

## 6. Fourier-elmélet

### 6.1. Komplex trigonometrikus Fourier-sorok

Tekintsük az  $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  Hilbert-teret, azaz azoknak a komplex értékű  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  függvényeknek a halmazát, amelyek mérhető és négyzetesen integrálhatóak  $[0, 2\pi]$ -n, azaz  $\int_0^{2\pi} |f|^2 dm < \infty$ . Mint azt már korábban láttuk, a skaláris szorzat definíciója ezen a téren

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f \cdot \bar{g} dm.$$

A továbbiakban ebben a fejezetben a Lebesgue-integrálokat is egyszerűen  $\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)} dt$ -vel jelöljük.

Tekintsük a  $[0, 2\pi]$  intervallumon definiált  $t \mapsto e^{ikt}$  komplex értékű függvények rendszerét:

$$\tilde{S} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ e^{ikt} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \quad (6.1)$$

Megmutatjuk, hogy  $\tilde{S}$  ortogonális rendszer  $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ -ben.

**6.1. Állítás.** *A (6.1) képlettel definiált  $\tilde{S}$  függvényrendszer ortogonális rendszer az  $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  Hilbert-térben.*

**Bizonyítás:** Legyen  $k \neq \ell$ , és tekintsük következő skaláris szorzatokat:

$$\begin{aligned} \langle e^{ikt}, e^{i\ell t} \rangle &= \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-i\ell t} dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-i\ell t} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)t} dt \\ &= \frac{1}{i(k-\ell)} \left[ e^{i(k-\ell)t} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{i(k-\ell)} \left[ e^{i(k-\ell)2\pi} - 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

Tehát  $\tilde{S}$  egy ortogonális rendszert alkot  $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ -ben. □

Számítsuk ki  $\tilde{S}$  elemeinek normáit:

$$\|e^{ikt}\|_2 = \sqrt{\langle e^{ikt}, e^{ikt} \rangle} = \left( \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-ikt} dt \right)^{1/2} = \left( \int_0^{2\pi} 1 dt \right)^{1/2} = \left( \int_0^{2\pi} dt \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}, \quad (6.2)$$

ha  $k \in \mathbb{Z}$ . Ezért definiáljuk az

$$S_{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \quad (6.3)$$

függvényrendszert. Ez már ortonormált rendszer lesz  $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ -ben, sőt belátható, hogy maximális is:

**6.2. Tétel.** *A (6.3) képlettel definiált  $S_{\mathbb{C}}$  halmazrendszer maximális ortonormált rendszer az  $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  Hilbert-térben.*

Alkalmazható tehát az  $S_{\mathbb{C}}$  függvényrendszerre az 5.113. Tétel, azaz például az  $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  tér elemeit az  $S_{\mathbb{C}}$  rendszerre vonatkozó Fourier-sorba fejthetjük, és a Fourier-sor konvergál az  $L_2$  normában az adott függvényhez. Az 5.113. Tétel jelölését használva:

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}.$$

Ennek megfelelően az  $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  komplex trigonometrikus Fourier-során az

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad (6.4)$$

végtelen sort értjük, ahol a  $c_k$  Fourier-együtthatók képlete

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (6.5)$$

Azt mondjuk, hogy a  $t \in [0, 2\pi]$  pontban az  $f$  Fourier-sora konvergens, ha az

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

szimmetrikus részletösszegek sorozata konvergens,  $n \rightarrow \infty$  esetén. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény Fourier-sora *normában* (vagy *négyzetintegrálban*) *konvergál* az  $f$  függvényhez, ha

$$\|f - s_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t) - s_n(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Világos az eddigiek alapján, hogy a négyzetintegrálban való konvergenciából nem következik a pontonkénti konvergencia.

A definícióból, a skaláris szorzat linearitásából és a konvergens sorok tulajdonságaiból rögtön következik, hogy a Fourier-sor számítása lineáris művelet az alábbi értelemben:

**6.3. Állítás.** Legyen  $f_1, f_2 \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Ekkor

1. az  $f_1 + f_2$  függvény Fourier-sora az  $f_1$  és  $f_2$  függvények Fourier-sorainak összege,
2. az  $\alpha f_1$  függvény Fourier-sora az  $f_1$  függvény Fourier-sorának  $\alpha$ -szorosa.

Az  $S_{\mathbb{C}}$  halmazrendszer maximalitásából és az 5.113. Tételből rögtön következik az alábbi eredmény.

**6.4. Tétel.** Legyen  $S_{\mathbb{C}}$  a (6.3) képlettel definiált halmazrendszer. Ekkor a következő állítások teljesülnek.

1. Ha valamely  $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  függvényre

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

azaz az  $f$  függvény Fourier-együtthatói nullák, más szóval az  $f$  merőleges az  $S_{\mathbb{C}}$  halmazra ( $f \perp S_{\mathbb{C}}$ ), akkor  $f(t) = 0$ , m.m.  $t \in [0, 2\pi]$ -re.

2. Az  $f$  függvény Fourier-sora négyzetesen konvergál az  $f$  függvényhez, azaz

$$\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \right|^2 dt \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

3. Teljesül a Parseval-azonosság, azaz

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \left( = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \right).$$

Bizonyítás nélkül tekintsük az alábbi fontos eredményt.

**6.5. Tétel (Riesz–Fisher-tétel).** *Tetszőleges olyan  $\gamma_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , konstansokhoz, amelyekre*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 < \infty$$

*teljesül, létezik olyan  $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  függvény, hogy*

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt (= c_k)$$

*azaz  $\gamma_0, \gamma_{\pm 1}, \gamma_{\pm 2}, \dots$  az  $f$  függvény Fourier-együtthatói, és*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt}$$

*négyzetintegrálban konvergál  $f$ -hez.*

A Riesz–Fisher-tételt alkalmazva kapjuk, hogy ha egy  $f \in L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  függvényhez hozzárendeljük a Fourier-együtthatóinak  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  (két irányban végtelen) sorozatát, akkor egy lineáris izomorfiát kapunk a  $L_2([0, 2\pi], \mathbb{C})$  és a négyzetesen összegezhető két irányban végtelen sorozatok Banach-tere között. Ha ebben a térben egy  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sorozat normáját a

$$\|(c_k)\| = \sqrt{2\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}$$

képlettel értelmezzük, akkor a fenti lineáris izomorfia izometria is lesz a Parseval-formula miatt.

**6.6. Megjegyzés.** Ha  $f$  és  $g$  két  $2\pi$  szerint periodikus függvény, akkor

$$\int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

ezért az  $S_{\mathbb{C}}$  függvényrendszer az  $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  Hilbert-téren is maximális ortonormált, továbbá az  $S_{\mathbb{C}}$ -re vonatkozó Fourier-sor az  $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  Hilbert-téren is (6.4) alakú lesz, ahol a  $c_k$  Fourier-együtthatókat a

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

képlettel számoljuk ki.

**6.7. Megjegyzés.** Az előbbi megfontolást általánosíthatjuk. Ha  $f$  és  $g$  két  $2\pi$  szerint periodikus függvény, akkor az  $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)$  és  $\tilde{g}(t) = g\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)$  összetett függvények  $(b-a)$  szerint periodikus függvények lesznek, és

$$\int_a^b \tilde{f}(t) \overline{\tilde{g}(t)} dt = \int_a^b f\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right) \overline{g\left(\frac{2\pi t}{b-a}\right)} dt = \frac{b-a}{2\pi} \int_{\frac{2\pi a}{b-a}}^{\frac{2\pi b}{b-a}} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{b-a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

speciálisan,

$$\|\tilde{f}\|_{L_2([a,b], \mathbb{C})}^2 = \frac{b-a}{2\pi} \|f\|_{L_2([0,2\pi], \mathbb{C})}^2.$$

Ezért az  $S_{\mathbb{C}}$  halmaz elemeit a  $\sqrt{\frac{2\pi}{b-a}}$  együtthatóval megszorozva és új változót bevezetve tekintsük az  $[a, b]$  intervallumon értelmezett  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{ik \frac{2\pi}{b-a} t}$  függvényekből álló

$$S_{[a,b]} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{ik \frac{2\pi}{b-a} t} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

függvényrendszert. Ez maximális ortonormált rendszer lesz az  $L_2([a, b], \mathbb{C})$  Hilbert-téren. Egy  $f \in L_2([a, b], \mathbb{C})$  függvény Fourier-során ezért az

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{2\pi}{b-a} t}$$

végtelen sort értjük, ahol a  $c_k$  Fourier-együtthatók képlete

$$c_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) e^{-ik \frac{2\pi}{b-a} t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A 6.4. Tétel értelemszerűen kiterjeszthető  $L_2([a, b], \mathbb{C})$ -re.

## 6.2. Valós trigonometrikus Fourier-sorok

Tekintsük az  $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  Hilbert-teret. Legyen

$$S^* \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos kx, \sin kx, \dots\}$$

a  $[-\pi, \pi]$ -n értelmezett függvények halmaza. Megmutatjuk, hogy az  $S^*$  halmaz ortogonális rendszer  $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ -ben.

**6.8. Állítás.** *Az  $S^*$  függvényhalmaz ortogonális rendszer az  $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  Hilbert-térben.*

**Bizonyítás:** Az állítás direkt módon is könnyen belátható, de most mi az  $S^*$  ortogonalitását az előző szakaszban bevezetett  $\tilde{S}$  függvényhalmaz ortogonalitását felhasználva indokoljuk.

Legyen  $k \in \mathbb{N}$ . A

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \quad \text{és} \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

Euler-képletek értelmében  $\sin kx$  és  $\cos kx$  lineáris kombinációja az  $e^{ikx}$  és  $e^{-ikx}$  függvényeknek. Ez persze fordítva is teljesül, az  $e^{ikx}$  és  $e^{-ikx}$  függvények is felírhatók  $\sin kx$  és  $\cos kx$  lineáris kombinációjaként. Ezért az 5.104. Állítás szerint, ha egy függvény ortogonális az  $e^{ikx}$  és  $e^{-ikx}$  függvényekre, akkor ortogonális a  $\sin kx$  és  $\cos kx$  függvényekre is. Ezért a 6.6. Megjegyzést alkalmazva kapjuk,  $\sin kx$  és  $\cos kx$  is ortogonális bármely  $e^{ilx}$  függvényre, ahol  $|l| \neq k$ . De ekkor a fentiekből következik, hogy  $\sin kx$  és  $\cos kx$  ortogonális bármely  $\sin lx$  és  $\cos lx$  függvényre, valamint a konstans 1 függvényre is. Most már csak azt kell belátni, hogy  $\sin kx$  és  $\cos kx$  egymásra is ortogonális. A 6.1. Állítás és (6.2) alapján kapjuk

$$\begin{aligned} \langle \cos kx, \sin kx \rangle &= \left\langle \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4i} \left( \langle e^{ikx}, e^{ikx} \rangle - \langle e^{ikx}, e^{-ikx} \rangle + \langle e^{-ikx}, e^{ikx} \rangle - \langle e^{-ikx}, e^{-ikx} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4i} (2\pi - 0 + 0 - 2\pi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítás teljes. □

Számítsuk ki  $S^*$  elemeinek normáját. Legyen  $k \neq 0$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \|\cos kx\|_2 &= \left( \left\langle \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right\rangle \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \langle e^{ikx}, e^{ikx} \rangle + \langle e^{ikx}, e^{-ikx} \rangle + \langle e^{-ikx}, e^{ikx} \rangle + \langle e^{-ikx}, e^{-ikx} \rangle \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} (2\pi + 0 + 0 + 2\pi)^{1/2} \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Hasolóan kapjuk, hogy

$$\|\sin kx\|_2 = \left( \left\langle \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}, \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right\rangle \right)^{1/2} = \sqrt{\pi},$$

valamint a konstans 1 függvény normája

$$\|1\|_2 = \left( \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx \right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Kaptuk tehát a következő eredményt:

**6.9. Állítás.** Az

$$S_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\} \quad (6.6)$$

függvényrendszer ortonormált rendszer az  $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  Hilbert-térben.

Az 5.113. Tétel szerint az  $L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  tér elemeit az  $S_{\mathbb{R}}$  rendszerre vonatkozó Fourier-sorba fejthetjük, és a Fourier-sor konvergál az  $L_2$  normában az adott függvényhez. Az 5.113. Tétel jelölését használva:

$$f(x) \sim \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle f(x), \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}.$$

Ennek megfelelően az  $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  valós trigonometrikus Fourier-során az

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (6.7)$$

végtelen sort értjük, ahol az  $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$  Fourier-együtthatók képlete

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, \dots, n, \dots \quad (6.8)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots \quad (6.9)$$

Az 5.113. Tételből rögtön következik a 6.4. Tétel valós Fourier-sorokra vonatkozó alakja.

**6.10. Tétel.** Legyen  $S_{\mathbb{R}}$  a (6.6) képlettel definiált halmazrendszer. Ekkor

1. Ha valamely  $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  függvényre

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kx \, dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kx \, dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

azaz az  $f$  függvény összes Fourier-együtthatója nulla, más szóval az  $f$  merőleges az  $S_{\mathbb{R}}$  halmazra, akkor  $f(x) = 0$ , m.m.  $x \in [-\pi, \pi]$ -re.

2. Az  $f$  függvény Fourier-sora négyzetintegrálban konvergál az  $f$  függvényhez, azaz

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

3. Parseval-azonosság:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx.$$

A Riesz–Fisher-tétel valós Fourier-sorokra vonatkozó alakja:

**6.11. Tétel (Riesz-Fischer tétel).** Tetszőlegesen előírt  $a_0, a_k, b_k$  ( $k \geq 1$ ) valós számokhoz, amelyekre

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

van olyan  $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  függvény, hogy  $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots, b_1, \dots, b_k, \dots$  az  $f$  függvénynek az  $S_{\mathbb{R}}$  rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói.

A 6.7. Megjegyzésnek megfelelően egy tetszőleges  $[-L, L]$  halmazon értelmezett valós függvények értelmezhetjük a Fourier-sorát.

**6.12. Megjegyzés.** Tekintsük a  $[-L, L]$  intervallumon értelmezett

$$S_{\mathbb{R}, L} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\cos \frac{\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\cos \frac{2\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{2\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \dots, \frac{\cos \frac{k\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \frac{\sin \frac{k\pi x}{L}}{\sqrt{L}}, \dots \right\}$$

függvényrendszert. Ez maximális ortonormált rendszer lesz az  $L_2([-L, L], \mathbb{R})$  Hilbert-térben. Egy  $f \in L_2([-L, L], \mathbb{R})$  függvény Fourier-során az

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (6.10)$$

végtelen sort értjük, ahol az  $a_k, b_k$  Fourier-együtthatók képlete

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} \, dx, & k = 0, 1, \dots, \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} \, dx, & k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy valós függvényekre a komplex trigonometrikus Fourier-sor egybeesik a valós trigonometrikus Fourier-sorral.

**6.13. Állítás.** Legyen  $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ . Ekkor  $f$ -nek az  $S_{\mathbb{C}}$  és az  $S_{\mathbb{R}}$  rendszerekre vonatkozó Fourier-sora megegyezik.

**Bizonyítás:**

Legyen  $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  valós függvény, és legyenek a  $c_k$ ,  $a_k$  és  $b_k$  konstansok a (6.5), (6.8) és (6.9) képletekkel definiálva. Ekkor az  $f$  komplex Fourier-sora

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}).$$

Másrészt az Euler-azonosság alapján

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku du - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku du$$

és

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{iku} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku du + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku du = \overline{c_k},$$

így

$$c_{-k} e^{-ikx} = \overline{c_k e^{ikx}} = \overline{c_k e^{ikx}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ezt felhasználva

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + \overline{c_k e^{ikx}}) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} (c_k e^{ikx}).$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} (c_k e^{ikx}) &= 2 \operatorname{Re} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku du - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku du \right) (\cos kx + i \sin kx) \right] \\ &= \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos ku du \right) \cos kx + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin ku du \right) \sin kx \\ &= a_k \cos kx + b_k \sin kx, \end{aligned}$$

továbbá

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Ezért

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

□

Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény Fourier-sora *tiszta szinuszos sor*, ha csak szinuszos tagokat tartalmaz, azaz  $a_k = 0$  minden  $k = 0, 1, 2, \dots$ -re. Ha pedig  $f$  Fourier-sora csak koszinuszos tagokat tartalmaz, azaz  $b_k = 0$  minden  $k = 1, 2, \dots$ -re, akkor azt mondjuk, hogy a Fourier-sor *tiszta koszinuszos sor*.

**6.14. Állítás.** Legyen  $f \in L_2([-L, L], \mathbb{R})$ .

1. Ha  $f$  páratlan függvény, akkor a Fourier-sora tiszta szinuszos sor.
2. Ha  $f$  páros függvény, akkor a Fourier-sora tiszta koszinuszos sor.

**Bizonyítás:** 1. Tegyük fel, hogy  $f$  páratlan. Ekkor az  $f(x) \cos \frac{k\pi x}{L}$  függvény is páratlan, ezért

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Ha  $f$  páros, akkor az  $f(x) \sin \frac{k\pi x}{L}$  függvény lesz páratlan, ezért

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

□

**6.15. Példa.** Tekintsük a  $2\pi$  szerint periodikus  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amelyre

$$f(x) = x, \quad \text{ha} \quad -\pi \leq x < \pi.$$

Fejtsük  $f$ -et Fourier-sorba!

Vegyük észre, hogy  $f$  páratlan függvény, így csak a szinuszos tagok együtthatóit kell kiszámolni:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx.$$

Parciális integrálással kapjuk

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx &= \left[ -x \frac{\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \\ &= \left[ -x \frac{\cos kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k} \left[ \frac{\sin kx}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\pi \frac{\cos k\pi}{k} + (-\pi) \frac{\cos(-k\pi)}{k} + \frac{1}{k^2} \sin k\pi - \frac{1}{k^2} \sin(-k\pi) \\ &= -\frac{2\pi}{k} \cos k\pi. \end{aligned}$$

Tehát

$$b_k = -\frac{2}{k} \cos k\pi = -\frac{2}{k} (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

és így

$$f(x) \sim 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right).$$

□

**6.16. Példa.** Tekintsük most a  $2L$  szerint periodikus  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amelyre

$$f(x) = x, \quad \text{ha} \quad -L \leq x < L.$$

Az előző példához hasonló módon végigszámítható, hogy

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \sin \frac{k\pi x}{L} dx = -\frac{2L}{k\pi} (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

így

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{\sin \frac{2\pi x}{L}}{2} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{L}}{3} - \frac{\sin \frac{4\pi x}{L}}{4} + \dots \right).$$



Ezt az eredményt megkaphatjuk úgy is, hogy definiáljuk a

$$g(t) = f\left(\frac{L}{\pi}t\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

függvényt. Ekkor  $g$   $2\pi$  szerint periodikus és  $g(t) = \frac{L}{\pi}t$ , ha  $t \in [-\pi, \pi)$ , így az előző példából is megkapható a sorfejtés.  $\square$

**6.17. Példa.** Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan  $2\alpha$  szerint periodikus függvény, amelyre

$$f(x) = \sin x, \quad -\alpha < x < \alpha,$$

ahol  $\alpha$  olyan valós szám, amelyre  $\alpha > 0$  és  $\alpha \neq k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Mivel  $f$  páratlan függvény, a Fourier-sora csak szinuszos tagokat tartalmaz, amelyek együtthatói  $b_k = b_k(\alpha)$  és

$$\begin{aligned} b_k(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin x \sin \frac{k\pi x}{\alpha} dx \\ &= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\left(\frac{k\pi}{\alpha} - 1\right)x - \cos\left(\frac{k\pi}{\alpha} + 1\right)x dx \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left[ \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{\alpha} - 1\right)x}{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} - \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{\alpha} + 1\right)x}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1} \right]_{x=-\alpha}^{x=\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\sin(k\pi - \alpha)}{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} - \frac{\sin(k\pi + \alpha)}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\sin k\pi \cos \alpha - \cos k\pi \sin \alpha}{\frac{k\pi}{\alpha} - 1} - \frac{\sin k\pi \cos \alpha + \cos k\pi \sin \alpha}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{(-1)^k \sin \alpha}{1 - \frac{k\pi}{\alpha}} - \frac{(-1)^k \sin \alpha}{\frac{k\pi}{\alpha} + 1} \right) \\ &= \frac{(-1)^k \sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{k\pi}{\alpha} + 1 - 1 + \frac{k\pi}{\alpha}}{\left(1 - \frac{k\pi}{\alpha}\right)\left(\frac{k\pi}{\alpha} + 1\right)} \\ &= (-1)^k \sin \alpha \frac{2k\pi}{\alpha^2 - (k\pi)^2}. \end{aligned}$$

Tehát az  $f$  függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim 2\pi \sin \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\alpha^2 - (k\pi)^2} \sin kx.$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor  $\alpha \rightarrow \pi$ . Ekkor  $k = 1$ -re a L'Hospital-szabályt alkalmazva kapjuk

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} b_1(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{-2\pi \sin \alpha}{\alpha^2 - \pi^2} = \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{-2\pi \cos \alpha}{2\alpha} = 1,$$

egyébként pedig

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} b_k(\alpha) = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Tehát a Fourier-sor együtthatói tartanak a  $2\pi$  periodikus  $\sin x$  függvény Fourier-sorának együtthatóihoz.  $\square$

### 6.3. Valós Fourier-sorok pontonkénti konvergenciája

**6.18. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvény *szakaszonként folytonosan differenciálható*, ha bármely korlátos  $[a, b]$  intervallumon véges sok szakadási pontja van, bármely  $x_0$  szakadási pontjában léteznek az

$$f(x_{0+}) = \lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x), \quad f(x_{0-}) = \lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x)$$

egyoldali függvényhatárértékek és az

$$f'(x_{0+}) = \lim_{x \rightarrow x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_{0+})}{x - x_{0+}}, \quad f'(x_{0-}) = \lim_{x \rightarrow x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_{0-})}{x - x_{0-}}$$

egyoldali deriváltak, továbbá bármely két szakadási pontja közötti nyílt intervallumon folytonosan differenciálható.

Bizonyítás nélkül tekintsük a következő eredményt, amely a Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájára vonatkozik.

**6.19. Tétel.** Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  szakaszonként folytonosan differenciálható  $2L$  szerint periodikus függvény. Ekkor bármely  $x \in \mathbb{R}$  pontban az  $f$  függvény  $S_{\mathbb{R}, L}$  rendszerre vonatkozó (6.10) Fourier-sora konvergál az

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

határértékhez. Speciálisan, ha  $f$  folytonos az  $x$  pontban, akkor a Fourier-sora  $x$ -ben konvergál az  $f(x)$  függvényértékhez.

Ha egy  $f \in L_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$  függvény Fourier-sorának pontonkénti konvergenciáját vizsgáljuk, akkor először periodikusan kiterjesztjük  $f$ -et  $\mathbb{R}$ -re, és a kiterjesztett függvényre alkalmazzuk a tételt. Megjegyezzük, hogy a periodikus kiterjesztés csak akkor lehetséges, ha  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Egyébként vagy az  $f(-\pi)$  vagy az  $f(\pi)$  függvényértéket használjuk a periodikus kiterjesztéshez, azaz a kiterjesztett függvény egy pontban nem egyezik meg az eredeti függvénnyel. Viszont a két függvény Fourier-együtthatói, és így a Fourier-sora is megegyezik.

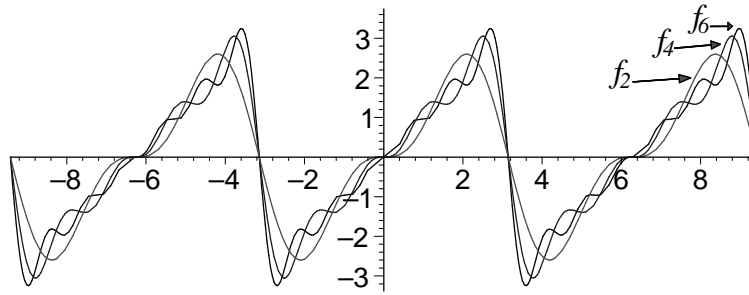
**6.20. Példa.** Tekintsük újra a 6.15. Példában kiszámított Fourier-sort. Az előbbi tételt alkalmazva kapjuk, hogy a Fourier-sor pontonként konvergens, és

$$2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi \text{ és } x = \pi. \end{cases}$$

A Fourier-sor  $n$ -edik részletösszegét jelölje

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots - (-1)^n \frac{\sin nx}{n} \right).$$

A következő ábrán az  $f_2, f_4$  és  $f_6$  közelítő összegek grafikonja látható. Ebből is érzékelhető a Fourier-sor konvergenciája.  $\square$



Az  $f_2(x)$ ,  $f_4(x)$  és  $f_6(x)$  részletösszegek grafikonja.

A Fourier-sorok egyik legfontosabb alkalmazási területe a parciális differenciálegyenletek elméletében található, ahol bizonyos feladatokat a megoldások Fourier-sorba fejtésével oldunk meg. Az egyik kulcs kérdés a módszer alkalmazásánál, mikor lehet differenciálni a Fourier-sort, ill. a végtelen összeg deriváltját tagonkénti differenciálással kiszámolni. Erre ad választ a következő tétel, amit szintén bizonyítás nélkül közlünk.

**6.21. Tétel.** Legyen  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, szakaszonként folytonosan differenciálható, továbbá

$$f(-\pi) = f(\pi).$$

Ekkor az  $f$  függvény Fourier-sora abszolút és egyenletesen konvergál a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon az  $f$  függvényhez, azaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol  $a_k, b_k$  a (6.8) és (6.9) képletekkel definiált Fourier-együtthatók. Továbbá,  $f'$  Fourier-sorát  $f$  Fourier-sorának tagonkénti differenciálásával megkaphatjuk, azaz

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx).$$

Minden olyan  $x$  pontban, ahol  $f''(x)$  létezik, az előző reláció egyenlőséggel helyettesíthető.

A 6.19. és 6.21. Tételeket nyilvánvaló módon terjeszthetjük ki arra az esetre, amikor az  $f$  függvény a  $[-L, L]$  szimmetrikus intervallumon definiált.

#### 6.4. Tiszta koszinuszos és szinuszos Fourier-sorok

Ebben a szakaszban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyan lehet Fourier-sorba fejteni egy  $[0, L]$  alakú intervallumon definiált függvényt. Egy természetes ötlet erre az, hogy kiterjesztjük a függvényt a  $[-L, L]$  intervallumra, és a kiterjesztett függvénynek számítjuk ki a Fourier-sorát. Ekkor a 6.19. Tételben megadott feltételek teljesülése esetében a Fourier-sor konvergál a kiterjesztett függvényhez, ill.  $[0, L]$ -re leszűkítve a Fourier-sor értelmezési tartományát, az eredeti függvényhez.

Két speciális esetet vizsgálunk: páros ill. páratlan függvényként terjesztjük ki a függvényt. Tekintsük először a páros kiterjesztés esetét. Legyen  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  adott, és legyen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(-x), & x \in [-L, 0) \\ f(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

Ekkor  $\tilde{f}$  Fourier-sora a 6.14. Állítás szerint tiszta koszinusz sor, így a Fourier-sorában minden  $b_k = 0$ . Az  $a_k$  Fourier-együtthatókat az

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \left( \int_{-L}^0 \tilde{f}(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx + \int_0^L \tilde{f}(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx \right)$$

képlettel számíthatjuk ki. Mivel  $\tilde{f}(x) \cos \frac{k\pi x}{L}$  két páros függvény szorzata, ezért maga is páros függvény, így a fenti két integrál megegyezik, tehát

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.11)$$

Most tekintsük azt az esetet, hogy páratlan módon terjesztjük ki  $f$ -et a  $[-L, 0]$  intervallumra, azaz legyen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \in [-L, 0], \\ 0, & x = 0, \\ f(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

Ekkor  $\tilde{f}$  páratlan periodikus függvény, ezért a Fourier-sora tiszta szinuszos sor lesz, azaz minden  $a_k = 0$ . A  $b_k$  együtthatókat az előző esethez hasonló levezetéssel kapjuk:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \left( \int_{-L}^0 \tilde{f}(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx + \int_0^L \tilde{f}(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx \right) \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.12)$$

Az előző levezetésből rögtön következik az alábbi eredmény. Ha a kiterjesztett függvény páros, akkor annak Fourier-sora tiszta koszinusz sor lesz,

**6.22. Állítás.** Az

$$S_{\cos} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$$

és az

$$S_{\sin} \stackrel{\text{def}}{=} \{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$$

rendszerek egyaránt teljes ortogonális rendszert alkotnak a  $[0, \pi]$  intervallumon.

**6.23. Példa.** Számítsuk ki a  $[0, \pi]$  intervallumra megszorított  $\sin x$  függvény tiszta koszinusz sorát, azaz az  $S_{\cos}$  függvényrendszerre vonatkozó Fourier-sorát! A (6.11) képletet és trigonometrikus azonosságokat alkalmazva kapjuk  $k \neq 1$ -re, hogy

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(1+k)x + \sin(1-k)x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(1+k)x}{1+k} - \frac{\cos(1-k)x}{1-k} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{(-1)^{1+k} - 1}{1+k} - \frac{(-1)^{1-k} - 1}{1-k} \right) \\ &= \frac{(-1)^k + 1}{\pi} \left( \frac{1}{1+k} + \frac{1}{1-k} \right) \\ &= \frac{(-1)^k + 1}{\pi} \cdot \frac{2}{1-k^2}. \end{aligned}$$

$k = 1$ -re kapjuk

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-\cos 2x}{2} \right]_0^{\pi} = 0.$$

A 6.19. Tétel szerint a Fourier-sor minden pontban konvergál a függvényhez, tehát kapjuk, hogy

$$\sin x = \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{1-2^2} \cos 2x + \frac{2}{1-4^2} \cos 4x + \frac{2}{1-6^2} \cos 6x + \dots \right), \quad x \in [0, \pi].$$

Megjegyezzük, hogy a  $\sin x$  függvény tiszta szinuszos Fourier-sora természetesen önmaga (azaz  $b_1 = 1$  és  $b_k = 0$  minden  $k > 1$ -re).  $\square$

**6.24. Példa.** Számítsuk ki az  $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1$  függvény tiszta szinuszos Fourier-sorát! A (6.12) képlet szerint

$$b_k = \frac{2}{5} \int_0^5 \sin \frac{k\pi x}{5} \, dx = \frac{2}{5} \left[ -\frac{\cos \frac{k\pi x}{5}}{\frac{k\pi}{5}} \right]_0^5 = \frac{2}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

ezért

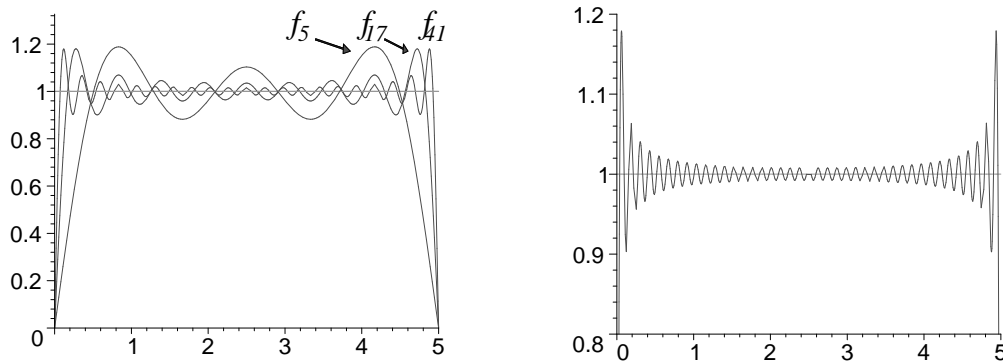
$$1 = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{5} + \frac{1}{7} \sin \frac{7\pi x}{5} + \dots \right), \quad x \in (0, 5).$$

$x = 0$  és  $x = 5$ -re a Fourier-sor összege 0. Ha  $x = 5/2$ -et helyettesítünk be az előző egyenletbe, akkor kapjuk a

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

ú.n., Euler-összefüggést.

Jelölje  $f_n$  a Fourier-sor  $n$ -edik részletösszegét, azaz  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{k\pi x}{5}$ . A bal oldali ábrán az  $f_5(x)$ ,  $f_{17}(x)$  és  $f_{41}(x)$  részletösszegek grafikonjai, a jobb oldalin pedig az  $f_{81}(x)$  részletösszeg grafikonjának kinagyított része látható.



Az ábra azt igazolja, hogy a részletösszegek  $n$  növekedésével egyre jobban közelítik a konstans 1 függvény grafikonját. Viszont ez a határérték nem egyenletes, az intervallum két végpontjához közel a Fourier-sor részletösszegeinek maximuma kb. 1.18 körüli értéket vesz fel. Numerikusan ellenőrizhetjük, hogy ez a maximum  $n$  növelésével nem változik, csak azt a részletösszeg függvény egyre közelebb veszi fel az intervallum végpontjához. Hasonló viselkedés figyelhető meg nem folytonos függvények véges Fourier-féle közelítő összegeinél. Ezt a jelenséget *Gibbs-jelenségnek* hívjuk.

Az  $f$  függvény tiszta koszinuszos Fourier-sora 1, azaz  $a_0 = 2$ ,  $a_k = b_k = 0$  minden  $k = 1, 2, \dots$ -ra.  $\square$

### 6.5. Fourier-transzformált és Fourier-integrál

Legyen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, amely nem szükségszerűen periodikus.

Legyen  $L > 0$  állandó,  $g_L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  olyan  $2L$  periodikus függvény, amelyre  $g_L(x) = f(x)$ ,  $-L < x < L$ . Írjuk fel  $g_L$  komplex Fourier-sorát. A  $g_L$  függvény Fourier-együtthatói

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g_L(t) e^{-in\frac{\pi}{L}t} dt,$$

és ezért

$$g_L(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g_L(t) e^{-in\frac{\pi}{L}t} dt \right) e^{in\frac{\pi}{L}x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mivel  $g_L(x) = f(x)$  ha  $-L < x < L$ , így a 6.19. Tétel szerint

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\frac{\pi}{L}t} dt \right) e^{in\frac{\pi}{L}x}, \quad x \in (-L, L).$$

Legyen

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Ekkor  $\Delta\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{L}$ . Ezzel a jelöléssel az előbbi egyenlet az

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\lambda_n t} dt \right) e^{i\lambda_n x} \Delta\lambda_n, \quad x \in (-L, L)$$

alakban írható fel. Ez minden  $L$ -re teljesül, ezért

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\lambda_n t} dt \right) e^{i\lambda_n x} \Delta\lambda_n, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.13)$$

Definiáljuk az

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (6.14)$$

függvényt, amelyet az  $f$  függvény *Fourier-transzformáltjának* vagy *komplex Fourier-integráljának* nevezünk. Ezzel a jelöléssel kapjuk a (6.13) egyenletből, formálisan először a zárójelen belül elvégezve a határátmenetet, hogy

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\lambda_n) e^{i\lambda_n x} \Delta\lambda_n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A jobb oldali összeg egy improprius integrál Riemann-féle közelítő összege, ahol a  $\{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}\}$  osztópontokat használjuk a számegyenes felosztásához, így kapjuk, hogy

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.15)$$

A (6.14) és (6.15) képletet együtt a *Fourier-féle inverziós formuláknak* nevezzük.

Hangsúlyozni kell, hogy a fenti levezetés csak formális számolás volt. A képletek precízen is levezethetők a következő feltétel mellett:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Azon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Lebesgue-mérhető függvények lineáris terét, amelyek abszolút értéke az egész számegegyenesen végesen Lebesgue-integrálható, azaz amelyekre a fenti egyenlőtlenség teljesül,  $L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ -vel jelöljük. Ezzel a jelöléssel a következőképpen foglalhatjuk össze az eredményünket.

**6.25. Tétel.** *Legyen  $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  szakaszonként folytonosan differenciálható függvény. Ekkor érvényes az ún. Fourier-féle integrálformula:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor az  $f$  valós függvény, azaz  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ekkor a Fourier-féle integrálformulán a következő átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) e^{i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \right) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Használva az  $u = -\lambda$  ( $du = -d\lambda$ ) helyettesítést az első integrálban, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right) e^{i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iu(x-t)} dt \right) du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( e^{-i\lambda(x-t)} + e^{i\lambda(x-t)} \right) dt \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Mivel  $e^{-i\lambda(x-t)} + e^{i\lambda(x-t)} = 2 \cos \lambda(x-t)$ ,  $f$  valós függvény, ezért

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \right) d\lambda.$$

Ez a valós *Fourier-féle integrálformula*. A jobb oldalon álló integrálban a  $\cos$  függvényt kifejtve kapjuk a következő állítást.

**6.26. Következmény.** *Legyen  $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  szakaszonként folytonosan differenciálható függvény. Ekkor*

$$\int_0^{\infty} \left( A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x \right) d\lambda = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.16)$$

ahol

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt \quad \text{és} \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt. \quad (6.17)$$

A (6.16) egyenlet bal oldalán álló integrált *valós Fourier-integrálnak* nevezzük.

**6.27. Példa.** Írjuk fel az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -3, & x \in [-2, 0], \\ 5, & x \in (0, 4], \\ 0, & x < -2 \text{ vagy } x > 4. \end{cases}$$

függvény Fourier-integrálját!

A (6.17) képletek szerint

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-2}^0 -3 \cos \lambda t \, dt + \int_0^4 5 \cos \lambda t \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ -3 \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \right]_{-2}^0 + \left[ 5 \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \right]_0^4 \right) \\ &= \frac{-3 \sin 2\lambda + 5 \sin 4\lambda}{\pi \lambda}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy  $A(\lambda)$  folytonosan kiterjeszthető  $\lambda = 0$ -ra is, hiszen létezik a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{-3 \sin 2\lambda}{\pi \lambda} + \frac{5 \sin 4\lambda}{\pi \lambda} \right) = \frac{-6 + 20}{\pi} = \frac{14}{\pi}$$

határérték.  $B(\lambda)$  hasonlóan számítható:

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-2}^0 -3 \sin \lambda t \, dt + \int_0^4 5 \sin \lambda t \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ 3 \frac{\cos \lambda t}{\lambda} \right]_{-2}^0 + \left[ -5 \frac{\cos \lambda t}{\lambda} \right]_0^4 \right) \\ &= \frac{8 - 3 \cos 2\lambda - 5 \cos 4\lambda}{\pi \lambda}. \end{aligned}$$

Megmutatható, hogy  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} B(\lambda) = 0$ . A 6.26. Következmény szerint

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{-3 \sin 2\lambda + 5 \sin 4\lambda}{\pi \lambda} \cos \lambda x + \frac{8 - 3 \cos 2\lambda - 5 \cos 4\lambda}{\pi \lambda} \sin \lambda x \right) d\lambda = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ -3/2, & x = -2, \\ -3, & x \in (-2, 0), \\ 1, & x = 0, \\ 5, & x \in (0, 4), \\ 5/2, & x = 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases} \quad \square$$

Az  $f$  függvény Fourier-transzformáltjára használjuk az  $\mathcal{F}(f)(\lambda) = F(\lambda)$  jelölést is. A következő tételben összefoglaljuk a Fourier-transzformált néhány fontosabb tulajdonságát.

**6.28. Tétel.** Legyen  $f, g \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  és  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Ekkor

1.  $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$ .
2. Ha  $f$  differenciálható és  $f' \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , akkor  $\mathcal{F}(f')(\lambda) = i\lambda \mathcal{F}(f)(\lambda)$ .
3.  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ , ahol

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) \, dt$$

az  $f$  és  $g$  konvolúciója.



## 6.6. Alkalmazások

Tegyük fel, hogy  $f$  Fourier-transzformáltja a  $[-L, L]$  intervallumon kívül azonosan nulla, azaz

$$F(\lambda) = 0, \quad |\lambda| > L. \quad (6.18)$$

**6.29. Tétel (Mintavételi tétel).** *Tegyük fel, hogy  $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  függvény folytonos és szakaszonként folytonosan differenciálható, amelyre (6.18) teljesül. Ekkor  $f$ -et meghatározzák a*

$$0, \pm \frac{\pi}{L}, \pm \frac{2\pi}{L}, \dots$$

*pontokban felvett értékei:*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(Lx - n\pi)}{Lx - n\pi}, \quad x \neq \frac{n\pi}{L}, \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

**Bizonyítás:** A Fourier-féle inverziós formulát és a (6.18) feltételt alkalmazva

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.19)$$

Az  $F(\lambda)$  függvény a  $(-L, L)$  intervallumon felírható Fourier-sora összegeként:

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi\lambda}{L}}, \quad \lambda \in (-L, L),$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(\lambda) e^{-i\frac{n\pi\lambda}{L}} d\lambda.$$

A (6.19) összefüggést alkalmazva kapjuk, hogy

$$c_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} f\left(\frac{-n\pi}{L}\right).$$

Ezt visszahelyettesítve  $F$  Fourier-sorába kapjuk

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{-n\pi}{L}\right) e^{i\frac{n\pi\lambda}{L}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\frac{n\pi\lambda}{L}}. \end{aligned}$$

Ezért a (6.19) formula szerint  $x \neq \frac{n\pi}{L}$ -re

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L \frac{\sqrt{2\pi}}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) e^{-i\frac{n\pi\lambda}{L}} e^{i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \int_{-L}^L e^{i\lambda(-\frac{n\pi}{L} + x)} d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{e^{i(Lx - n\pi)} - e^{-i(Lx - n\pi)}}{i(xL - n\pi)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(Lx - n\pi)}{xL - n\pi}. \end{aligned}$$

□