x, -\lambda y\rangle + \langle -\lambda y, -\lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle \lambda y, x\rangle + \overline{\langle -\lambda y, x\rangle} - \lambda \langle y, -\lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \lambda \langle y, x\rangle - \overline{\lambda \langle y, x\rangle} - \lambda\overline{\langle -\lambda y, y\rangle} \\
&= \langle x, x\rangle - 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda \langle y, x\rangle) + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle .
\end{aligned}$$

Legyen $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ azaz $\lambda = \frac{\overline{\langle y,x\rangle}}{\langle y,y\rangle}$. Ekkor $0 \le \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$, amiből a kívánt egyenlőtlenség következik. □

5.93. Tétel. *Egy tetszőleges X pre-Hilbert-téren az*

$$\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}, \qquad \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \langle x, x\rangle^{1/2}$$

leképezés norma.

Bizonyítás: $\|x\| \ge 0$ teljesül. Ha $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = 0$, akkor $x = 0$ a skaláris szorzat tulajdonsága miatt. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ (ill. $\lambda \in \mathbb{R}$). Ekkor

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\overline{\langle \lambda x, x\rangle} = \lambda\overline{\lambda \langle x, x\rangle} = \lambda \cdot \overline{\lambda} \langle x, x\rangle = |\lambda|^2 \langle x, x\rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2 ,$$

azaz $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ teljesül. Végül tekintsük

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Mivel $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \le |\langle x, y\rangle|$, ezért a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség szerint bármely $x, y \in X$-re

$$\|x + y\|^2 \le \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle = (\|x\| + \|y\|)^2 ,$$

és így a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül. Tehát minden pre-Hilbert-tér normált tér is. □

A fenti norma jelölését használva a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség a következő alakban írható:

5.94. Következmény. *Egy tetszőleges X pre-Hilbert-térben*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|, \qquad x, y \in X.$$

5.95. Példa. Tekintsük a valós n-dimenziós vektorok $\mathbb{R}^n$ lineáris terét, legyen $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Lineáris algebrából és analízisből is ismert, hogy az

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{5.6}$$

képlet skaláris szorzatot definiál $\mathbb{R}^n$-n. A skaláris szorzat által definiált norma az euklideszi-norma: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. □

5.96. Példa. Tekintsük a $\mathbb{C}^n$ lineáris teret, a komplex szám-n-esek halmazát. Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Könnyen látható, hogy az (5.6) képlet nem komplex skaláris szorzat, mivel például általában $\sum_{i=1}^n x_i^2$ nem valós szám. Az (5.6) képletet módosítjuk, legyen

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Ellenőrizhető, hogy ez már teljesíti a komplex skaláris szorzatot definiáló mindhárom tulajdonságot. Az általa generált norma: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$. □

5.97. Példa. Tekintsük a $C([a,b],\mathbb{R})$ az $[a,b]$ intervallumon folytonos valós értékű függvények halmazát. Tetszőleges f és g függvényekre $C([a,b],\mathbb{R})$-ből, legyen

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{5.7}$$

Megmutatjuk, hogy a fenti kifejezés skaláris szorzat $C([a,b],\mathbb{R})$-n. Világos, hogy $\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$, és ha $\langle f, f\rangle = 0$, akkor $f = 0$, hiszen ha egy nemnegatív folytonos függvény egy pontban pozitív, akkor az integrálja is pozitív.

Az $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ összefüggés a definícióból nyilván következik.

Végül az

$$\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, h(x)\,dx = \alpha\,\langle f, h\rangle + \beta\,\langle g, h\rangle\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g, h \in C([a,b],\mathbb{R})$$

összefüggés az integrál linearitásából következik. □

5.98. Példa. Tekintsük a $C([a,b],\mathbb{C})$ lineáris teret, az $[a,b]$ intervallumon folytonos komplex értékű függvények halmazát. A $\mathbb{C}^n$ tér skaláris szorzatához hasonlóan kapjuk, hogy az (5.7) képletet módosítva, az

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad f, g \in C([a,b],\mathbb{C}) \tag{5.8}$$

skaláris szorzatot definiál. A skaláris szorzat által definiált norma

$$\|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\;dx\right)^{1/2}, \qquad f \in C([a,b],\mathbb{C}).$$

□

5.99. Példa. Az előző példához hasonló módon tekintsük az $L_2([a,b],\mathbb{C})$ lineáris teret, az $[a,b]$ intervallumon értelmezett olyan komplex értékű és Lebesgue-mérhető f függvények halmazát, amelyekre $\int_a^b |f|^2\,dm < \infty$. Legyen $f,g \in L_2([a,b],\mathbb{C})$. Ekkor $\bar{g}$ és $f\cdot\bar{g}$ is Lebesgue-mérhető, továbbá

$$|f(x)\overline{g(x)}| \le \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right).$$

Ezért

$$\int_a^b |f\cdot\bar{g}|\,dm \le \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f|^2\,dm + \int_a^b |g|^2\,dm\right) < \infty,$$

azaz $f\cdot\bar{g} \in L_2([a,b],\mathbb{C})$.

Az $L_2([a,b],\mathbb{C})$ téren is az (5.8) képlethez hasonlóan

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f\cdot\bar{g}\,dm, \qquad f,g \in L_2([a,b],\mathbb{C})$$

nyilván skaláris szorzat, és az általa definiált norma $\|f\|_2 = \langle f,f\rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |f|^2\,dm\right)^{1/2}$. □

5.100. Példa. Tekintsük a komplex ℓ_2 lineáris teret, azaz azon komplex elemű $(a_1,\dots,a_n,\dots)$ sorozatoknak a halmazát, amelyekre $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2 < \infty$. Legyen $a=(a_i)$, $b=(b_i)\in\ell_2$. Ekkor legyen

$$\langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\overline{b_i}.$$

Mivel $\left|a_i\overline{b_i}\right| \le \frac{1}{2}|a_i|^2 + \frac{1}{2}|b_i|^2$, ezért $\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i\overline{b_i}\right| \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^2 < \infty$, tehát az

$$(a,b) \longmapsto \langle a,b\rangle$$

hozzárendelés $\ell_2\times\ell_2$-t a $\mathbb{C}$-be képezi le. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a képlet egy skaláris szorzatot definiál ℓ_2-n, az általa generált norma pedig $\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2}$. □

5.101. Tétel. *A skaláris szorzat folytonos, azaz*

$$\langle x_n,y_n\rangle \to \langle x,y\rangle, \qquad \textit{ha} \quad x_n\to x,\ y_n\to y.$$

Bizonyítás: Legyen $x_n\to x$, $y_n\to y$, azaz $\|x_n-x\|\to 0$ és $\|y_n-y\|\to 0$, ha $n\to\infty$. Ekkor

$$\begin{aligned}
|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y_n\rangle + \langle x,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \\
&= |\langle x_n-x,y_n\rangle + \langle x,y_n-y\rangle| \\
&\le |\langle x_n-x,y_n\rangle| + |\langle x,y_n-y\rangle| \\
&\le \|x_n-x\|\cdot\|y\| + \|x\|\,\|y_n-y\| \\
&\to 0, \qquad n\to+\infty.
\end{aligned}$$

□

5.102. Tétel (Paralelogramma-egyenlőség). *Ha X pre-Hilbert-tér, akkor a skaláris szorzattal definiált normára*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \qquad x,y \in X.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

□

Az előző állítás alapján ellenőrizhető, hogy egy normált téren definiálható-e olyan skaláris szorzat, amely az adott normát állítja elő.

5.103. Példa. Tekintsük az $L_1([0,1],\mathbb{R})$ lineáris teret az $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|\, dm$ normával. Legyen

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/2, \\ 0, & 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

és

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Világos, hogy

$$(f+g)(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad \text{és} \quad (f-g)(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1/2 \\ 0, & x = 1/2 \\ -1, & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

Így

$$\|f+g\|_1 = 1; \qquad \|f\|_1 = \frac{1}{2}; \qquad \|g\|_1 = \frac{1}{2}; \qquad \|f-g\|_1 = \int_0^1 |f-g|\, dm = 1.$$

Tehát

$$2 = \|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 \ne 2\|f\|_1^2 + 2\|g\|_1^2 = 1,$$

és így a paralelogramma egyenlőség nem teljesül. Következésképpen az L_1 norma nem származhat skaláris szorzatból. □

Az előző példához hasonló módon megmutatható, hogy az ℓ_p és $L_p([a,b],\mathbb{R})$ Banach-terek $p \ne 2$-re nem pre-Hilbert-terek.

5.9. Ortogonális és maximális ortonormált rendszerek pre-Hilbert-terekben

5.104. Definíció. Legyen X pre-Hilbert-tér, $x,y \in X$. Azt mondjuk, hogy x *ortogonális* (merőleges) y-ra (jelölés $x \perp y$) ha $\langle x,y\rangle = 0$. Azt mondjuk, hogy egy x vektor merőleges az $A \subset X$ halmazra ($x \perp A$), ha $x \perp y$ minden $y \in A$-ra.

5.105. Állítás. *Legyen X komplex (valós) pre-Hilbert-tér.*

1. *Ha $x \perp y$, akkor $y \perp x$.*

2. *Legyen* $A = \{\alpha x + \beta y \colon \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ *(ill.* $A = \{\alpha x + \beta y \colon \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$*). Ha* $z \perp x$ *és* $z \perp y$*, akkor* $z \perp A$.

Bizonyítás: Az 1. állítás triviálisan teljesül a skaláris szorzat 2. tulajdonságából.

A 2. állítás következik az

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle = 0$$

összefüggésből. □

5.106. Tétel (Pitagorasz). *Egy pre-Hilbert-térben ha* $x \perp y$*, akkor a skaláris szorzat általt generált normában*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Bizonyítás:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

□

5.107. Definíció. Legyen X egy pre-Hilbert-tér és tekintsük az X egy S részhalmazát. Azt mondjuk, hogy S *ortogonális rendszer*, ha S elemei páronként ortogonálisak, azaz bármely különböző $x, y \in S$-re $x \perp y$. Ha az S elemei ortogonálisak, és $\|x\| = 1$ minden $x \in S$-re, akkor azt mondjuk hogy S *ortonormált rendszer* (vagy ortonormált vektorok halmaza).

5.108. Tétel. *Legyen* X *pre-Hilbert-tér és legyen* S *egy ortonormált rendszer* X *-ben, amelynek a nulla vektor nem eleme. Ekkor* S *lineárisan független halmaz.*

Bizonyítás: Legyen $x_1, \dots, x_k \in S$ tetszőleges véges sok eleme az S halmaznak. Legyen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ (ill. $\mathbb{R}$). Ekkor

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$$

esetén igaz, hogy

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k, x_i\rangle = 0, \qquad i = 1, \dots, k.$$

Tehát

$$\alpha_1 \langle x_1, x_i\rangle + \alpha_2 \langle x_2, x_i\rangle + \dots + \alpha_k \langle x_k, x_i\rangle = 0, \qquad i = 1, \dots, k.$$

Legyen $i = 1$. Ekkor

$$\alpha_1 \langle x_1, x_i\rangle = 0 \quad \text{ugyanis} \quad \langle x_j, x_1\rangle = 0, \qquad j \neq 1.$$

Ebből következik, hogy $\alpha_1 = 0$. Hasonlóan $\alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Tehát $(x_1, \dots, x_k)$ lineárisan független vektorok. Ez pedig azt jelenti, hogy az S vektorhalmaz bármely véges sok vektora független, és így S is független vektorrendszer. □

5.109. Megjegyzés. A lineáris algebrából ismert Gram–Schmidt-eljárással bármely n elemszámú lineárisan független vektorhoz kiválasztható olyan n db ortonormált vektor, hogy a két vektorrendszer ugyanazt a teret feszíti ki.

5.110. Definíció. Legyen A egy ortonormált halmaz az X pre-Hilbert-térben. Azt mondjuk, hogy az A ortonormált halmaz *maximális (teljes)*, ha nincs másik olyan A-tól különböző ortonormált halmaz, amely tartalmazza A-t.

Megmutatható a következő eredmény:

5.111. Tétel. *Legyen X egy pre-Hilbert-tér nem triviális (azaz X-nek a zéró elemen kívül más eleme is van). Ekkor*

1. *Létezik (valójában több is) maximális ortonormált halmaz X-ben.*
2. *Bármely ortonormált halmaz kiterjeszthető maximális ortonormált halmazzá X-ben.*

A maximális halmazrendszer fogalma ekvivalens a következő tulajdonsággal:

5.112. Állítás. *Legyen A ortonormált halmaz az X pre-Hilbert-térben. Az A halmaz akkor és csak akkor maximális, ha bármely $x \in X$ elemre $x \perp A$-ból következik, hogy x zéró eleme X-nek.*

Bizonyítás:
Legyen A maximális, és tegyük fel, hogy van olyan $x \neq 0$ eleme X-nek, amelyre $x \perp A$. Ekkor

$$A \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$$

szintén ortonormált rendszer, amelynek A valódi részhalmaza. Ez ellentmond annak, hogy A maximális ortonormált halmaz.

Fordítva tegyük fel, hogy A olyan, hogy $x \perp A$-ból következik, hogy $x = 0$. Ha ekkor A nem a maximális lenne, akkor volna olyan $B \subset X$ halmaz, hogy B maximális és A valódi részhalmaza B-nek. Így van olyan $y \in B$, hogy $y \notin A$. Továbbá $y \perp A$, és így a feltétel szerint $y = 0$, ami ellentmondás. □

5.10. Hilbert-terek

Legyen X pre-Hilbert-tér a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzattal, $\| \cdot \|$ a skaláris szorzat által generált norma.

A pre-Hilbert-terek között kiemelkedő fontosságúak azok a terek, amelyek teljes normált terek is.

5.113. Definíció. Legyen (x_n) egy sorozat az X pre-Hilbert-térben. Azt mondjuk, hogy (x_n) *Cauchy-sorozat*, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N = N(\varepsilon)$, hogy

$$\|x_n - x_m\| = \sqrt{\langle x_n - x_m, x_n - x_m \rangle} < \varepsilon,$$

ha $n, m > N$.

Azt mondjuk, hogy az X pre-Hilbert-tér *Hilbert-tér*, ha X a rajta értelmezett skaláris szorzat által generált norma szerint teljes, azaz egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

A következő központi jelentőségű tételt bizonyítás nélkül közöljük:

5.114. Tétel. *Legyen Λ egy index halmaz, $A = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ egy ortonormált halmaz az X Hilbert-térben. Ekkor a következő álllítások ekvivalensek:*

1. *A maximális ortonormál rendszer X-ben.*
2. *Bármely $x \in X$-re, $x \perp A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$.*
3. *Bármely $x \in X$-re $x = \sum\limits_{\alpha \in \Lambda} \langle x, x_\alpha \rangle x_\alpha$.*

4. Az A halmaz által generált altér lezártja maga az X Hilbert-tér.

5. $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x, x_\alpha\rangle|^2$ *bármely $x \in X$-re. Ezt az összefüggést* Parseval-azonosságnak *nevezzük.*

6. Tetszőleges $x, y \in X$ elemekre $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in\Lambda} \langle x, x_\alpha\rangle \langle x_\alpha, y\rangle$.

Az $\langle x, x_\alpha\rangle$ $(\alpha \in \Lambda)$ skaláris mennyiségeket az x vektor *általánosított Fourier-együtthatóinak* vagy csak egyszerűen *Fourier-együtthatóinak* nevezzük.

Ha Λ a fenti tételben megszámlálható, akkor az A halmaz a tétel 3. pontja értelmében egyben Schauder-bázis a térben.

5.115. Példa. Az 5.55. Példa szerint az $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{C}^n$ pre-Hilbert-terek teljesek, azaz Hilbert-terek. □

Az 5.59. Tételből rögtön következik:

5.116. Tétel. *Az ℓ_2 tér teljes, azaz Hilbert-tér.*

Most megadunk egy ortonormált rendszert ℓ_2-ben. Legyen

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1, 0, 0, 0, \ldots) \\ e_2 & = & (0, 1, 0, 0, \ldots) \\ e_3 & = & (0, 0, 1, 0, \ldots) \\ \vdots & & \quad\quad \vdots \end{array}$$

5.117. Állítás. *Az $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ vektorrendszer maximális ortonormált halmaz ℓ_2-ben.*

Bizonyítás: Nyilván

$$\langle e_i, e_i\rangle = 1 \qquad \text{és} \qquad \langle e_i, e_j\rangle = 0, \qquad i \neq j,$$

azaz S ortonormált rendszer.

Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$, olyan vektor, amely merőleges S-re. De ekkor $0 = \langle x, e_i\rangle = x_i$ minden $i = 1, 2, \ldots$-re, tehát x a zeró vektor. Ezért az 5.114. Tétel szerint S maximális ortonormált halmaz ℓ_2-ben. □

Az 5.58. Tételt $p = 2$-re alkalmazva kapjuk:

5.118. Tétel. *Az $L_2([a, b], \mathbb{C})$ tér Hilbert-tér.*

5.119. Példa. Legyen X egy valós pre-Hilbert-tér, $y \in X$ rögzített, és tekinstük a

$$T\colon X \to \mathbb{R}, \qquad Tx = \langle x, y\rangle$$

funkcionált. Ekkor T egy korlátos lineáris funkcionál, amelyre $\|T\| = \|y\|$.

T linearitása következik a skaláris szorzat definíciójából. Másrészt a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$|Tx| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

amiből $\|T\| \leq \|y\|$ következik. Továbbá $|Ty| = \langle y, y\rangle = \|y\|^2$, miből kapjuk, hogy $\|T\| = \|y\|$. □

A következő tétel szerint Hilbert-terekben minden korlátos lineáris funkcionál skaláris sorzattal adható meg.

5.120. Tétel (Riesz reprezentációs tétel Hilbert-terekben). *Legyen X egy valós Hilbert-tér, $T\colon X \to \mathbb{R}$ egy korlátos lineáris funkcionál. Ekkor létezik olyan $y \in X$, hogy*

$$T\colon X \to \mathbb{R}, \qquad Tx = \langle x, y\rangle,$$

továbbá $\|T\| = \|y\|$.

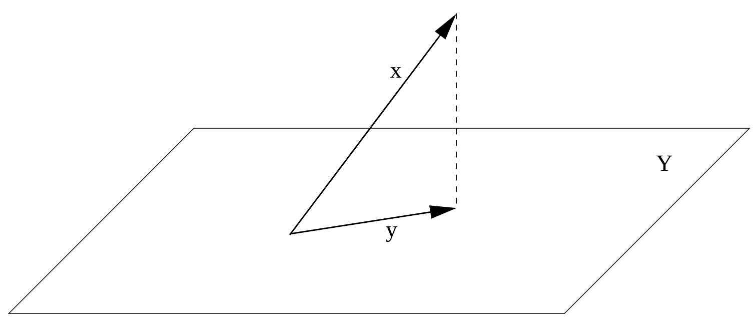
5.11. Egy minimum probléma

Legyen adott egy X komplex pre-Hilbert-tér, a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ slakáris szorzattal, $\|\cdot\|$ a skaláris szorzat által definiált norma.

Legyen Y egy altér X-ben, $x \notin Y$. Azt mondjuk, hogy az $y \in Y$ vektor az x vektor *legjobb közelítése Y-ban*, ha

$$\|x - y\| \le \|x - z\|, \qquad z \in Y.$$

Más szóval y minimalizálja a $\min\limits_{z \in Y} \|x - z\|$ kifejezést. Az y vektort az x vektor Y altérre vonatkozó *vetületének* is nevezzük.



5.121. Tétel. *Legyen X egy pre-Hilbert-tér, Y egy altér X-ben, $x \notin Y$. Ekkor y akkor és csak akkor az x legjobb közelítése az Y altérben, ha $x - y$ ortogonális az Y altérre.*

Bizonyítás: 1. Tegyük fel, hogy y az x legjobb közelítése az Y altérben. Rögzítsünk egy tetszőleges $z \ne 0$ vektort Y-ban. Legyen

$$\alpha = \frac{\langle x - y, z\rangle}{\langle z, z\rangle},$$

és tekintsük az $y + \alpha z \in Y$ vektort. Erre y minimum tulajdonsága és α definíciója miatt teljesül

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y\rangle \\
&\le \langle x - y - \alpha z, x - y - \alpha z\rangle \\
&= \langle x - y, x - y\rangle - \alpha\langle z, x - y\rangle - \bar{\alpha}\langle x - y, z\rangle + |\alpha|^2\langle z, z\rangle \\
&= \|x - y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha\langle z, x - y\rangle) + |\alpha|^2\langle z, z\rangle \\
&= \|x - y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\langle x - y, z\rangle}{\langle z, z\rangle}\langle z, x - y\rangle\right) + \frac{|\langle x - y, z\rangle|^2}{(\langle z, z\rangle)^2}\langle z, z\rangle \\
&= \|x - y\|^2 - \frac{|\langle x - y, z\rangle|^2}{\langle z, z\rangle}.
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\langle x - y, z\rangle = 0$, azaz $x - y$ merőleges Y-ra.

2. Tegyük fel, hogy $\langle x-y, z\rangle = 0$ minden $z \in Y$-ra. Legyen $w \in Y$ rögzített. Ekkor $y-w \in Y$, ezért $\langle x-y, y-w\rangle = 0$. Így a Pitagorasz-tétel szerint

$$\|x-y+y-w\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-w\|^2,$$

azaz $\|x-y\| < \|x-w\|$ akkor és csak akkor, ha $y \neq w$. □

Egydimenziós alteret tekintve a tételből következik rögtön az alábbi eredmény:

5.122. Állítás. *Legyen X komplex pre-Hilbert-tér, $a, b \in X$, $b \neq 0$. Ekkor*

1. *$\lambda \in \mathbb{C}$ akkor és csak akkor minimalizálja az $\|a-\lambda b\|_2$ kifejezést, ha $\langle a-\lambda b, b\rangle = 0$, azaz $a-\lambda b$ ortogonális b-re.*

2. *$\lambda \in \mathbb{C}$ pontosan akkor minimalizálja az $\|a-\lambda b\|_2$ kifejezést, ha*

$$\lambda = \frac{\langle a, b\rangle}{\langle b, b\rangle}.$$

Speciális esetekben kapjuk az alábbi állításokat:

5.123. Állítás. *Legyen $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$. Ekkor*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - \lambda y_k|^2$$

értéke pontosan akkor minimális, ha

$$\lambda = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k}{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2}.$$

5.124. Állítás. *Legyen $f, g \in L_2([a,b], \mathbb{C})$, $g \neq 0$. Ekkor az*

$$\int_a^b |f(t) - \lambda g(t)|^2 \, dt$$

érték pontosan akkor minimális, ha

$$\lambda = \frac{\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt}{\int_a^b |g(t)|^2 \, dt}.$$

Véges dimenziós Y altérre a következő eredmény adódik az 5.121. Tételből:

5.125. Tétel. *Legyen X egy pre-Hilbert-tér, Y n-dimenziós altér X-ben, amelynek $y_1, \dots, y_n$ egy bázisa. Legyen $x \notin Y$. Ekkor*

$$y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$$

akkor és csak akkor az x legjobb közelítése az Y altérben, ha az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ skalárok teljesítik az

$$\begin{array}{ccccccccc} \langle y_1, y_1\rangle\alpha_1 & + & \langle y_2, y_1\rangle\alpha_2 & + & \cdots & + & \langle y_n, y_1\rangle\alpha_n & = & \langle x, y_1\rangle \\ \langle y_1, y_2\rangle\alpha_1 & + & \langle y_2, y_2\rangle\alpha_2 & + & \cdots & + & \langle y_n, y_2\rangle\alpha_n & = & \langle x, y_2\rangle \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \langle y_1, y_n\rangle\alpha_1 & + & \langle y_2, y_n\rangle\alpha_2 & + & \cdots & + & \langle y_n, y_n\rangle\alpha_n & = & \langle x, y_n\rangle \end{array} \tag{5.9}$$

ún. normálegyenleteket.

Bizonyítás: Az 5.121. Tétel szerint y akkor és csak akkor a legjobb közelítése x-nek, ha

$$\langle x - (\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n), y_j\rangle = 0$$

minden $j = 1, \dots, n$-re. Ezt átrendezve kapjuk az (5.9) egyenleteket. □

Ha Y bázisa ortonormált, akkor a fenti eredményből rögtön kapjuk az alábbi következményt.

5.126. Következmény. *Legyen X egy pre-Hilbert-tér, Y egy n-dimenziós altér X-ben, amelynek $y_1, \dots, y_n$ egy ortonormált bázisa. Legyen $x \notin Y$. Ekkor*

$$y = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$$

akkor és csak akkor az x legjobb közelítése az Y altérben, ha

$$\alpha_j = \langle x, y_j\rangle, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Kaptuk tehát, hogy ha Y egy maximális ortonormált rendszer véges sok eleme által generált altér egy X Hilbert-térben, akkor x legjobb közelítésének együtthatói az x Fourier-együtthatói.