1. Hálózati folyamok

Definíció: Legyen $G = (V, E)$ egy irányított gráf, melynek minden (u, v) élén adott egy nemnegatív $c(u, v)$ **kapacitás**. A gráfnak kitüntetjük két pontját: az s termelőt és a t fogyasztót. Ekkor a $(G; c; s; t)$ négyest **hálózatnak** nevezzük.

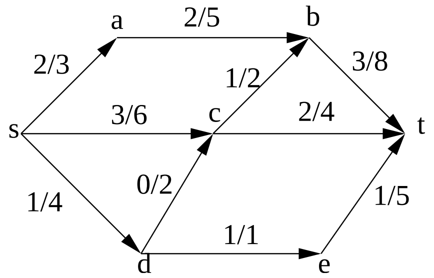
Szemléltetésképpen feltehetjük, hogy a hálózattal egy vízvezetékrendszert ábrázolunk. A hálózat minden egyes irányított élét egy vezetéknek képzelhetjük el, amin keresztül a víz folyik. Minden egyes vezetéknek meghatározott kapacitása van, ami a legnagyobb vízmennyiség, ami a vezetéken át tud folyni. A gráf pontjai a vezetékek elágazási pontjai, amelyekben, ha nem a termelőről és a fogyasztóról van szó, víz nem gyűlhet össze. Vagyis a befolyó vízmennyiségnek egy pontban meg kell egyeznie a kifolyó vízmennyiséggel. A hálózati folyam ezen tulajdonságát megmaradási szabálynak nevezzük.

Definíció: Legyen $(G; c; s; t)$ egy hálózat. **Hálózati folyamnak** (vagy csak **folyamnak**) nevezzük a következő két tulajdonsággal rendelkező $f : E \rightarrow R_+$ függvényt:
Kapacitás megszorítás: $f(u, v) \leq c(u, v)$ teljesül minden $(u, v) \in E$-re.
Megmaradási szabály: $\sum\{f(u, v)|(u, v) \in E\} - \sum\{f(v, u)|(v, u) \in E\} = 0$ minden $u \in V - \{s, t\}$-re.

Mivel célunk az s pontból a lehető legtöbb vízmennyiség eljuttatása t-be, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy az s pontba nem lép be él, a t pontból pedig nem lép ki él. Ekkor a folyam értéke egyenlő az s-ből kilépő folyamértékek összegével (ami természetesen egyenlő a t-be belépő folyamértékek összegével.

Definíció: **Vágásnak** nevezünk egy $X \subset V$ ponthalmazt, melyre $s \in X$ de $t \notin X$. Az X **vágás értéke** az X-ből kilépő élek kapacitásainak az összege. Az X vágás értékét $c(X)$-szel jelöljük.

Példa:



Az ábrán egy hálózati folyamra láthatunk példát. Az élekre írt számok közül az első a folyamértéket, a második pedig az él kapacitását jelöli. Látható, hogy minden élen legfeljebb akkora a folyamérték, mint az él kapacitása; továbba a termelő illetve a fogyasztó kivételével minden pontba ami befolyik, az tovább is folyik. A folyam értéke 6, hiszen s-ből összesen 6 egységnyi víz lép ki.

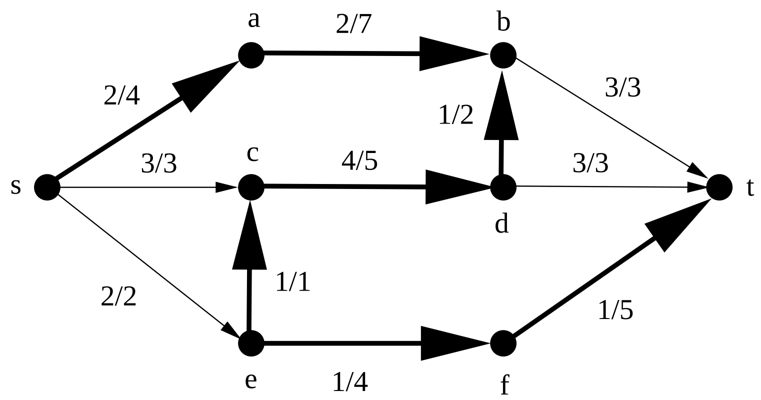
Számítsuk ki az (s, b, d) vágás értékét! Ehhez az összes olyan élnek, melynek a kezdőpontja az (s, b, d) pontok valamelyike, a végpontja viszont nem(!), össze kell adni a kapacitásait. Ezek az élek az sa, sc, dc, de, bt élek, így az (s, b, d) vágás értéke 3+6+2+1+8=20.

Azt mondjuk, hogy egy **folyam maximális**, ha az értéke maximális. **Minimális vágásnak nevezünk** egy vágást, ha az értéke minimális. A maximális folyamok és a minimális vágások között szoros kapcsolat áll fenn; nevezetesen a maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével! A célunk a maximális folyam meghatározása. Ehhez szükségünk lesz még a javító út fogalmára:

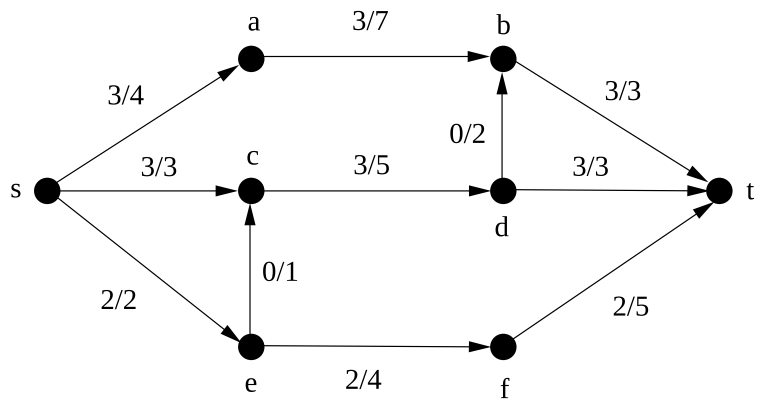
Legyen most f egy folyam. Legyen a gráfban $s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t$ egy út, amely nem feltétlenül halad az irányítás szerint. Az út egy e élét előre élnek hívjuk, ha $e = (v_{i-1}, v_i)$ valamely i-re. Hasonlóan hátra élnek nevezzük az út egy e élét, ha $e = (v_i, v_{i-1})$ valamely i-re. Tegyük fel, hogy az út minden előre élén $f(e) < c(e)$, és minden hátraélen $f(e) > 0$. Az ilyen utat **javító útnak** hívjuk. Ha létezik javító út, akkor a növelhetjük a folyam értékét a következő módon: az előre éleken megnöveljük a folyam értékét, a hátra éleken csökkentjük a folyamértéket ugyanazzal a mennyiséggel. 2 dologra kell figyelnünk: mikor az előre éleken növelünk, akkor a kapacitás fölé nem mehetünk; mikor a hátra éleken csökkentünk, akkor 0 alá nem mehetünk. Formálisan megfogalmazva:

legyen ϵ_1 =min$(c(e) - f(e)|e$ előreél), ϵ_2 =min$(f(e)|e$ hátraél) és ϵ =min(ϵ_1, ϵ_2). Az előre és hátra élek definíciója miatt $\epsilon > 0$. Az előre éleken növeljük meg a folyam értékét ϵ-nal, a hátra éleken pedig csökkentsük a folyam értékét ϵ-nal. Könnyen látható, hogy így egy olyan folyamot kaptunk, melynek értéke ϵ-nal nagyobb a réginél.

A következő ábrán javító útra láthatunk egy példát:



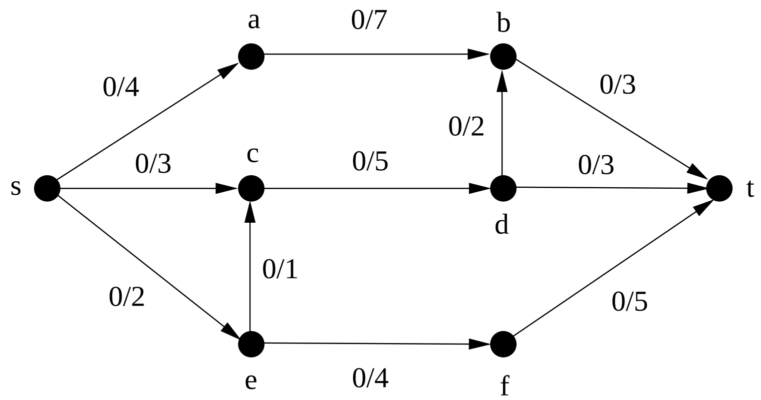
Az ábrán adott folyamra nézve az $s - a - b - d - c - e - f - t$ javító út, hiszen az sa, ab, ef, ft élek előre élek mind telítetlenek, a db, cd, ec élek pedig hátraélek, és mindegyiken pozitív a folyamérték. Az sa élen 2-vel növelhetnénk a folyamot, az ab élen 5-tel növelhetnénk a folyamot, az ef élen 3-mal növelhetnénk a folyamot, az ft élen 4-gyel növelhetnénk a folyamot; a db élen 1-gyel csökkenthetnénk a folyamot, a cd élen 4-gyel csökkenthetnénk a folyamot, az ec élen pedig 1-gyel csökkenthetnénk a folyamot; ezért a javító út minden élén 1-gyel változtatunk: az előre éleken 1-gyel megnöveljük a folyamértéket, a visszaéleken pedig 1-gyel lecsökkentjük.
A javítás után a következő folyamot kapjuk:



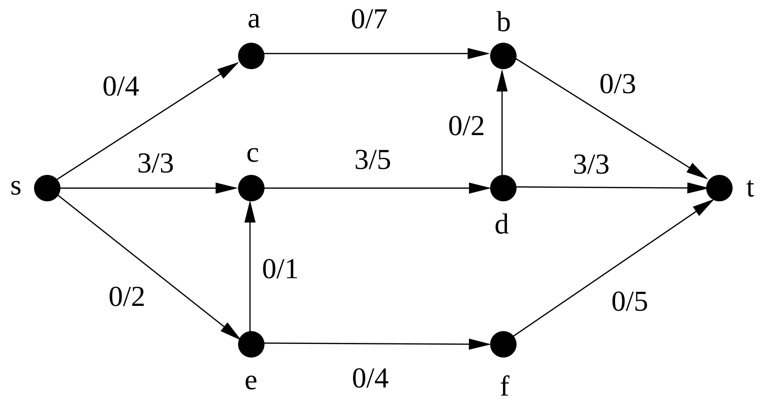
Belátható, hogy egy f folyam pontosan akkor maximális, ha nem létezik javító út f-re nézve. Ebből máris kapunk egy algoritmust a maximális folyam megkeresésére:

Ford-Fulkerson algoritmusa maximális folyam keresésére:
Legyen kezdetben a folyamérték minden élen 0. Amíg az aktuális folyamra nézve létezik javító út, addig egy javító út mentén növeljük a folyam értékét. Ha már nem létezik javító út, akkor a folyam maximális.

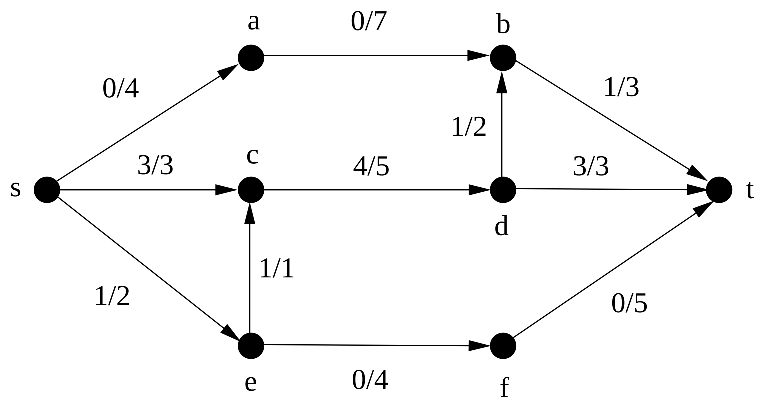
Ha már meghatároztuk a maximális folyamot, akkor a minimális vágást is könnyen megkaphatjuk. Azon pontok halmaza ugyanis, amelyekbe még létezik s-ből javító út, egy minimális vágást határoz meg.
Az algoritmus működését a következő példán követhetjük nyomon:



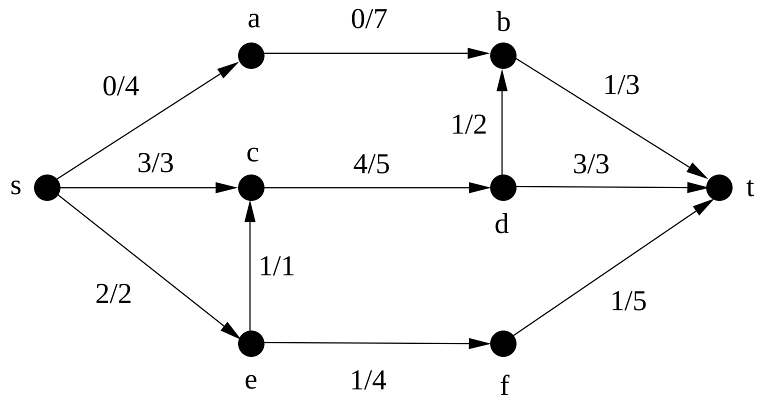
Kezdetben minden élen 0 a folyamérték. Ekkor például az s-c-d-t út egy javító út, melynek minden éle előre él. Az *sc* és *dt* élek miatt 3 tudjuk növelni a folyam értékét, azaz az út minden élén növeljük a folyamértéket hárommal.



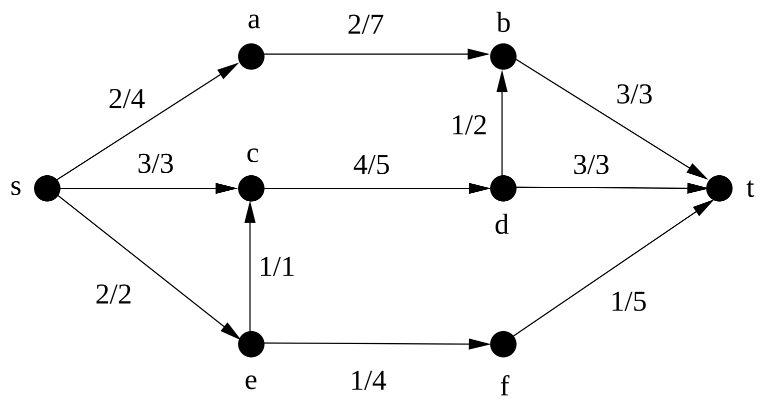
A következő lépésben mondjuk megtaláljuk az s-e-c-d-b-t javító utat (természetesen más javító utat is vehettünk volna). Ennek az útnak ismét minden éle előre él, és mivel az *ec* élen csak 1-gyel tudunk növelni, ezért az út minden élén 1-gyel növeljük a folyamértéket.



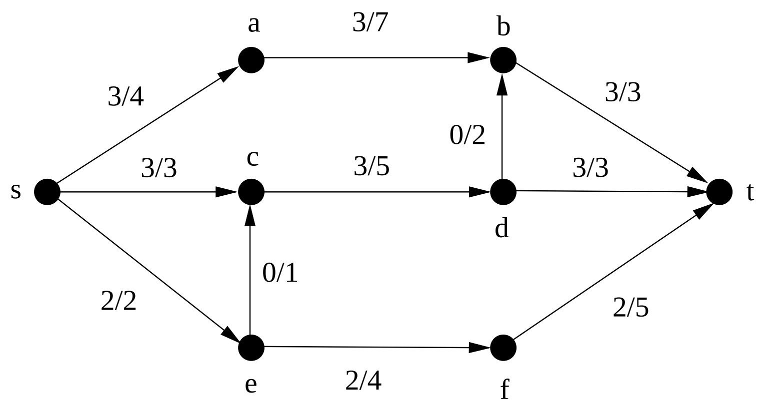
A következő lépésben vegyük mondjuk az s-e-f-t javító utat. Ennek szintén minden éle előre él; se-n 1-gyel növelhetünk (hiszen már folyik rajta 1!), ef-n 4-gyel, ft-n 5-tel, ezért mindhárom élen eggyel növeljük a folyamértéket.



Most az s-a-b-t javító úton a bt él miatt minden élen 2-vel növelhetjük a folyamértéket.



Még mindig létezik javító út, nevezetesen az s-a-b-d-c-e-f-t út. Az sa, ab, ef és ft élek előre élek, ezeken az sa él miatt 2-vel lehetne növelni a folyamértéket; a db, cd és ec élek pedig visszaélek, ezeken pedig az ec él miatt 1-gyel lehetne csökkenteni a folyamértéket. Így az út minden élén 1-gyel változtatunk; az előre éleken 1-egyel növeljük, a hátraéleken 1-gyel csökkentjük a folyamértékeket.



Viszont most már nem létezik t-be javító út, így ez a folyam maximális, az értéke pedig 3+3+2.

Adjunk meg egy minimális vágást is! s-ből a-ba el tudunk jutni javító úton, hiszen az sa él előre él lenne és telítetlen. a-ból b-be is tovább tudunk menni javító úton, hiszen az ab él előre él lenne és telítetlen; vagyis még b-be is van javító út sből. b-ből t-be nem tudunk tovább menni, hiszen a bt él előre él és telített; hasonlóan b-ből d-be sem tudunk továbbmenni, mert a db él vissza él, és 0 rajta a folyamérték. s-ből sem c-be, sem e-be nem tudunk javító úton eljutni, mert az sc és az se él is telített. Így javító út már csak az s, a, b pontokba van, ezért ez a három pont egy minimális vágást határoz meg. Érdemes kiszámolni, hogy ennek a vágásnak az értéke 8, ami megegyezik a maximális folyam értékével. Ez általában is így van:

Tétel: A maximális folyam értéke megegyezik a minimális vágás értékével.