DETERMINÁNSOK

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

© Bércesné Novák Ágnes

DETERMINÁNSOK

Definíció: az n sorba és m oszlopba elrendezett n x m (valós vagy képzetes) számokat tartalmazó táblázatot mátrixnak nevezzük.

Definíció (ld. Freud R.: Lineáris algebra): Az n x n –es mátrixhoz számot rendelhetünk. Ha a hozzárendelt szám az alábbiakban ismertetett szabály szerint történik, akkor ezt a számot az n x n- es mátrix determinánsának nevezzük. Ezt a számot a következőképpen képezzük: a mátrix minden sorából és oszlopából pontosan egy elemet választunk, és ezeket összeszorozzuk. Ezt minden lehetséges módon elvégezzük, igy n! db szorzatot kapunk. E szorzatokat + vagy – előjellel látjuk el aszerint, hogy a sorindexek természetes sorrendjét követő felírásban az oszlopindexek permutációja páros, vagy páratlan. Az előjellel ellátott szorzatokat összegezve kapjuk a determináns értékét. Képletben:

det(A):= $\sum(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)}$

Az alábbi bizonyításoknál feltesszük, hogy a determináns elemei valós számok.

A determináns definíciója képletben:

det(A)=$\sum(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}.....a_{n\sigma(n)}$

A jelenti az n x n-es mátrixot, det(A) a hozzárendelt számot, I(σ) jelenti a σ permutációban szereplő inverziók számát, σ(1), σ(2), σ(3)… σ(n) az 1, 2, 3, …n számok egy permutációját.

Például: σ: 1, 3, 2, 5, 4, 6; σ(1)=1, σ(2)=3, σ(3)=2, σ(4)=5, σ(5)=4, σ(6)=6

© Bércesné Novák Ágnes

Megjegyzések:

a.) Szokás a determináns értékéről beszélni. Ekkor magát a hozzárendelést értjük a determináns szó alatt, és mint a függvénynek is van függvényértéke, úgy a determinánsnak is beszélhetünk (függvény)értékéről.

b.) Egy permutáció páros/páratlan, ha az inverziók száma páros/páratlan.

c.) **Lemma:** Két elem cseréjével a permutációk száma párosról páratlanra, páratlanról párosra változik.

Biz.: Szomszédos elemek cseréjekor ez nyilvánvaló. Két tetszőleges elem, x,y cseréjekor, ha k elem állt köztük, k db szomszédos elem cserével y az x jobboldali szomszédja, 1 db cserével y az x helyére kerül, majd az x k db szomszédos elem cserével y helyére vihető. Ez összesen 2k+1 db szomszédos elem cseréje. Mivel minden alkalommal a páros permutációból páratlan, a páratlanból páros keletkezik, ezért az eredményül kapott sorrendben a permutáció paritása megváltozik.

© Bércesné Novák Ágnes

Lemma:

$$\sum(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \ldots . a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum(-1)^{I(\sigma')+I(\pi)} a_{\sigma'(1)\pi(1)} a_{\sigma'(2)\pi(2)} a_{\sigma'(3)\pi(3)} \ldots . a_{\sigma'(n)\pi(n)}$$

Bizonyítás:

Az első sorrendből elemcserékkel bármilyen más sorrend előállítható. Így a tényezők ugyanazok. Mivel két elem cseréjével mindkét indexben az inverziók száma páratlan számmal változik, az $I(\sigma') + I(\pi)$ szám paritása ugyanaz, mint az $I(\sigma)$ számé, így az előjel is ugyanaz lesz. Tehát a determináns e második, sorok oszlopok szempontjából szimmetrikus formulával is definiálható.

A determináns tulajdonságai

1. A determináns értéke nem változik, ha a főátlóra tükrözzük az elemeit.
Következmény : A sorokra kimondott tételek oszlopokra is igazak.

2. Ha a determináns főátlója fölött (alatt) csupa 0 áll, akkor a determináns értéke a főátlóban
álló elemek szorzata.

3. Ha a determináns egy sora (egy sorának minden eleme) 0, akkor értéke is 0.

4. Ha a determináns egy sorát egy valós számmal megszorozzuk, értéke is e számszoros lesz.

5. Ha a determináns két sorát felcseréljük, az értéke (–1)-szeresére változik.

6. Ha a determináns két sora egyenlő, akkor a determináns értéke 0.

7. Ha a determináns k. sora kéttagú összegekből áll, akkor a determinánst két determináns összegeként kaphatjuk. Az egyik determináns k. sora az eredeti k. sorában álló összegekből az első tagokat, a másik az eredeti determináns k. sorában álló összegekből a második tagokat tartalmazza.

8. A determináns értéke nem változik, ha egyik sorához hozzáadjuk valamely másik sor számszorosát.

9. Kifejtési tétel: a determináns értékét kapjuk, ha valamely sorának elemeit megszorozzuk a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsokkal, és ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ezt a determináns a *i. sor szerinti kifejtésé*nek nevezzük.

Az a_{ik} elemhez tartozó A_{ik} *minormátrix* az eredeti A mátrix *i.* sorának és *k.* oszlopának elhagyásával keletkezik. Az A_{ik} minormátrixhoz tartozó determinánst az a_{ik} elem *aldeterminánsá*nak nevezzük. Ezt előjellel látjuk el, $(-1)^{i+k}$. Az aldetermináns jele D_{ik}.

<u>A kifejtési tétel képletben:</u>

az i. sor szerinti kifejtés:

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{ik})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}D_{ik}$$

A k. oszlop szerinti kifejtés hasonlóan:

Tehát $D_{ik}=(-1)^{i+k}\,det(A_{ik})$.

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{ik})=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}D_{ik}$$

10. Ferde kifejtés

$$0=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{jk})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}D_{jk}$$

A determináns tulajdonságai

1. A determináns értéke nem változik, ha a főátlóra tükrözzük az elemeit.
Következmény : A sorokra kimondott tételek oszlopokra is igazak.

Bizonyítás:

det(A):= $\sum(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}.....a_{n\sigma(n)}$

A főátlóra tükrözött mátrix determinánsa:

det(A*):=

$$\sum(-1)^{I(\sigma)+I(\pi)} a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}.....a_{\sigma(n)n} = \sum(-1)^{I(\sigma)+I(\pi)} a_{\sigma(1)\pi(1)}a_{\sigma(2)\pi(2)}a_{\sigma(3)\pi(3)}.....a_{\sigma(n)\pi(n)}$$

Miben különböznek a szorzatok? Csak az indexek változtak, de az egyes tényezők értékei változatlanok! A determináns sor/oszopra szimmetrikus definíciójából az előjelek azonossága adódik.

2. Ha a determináns főátlója fölött (alatt) csupa 0 áll, akkor a determináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata.

Bizonyítás: minden sorból és oszlopból kell mindegyik szorzatban szerepelnie egy-egy elemnek. Csak akkor lesz a szorzat 0-tól különböző, ha az első sorból az első elemet választjuk. De akkor a második sorból csak a_{22} választható (ha nem ezt az elemet választjuk a szorzat 0), és így tovább:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ .. & & .. & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

2. Ha a determináns egy sora (egy sorának minden eleme) 0, akkor értéke is 0.

<u>Bizonyítás:</u>

Tfh. hogy a k. sor minden eleme 0. Az alábbi definícióban mely elem lesz 0?

det(A):= $\sum(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots\ldots a_{k\sigma(k)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Ha a determináns egy sorát egy valós számmal megszorozzuk, értéke is e számszoros lesz.

Bizonyítás:

Tfh. hogy a k. sort szorozzuk a λ valós számmal. Ekkor

det(A):= $\sum(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots\ldots a_{k\sigma(k)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)}$, és a beszorzott sorral

det(A_λ)= $\sum(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots\ldots (\lambda a_{k\sigma(k)}) \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} = \lambda(\sum(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots\ldots a_{k\sigma(k)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)}) = \lambda \det(A)$

Megjegyzés: Az előző tétel ennek speciális esete λ=0-ra.

Ha a determináns két sorát felcseréljük, az értéke (–1)-szeresére változik.
<u>Bizonyítás:</u>

det(A):= $\sum(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots\ldots a_{i\sigma(i)} \ldots\ldots a_{k\sigma(k)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)}$

Cseréljük fel az i. sort a k. sorral:

det(A'):= $\sum(-1)^{I(\sigma')} a_{1\sigma'(1)} a_{2\sigma'(2)} \ldots\ldots\ldots a_{k\sigma'(k)} \ldots\ldots a_{i\sigma'(i)} \ldots\ldots a_{n\sigma'(n)}$

A tagok ugyanazok, de a szorzatokban a sorindexek szerinti elrendezésben az oszlopok σ permutációja σ' lett.

Mi a különbség σ és σ' között?

Két elem cseréjével miként változik az inverziók száma?

Az azonos szorzatok előjeléről mit tudunk tehát?

<u>Mi a különbség σ és σ’ között?</u>

Minden szorzatban az i. és a k. tényező felcserélődött. Ezért az oszlopindexek sorrendjében is e két elem fel van cserélve.

<u>Két elem cseréjével miként változik az inverziók száma?</u>

Páros számúról páratlan számúra, illetve páratlan számúról páros számúra változik az inverziók száma.

<u>Az azonos szorzatok előjeléről mit tudunk tehát?</u>

A szorzatok előjelét az inverzók száma határozza meg, a páros permutációkat + a pártalanokat – előjellel vesszük. Ezek szerint tehát minden egyes szorzat előjele (–1)-szeresére változik, de a szorzat abszolút értéke változatlan marad, hiszen két tényező felcserélése a szorzat értékét nem változtatja meg. Ez azt jelenti, hogy a determináns értéke (-1)szeresére változik.

6. Ha a determináns két sora egyenlő, akkor a determináns értéke 0.

Bizonyítás:

Legyen det(A)=D. Cseréljük fel az A mátrix két egyenlő sorát.

Változik-e az A mátrix?

Változhat-e a hozzá tartozó determináns értéke?

De az előző tétel miatt a sorcserével (-1) – szeresére kell a determináns értékének változnia, vagyis D= - D. Hogyan lehetséges ez?

© Bércesné Novák Ágnes

<u>Változik-e az A mátrix?</u>

Nem, hiszen azonos sorokat cseréltünk.

<u>Változhat-e a hozzá tartozó determináns értéke?</u>

Nem, mert elemei nem változtak.

<u>De az előző tétel miatt a sorcserével (-1) – szeresére kell a determináns értékének változnia, vagyis D= - D. Hogyan lehetséges ez?</u>

Csakis úgy, hogy a determináns értéke 0.

7. **Ha a determináns k. sora kéttagú összegekből áll, akkor a determinánst két determináns összegeként kaphatjuk. Az egyik determináns k. sora az eredeti k. sorában álló összegekből az első tagokat, a másik az eredeti determináns k. sorában álló összegekből a második tagokat tartalmazza.**

Bizonyítás:

Legyen a k. sor az, amelyik a kéttagú összeget tartalmazza. az összegzés tulajdonságai miatt:

$$\det(A) = \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots\ldots (b_{k\sigma(k)} + c_{k\sigma(k)}) \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots\ldots b_{k\sigma(k)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} + \sum (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots\ldots c_{k\sigma(k)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & .. & b_n + c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ b_1 & b_2 & .. & b_n \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ c_1 & c_2 & .. & c_n \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8. A determináns értéke nem változik, ha egyik sorához hozzáadjuk valamely másik sor számszorosát. (alább az i.sorhoz adjuk a k.sor λ-szorosát)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{l1}+\lambda a_{k1} & a_{l2}+\lambda a_{k2} & & a_{ln}+\lambda a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{l1} & a_{l2} & & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & & \lambda a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A)+\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \det(A)+0$$

9. Kifejtési tétel: a determináns értékét kapjuk, ha valamely sorának elemeit megszorozzuk a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsokkal, és ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ezt a determináns a *i. sor szerinti kifejtésé*nek nevezzük.

Az a_{ik} elemhez tartozó A_{ik} *minormátrix* az eredeti A mátrix *i.* sorának és *k.* oszlopának elhagyásával keletkezik. Az A_{ik} minormátrixhoz tartozó determinánst az a_{ik} elem *aldetermináns*ának nevezzük. Ezt előjellel látjuk el, $(-1)^{i+k}$. Az aldetermináns jele D_{ik}.

<u>A kifejtési tétel képletben:</u>

az *i*. sor szerinti kifejtés:

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{ik})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}D_{ik}$$

A *k*. oszlop szerinti kifejtés hasonlóan:

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{ik})=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}D_{ik}$$

Tehát $D_{ik}=(-1)^{i+k}\,det(A_{ik})$.

10. Ferde kifejtés

$$0=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(A_{jk})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}D_{jk}$$

A kifejtési tétel bizonyítása:

a.) Első sora az első elem kivételével 0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & a_{2n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & & a_{kn} \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} & \dots & \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{l2} & & a_{ln} \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} D_{11}$$

b.)

Ha az i.sor a k. elem kivételével nem nulla, akkor hány szomszédos sor ill. oszlop cseréjével vihető az i. sor az első sor helyére, és a k. elem a_{11} helyére? Pl. a 2. sor első eleme nem nulla, a többi nulla, hogyan számítható ki a determináns értéke?

b.)

Ha az i.sor a k. elem kivételével nem nulla, akkor hány szomszédos sor ill. oszlop cseréjével vihető az i. sor az első sor helyére, és a k. elem a_{11} helyére? Pl. a 2. sor első eleme nem nulla, a többi nulla, hogyan számítható ki a determináns értéke?

Az a_{ik} elemet k-1 darab szomszédos oszlopcserével és i-1 darab szomszédos sorcserével vihető a_{11} helyére, így az előző eset áll fenn. (Nem egyszerűen felcseréljük az 1. és i.sort, mert akkor nem az aldeterminánst kapnánk!!!)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{ik} & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+k} a_{ik} \begin{vmatrix} a_{11} & ..a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)1} & a_{1n} \\ a_{(i-1)1} & a_{(i-1)2} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & a_{(i+1)2} & & a_{(i+1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ik} D_{ik}$$

© Bércesné Novák Ágnes

c.) Ha nincsen olyan sor, amelynek elemei egy elem kivételével nullák, akkor bármelyik sor felírható mint az eredeti elem és n -1 db nulla öszege. A determináns pedig felbontható n db olyan determináns összegére, amelyben van egy elem kivételével csupa nulla sor.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ik} & a_{in} \\ a_{l1} & a_{l2} & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots \\ a_{i1}+0+..+0 & 0+a_{i2}+0+..+0 & 0+0+..+a_{ik}+0+\dots+0 & 0+\dots+0+a_{in} \\ a_{l1} & a_{l2} & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & a_{2n} \\ & & & & \dots \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & a_{2n} \\ & & & & \dots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} +..+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & a_{2n} \\ & & & & \dots \\ 0 & 0.. & a_{ik} & \dots. & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} +..+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & a_{2n} \\ & & & & \dots \\ 0 & 0.. & 0 & \dots & a_{in} \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ik} & a_{in} \\ a_{l1} & a_{l2} & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots \\ a_{i1}+0+..+0 & 0+a_{i2}+0+..+0 & 0+0+..+a_{ik}+0+\ldots+0 & 0+\ldots+0+a_{in} \\ a_{l1} & a_{l2} & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ & & & & \cdots \\ a_{i1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ & & & & \cdots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} + .. + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ & & & & \cdots \\ 0 & 0.. & a_{ik} & \ldots. & 0 \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} + .. + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ & & & & \cdots \\ 0 & 0.. & 0 & \ldots & a_{in} \\ a_{l1} & a_{l2} & & & a_{\ln} \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$$

“Ferde” kifejtés

Ha a determináns kifejtésére vonatkozó képletben az a_{ik} sor elemei helyett pl. az a_{lk} sor elemeit szorozzuk meg rendre a D_{ik} aldeterminánsokkal, akkor az így kapott szám nulla.
Helyes kifejtés: $\det(A)= a_{11}D_{11}+a_{12}D_{12}+\ldots+a_{1n}D_{1n}$
Ferde kifejtés: $0= a_{21}D_{11}+a_{22}D_{12}+\ldots+a_{2n}D_{1n}$

Bizonyítás(Hf. ált.):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}.. & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}.. & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}.. & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}.. & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ha az egyenlőség jobb oldalán álló kifejezésből indulunk ki, az ott álló elemeket a következő, két egyenlő sorral, tehát 0 értékkel rendelkező determinánsba lehet elrendezni:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \ldots & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

© Bércesné Novák Ágnes