Algebrai struktúrák, mátrixok

Def.: **Algebrai struktúrán** olyan nemüres halmazt értünk amelyen legalább egy művelet van definiálva.

Def.: A H nemüres halmazon értelmezett **kétváltozós műveleten** egy $H\times H \to H$ függvényt értünk. (olyan leképezést, amely bármely $(a,b) \in H$ elempárhoz egyértelműen hozzárendel egy H-beli elemet. Ezért a műveletre vonatkozó „zártságot” szükségtelen kikötni.) Az **n változós művelet** ehhez hasonlóan olyan függvény, melynek értelmezési tartománya $H\times H\ldots\times H=H^n$, értékkészlete pedig H.

Jelölés: Sokféle lehet. Kétváltozós művelet esetében célszerű az ún. **infix** jelölés, amikor a műveleti jelet az elempár elemei **közé** tesszük, ahogyan eddig is pl. a valós számok, vektorok esetében. Tehát az f(a, b)=c **prefix** jelölés helyett az a f b=c infix jelölést használjuk. Megjegyezzük, hogy az ún. **postfix** jelölés; (a,b)f nagyon ritkán használatos. Többváltozós műveletnél a prefix jelölés a célszerűbb.

Feladat: Mondjunk példát műveletekre!

Def.:
A H-n értelmezett * művelet **asszociatív(csoportosítható)**, ha bármely $a,b,c\in H$-ra $a*(b*c)=(a*b)*c$ teljesül.

A H-n értelmezett * művelet **kommutatív (felcserélhető)**, ha bármely $a,b \in H$-ra $a*b=b*a$ teljesül.

Bal oldali egységelemnek olyan $e_b \in H$ elemet nevezünk, amelyre minden $a \in H$-val $e_b a=a$ teljesül.
Jobb oldali egységelemnek egy olyan $e_j \in H$ elemet nevezünk, amelyre minden $a \in H$-val $e_j a=a$ teljesül.

Az $e \in H$ elem **egységelem** (vagy kétoldali egységelem), ha mind bal, mind pedig a jobb oldal egységelem, azaz minden $a \in H$-ra $ea=ae=a$.

<u>Tétel:</u> Minden, bal, -illetve jobboldali egységelemes művelettel rendelkező algebrai struktúrában a baloldali és a jobboldali egyégelem egyenlő: $e_b= e_j$. Más szavakkal: A baloldali és a jobboldali egyégelemes művelettel rendelkező algebrai struktúrákban van (kétoldali) egységelem, ez megegyezik mind a bal-, mind a jobboldali egységelemmel, tehát az egységelem egyértelmű.

<u>Bizonyítás:</u> $e_b= e_b * e_j$ (a jobboldali egségelem def. miatt)$= e_j$ (a baloldali egységelem def. miatt)

Összeadásnak nevezett művelet esetén az **egységelemet nullelem**nek vagy nullának nevezzük.

Az $a \in H$ elem **bal oldali inverz**én (vagy röviden balinverzén) egy olyan $a_b \in H$ elemet értünk, amelyre $a_b a=e$.

Az $a \in H$ elem **jobb oldali inverz**én (vagy röviden jobbinverzén) egy olyan $a_j \in H$ elemet értünk, amelyre $a_j a=e$.

Az $a \in H$ elem **inverze** (vagy kétoldali inverze) egy olyan $a^{-1} \in H$ elem, amely az a-nak mind a bal, mind pedig a jobb oldali inverze, azaz $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Tétel: Minden, asszociatív művelettel rendelkező algebrai struktúrában, amennyiben léteznek, a bal- (a_b) és jobboldali (a_j) inverzek megegyeznek: $a_b = a_j := a^{-1}$

Biz.: $a_b(aa_j) = a_b e = a_b = (a_b a)a_j = ea_j = a_j$

Def.: A T, legalább kételemű halmazt kommutatív testnek nevezünk, ha:

- Értelmezve van a T-n két művelet – egyiket összeadásnak (+), másikat szorzásnak (*) hívjuk.
- T mindkét műveletre nézve kommutatív csoport, de az összeadás egységelemének, az ún. nullelemnek nincsen inverz eleme a szorzásra nézve.
- bármely a, b, c $\in$T-re a*(b+c)=a*b+a*c teljesül.

Az elnevezésben a „kommutatív” jelző a szorzás kommutativitására utal. Ha a szorzás kommutativitását nem kötjük ki, akkor **nemkommutatív** ill. **ferdetest**ről beszélünk.

Feladat:

Ellenőrizzük, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak testet. Ahol nem adjuk meg, ott az eddig ismert szokásos műveletekre vizsgáljuk.

- természetes számok halmaza
- racionális számok halmaza
- valós számok halmaza
- modulo 3 szerinti maradékosztályok (általában modulo p szeritni maradékosztályok, ahol p prímszám). Ez példa **véges elemszámú test**re.

<u>Def.:</u> Legyen T kommutatív test, k, n természetes számok. Ekkor a T test feletti **k×n-es mátrix**on egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek k sora és n oszlopa van, elemei pedig a T-ből valók.
A mátrix **típusa** k×n. A T – beli elemekkel rendelkező, k×n típusú mátrixok halmazát $T^{k\times n}$-nel is jelöljük.

A továbbiakban T =R (valós számok).

<u>További jelölések:</u>

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{n\times m} \in T^{k\times n}$$

Speciális mátrixok:

Sorvektor : $[a_1, a_2, a_{3,} \ldots.. a_n]$

Oszlopvektor:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Nullmátrix (összeadás egységeleme):

$$a_{ik} = 0, \text{ jele: } \underline{\underline{0}} \quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Egységmátrix (szorzás egységeleme), kvadratikus= n x n :

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonál mátrix :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

<u>Szimmetrikus mátrix:</u>

$a_{ik}= a_{ki}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Mátrixok számmal való szorzása (nem művelet!)

$\lambda\cdot A=C \quad \lambda\in \mathbf{R}, \quad c_{ik}=\lambda\cdot a_{ik}$

Megállapodás szerint $\lambda\cdot A=A\cdot\lambda$.

Műveletek mátrixokkal:

Mivel a már tanult vektorok speciális mátrixok, ezért a műveleteket célszerű a már ismert (koordinátás alakban tanult) vektorösszeadással és (skalár)szorzattal összhangban megadni.

Mátrixok összeadása:

Ebben a részben A, B, C, $\underset{=}{0}$ azonos típusú mátrixok.

$C=A+B$

$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$ (számok) (c_{ik} ,a_{ik}, b_{ik} jelenti rendre a C (eredménymátrix), A, B mátrixok i.sorának k.elemét)

Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

A mátrix összeadás tulajdonságai:

Abel-csoport

1. Valóban művelet, hiszen két (n×m) típusú mátrixhoz ugyanolyan típusú mátrixot rendel. (zártság)
2. Kommutatív : A+B=B+A
3. Asszociatív : (A+B)+C=A+(B+C)
4. Minden A-hoz létezik (egyetlen) egység, a $\underline{\underline{0}}$ (nullmátrix), amelyre A + $\underline{\underline{0}}$ = A
5. Minden A-hoz létezik inverz (ellentett) elem, amelyre A+A'= $\underline{\underline{0}}$

Mátrixok szorzása

Vektorok skalárszorzatának kiszámítására $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$ vonatkozó tételen alapul:

A C= A·B mátrixot úgy kapjuk, hogy A minden sorvektorának képezzük a skalárszorzatát B minden oszlopvektorával. Ezért ha A típusa (n×m), akkor B típusa (m×k). Ez azt jelenti, hogy az A és B mátrix csak abban az esetben szorozható össze, ha A-nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek. A szorzatmátrix típusa ennek megfelelően (n×k).

$$c_{ik} := \sum_{l=1}^{m} a_{il} \cdot b_{lk}$$

<u>Példák:</u>

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & 6 & 32 \\ 17 & 18 & 77 \end{bmatrix} \end{array}$$

Speciális eset: egységmátrixszal való szorzás:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>Feladat:</u> Végezze el az alábbi szorzást:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \end{array}$$

Mátrixok szorzásának tulajdonságai:

1. Csak tágabb értelemben művelet, ha az összes mátrixok halmazát nézzük. Ha az alaphalmaz $T^{k\times n}$, akkor a szorzás nem művelet, hiszen különböző típusú mátrixokon van értelmezve, és különböző típust hoz létre.

2. nem kommutatív

3. asszociatív: $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

4. disztributív: $A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$

$(B+C)\cdot A=(B\cdot A)+(C\cdot A)$ (mivel a szorzás nem kommutatív)

5. $(\lambda\cdot A)\cdot B=A\cdot(\lambda\cdot B)=\lambda\cdot(A\cdot B)$

6. A négyzetes, det $(A)\neq 0$ mátrixoknak van inverz eleme, A^{-1} (def. ld. alább).

I. Példa arra, hogy mátrixok szorzása NEM kommutatív:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix} \text{ és } B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 4 & -4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0 & 7\\ 4 & -2\end{bmatrix}=BA.$$

II. Példa arra, hogy a szorzás műveletekor a szokásos egyenletrendezés nem érvényes:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix} \text{ és } C=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AC=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}=BC \text{ DE } A\neq B$$ (magyarázat alább)

III. Példa arra, hogy mátrixok szorzata lehet a null mátrix úgy, hogy egyik tényező sem null mátrix:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \text{ és } B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=BA \text{ DE } A\neq 0,\ B\neq 0.$$

IV. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow A^3=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^3\end{bmatrix}.$

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\ I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow AI_2=I_2A=A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

Gyakaroljuk a MÁTRIXOK ÖSSZEADÁSÁT ÉS SZORZÁSÁT! Interaktív honlap erre:
http://www.mathsnet.net/asa2/modules/p62sumprod.html

Hova kerül a (hely)vektor végpontja, ha egy adott mátrix-szal megszorozzuk? Egyszerű , de jó gyakorlás, nem unalmas (annyira:)

http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=OY097EF0C5.2&lang=en&cmd=new&module=U1%2Falgebra%2Flinshoot.en&type=variable&mat=simple&range=2&shoots=5&grid=2

<u>Def.:</u> Legyen $A \in T^{k\times n}$. Ekkor **A transzponáltj**án azt a $B \in T^{k\times n}$ mátrixot értjük, amelyre $b_{ij}=a_{ji}$
Az A mátrix transzponáltját A^T-vel jelöljük.

<u>Példa:</u>

a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltja $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix lesz.

<u>Mátrix transzponáltja (Főátlóra tükrözöttje):</u>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \left(a_{ik}\right)_{n\times m}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

<u>Megjegyzés:</u> A (négyzetes) szimmetrikus mátrix elemeire $a_{ij} = a_{ji}$. Eszerint az A mátrix szimmetrikus, ha $A=A^T$

Feladatok:

1. $((A)^T)^T = ?$
2. Igaz-e hogy $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. Igaz-e hogy $(A.B)^T = A^T.B^T$

Def.: Azt az A^{-1}-gyel jelölt, n x n-es mátrixot, amelyre $A.\ A^{-1} = (A^{-1.}A) = E_n,$ az A, n x n-es **mátrix inverzének** nevezzük.

Megjegyzés: A mátrix inverzének egyértelműsége a szorzás asszociativitásának következménye.

Inverzmátrix egy kiszámítási módja:

Tétel (2.2.3): Ha A négyzetes mátrix, és det(A)≠0, akkor $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$ ahol

$a^*_{ik} := D_{ki}$, D_{ik}=a_{ik}-hoz tartozó előjeles aldetermináns.

Például 3 x 3 típusú mátrixra:

$$A^* := \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}$$

A* az A mátrix **(klasszikus) adjungáltja**, szokáa adj(A)-val is ejlölni.

Bizonyítás:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$c_{11}=a_{11}\cdot D_{11}+a_{12}\cdot D_{12}+a_{13}\cdot D_{13}==\det(A)=$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(determináns kifejtése 1. sor szerint)

Hasonlóan $c_{22=}$ $a_{21}\cdot D_{21}+a_{22}\cdot D_{22}+a_{23}\cdot D_{23}=\det(A)$, $c_{33}=\det(A)$.
$c_{12}=a_{11}\cdot D_{21}+a_{12}\cdot D_{22}+a_{13}\cdot D_{33}=0$ (determináns ferde kifejtése), hasonlóan $c_{13}=0$,
$c_{21}=0$, $c_{31}=0$, $c_{32}=0$.

$$A^*\cdot A=\begin{bmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\cdot E_n$$

Mivel $A\cdot A^{-1}= E_n$,

ezért $A^{-1}= \dfrac{1}{\det(A)}\cdot A^*$

Fontos még egyszer kiemelni, ha az A mátrixnak van inverze, akkor az egyértelmű (összeadásra is, és szorzásra is)**.**
Biz.: , ua. mint általában, ld. 3. oldal, de itt is megismételjük:
Mivel mindkét művelet asszociatív:

$$B\circ A=C\circ A=E_n \Rightarrow B=B\circ E_n=B\circ(A\circ C)=(B\circ A)C=E_n\circ C=C$$

Elnevezés: A mátrix SZORZÁSRA vonatkozó inverzét (ekkor A négyzetes) INVERZ mátrixnak, összeadásra vonatkozó inverzét ELLENTETT mátrixnak nevezzük.

Inverz mátrix tulajdonságai:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ **.**

2. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **FONTOS!! Bizonyítsa be!**

3. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

4. Ha C invertálható (nem szinguláris), akkor a mátrix egyenletet lehet a szokásos módon rendezni:

- $AC = BC \Rightarrow A = B.$ **BIZ.: szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát jobbról C^{-1}-gyel.**
- $CA = CB \Rightarrow A = B$ **. BIZ.: szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát balról C^{-1}-gyel.**

Példa volt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ és } C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AC = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = BC \text{ DE } A \neq B$$

Itt az egyenletrendezés azért nem érvényes, mert C SZINGULÁRIS!! Det(C)=0, így inverze nem létezik-tehát nem is lehet beszorozni vele:)

Inverz mátrix számítása Gauss-Jordan eliminációval:

Példa:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$ .Keressük az inverzet a következő alakban: $$A^{-1}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}$$

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=E_3.$$

Ez a következő egyenletek megoldását jelenti:

$$A\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Három lineáris egyenletrendszert kell megoldani, olyanokat, amelyeknek az együttható mátrixa azonos, és a jobboldali b konstansokból álló vektor rendre: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A három egyenletrendszer kibővített mátrixai:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

A Gauss-Jordan elimináció első lépésében például az utolsó elem nullázásakor a köv. adódik:

$$\xrightarrow{(3)=(3)+(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

AZONOSAK A JELÖLT RÉSZEK

Csak az utolsó oszlopban van eltérés. Igy egyszerre is megoldhatjuk a 3 egyenletrendszert, megjegyezve, hogy az 4., 5., 6. oszlop rendre az első, második, harmadik egyenletrendszerhez tartozik.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(3)=(3)+(1)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\qquad A \qquad\qquad\qquad E_3$$

stb...

Az $n \times n$ **-es** ***A*** **mátrix inverzének számítása:**

1. $n \times 2n$ **kibővített mátrix:**

$$[A \;\vdots\; E_n] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

A Gauss-Jordan eliminációt alkalmazva: $\left[E_n \;\vdots\; D\right]$ alakra hozzuk a mátrixot, D lesz az A inverze (amennyiben E_n létrehozható). Előfordulhat, hogy a mátrix első n oszlopában NEM áll elő az egységmátrix, akkor az inverz NEM létezik, a mátrix szinguláris.

Példa (folytatás):

A fenti módszerrel keressük meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét:

1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\xrightarrow[(2)=(2)-2^*(1)]{(3)=(3)+(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(2)=-1*(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)=(3)-2*(2)]{(1)=(1)+(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)=(2)-(3)]{(1)=(1)+(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tehát A inverze:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tétel:

Ha A $n \times n$ -es mátrix, és A reguláris (nem szinguláris, vagyis, van inverze) akkor az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van, és ez $x = A^{-1}b$.

A tétel megfordítása is igaz, ha az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor az A mátrix reguláris.

Bizonyítás:

$\Rightarrow$: A reguláris, van egyértelmű inverze: A^{-1}, ezzel:

$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow I_n x = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$.

$\Leftarrow$: TFH., $Ax = b$ -nek egyéretelmű megoldása d. Ez azt jeléenti, hogy az $[A \;\vdots b]$ kibővített mátrix redukált lépcsős alakja $[E_n \;\vdots d]$, amit az elemi sorműveletekkel kaptunk. Ez azt jelenti, hogy ugyanazokat a az elemi sorműveleteket az $[A \;\vdots\; E_n]$ kibővített mátrixra alkalmazva, az $[E_n \;\vdots\; D]$ redukált lépcsős alakot kapjuk, ahol D az A mátrix inverze..

Ellenőrizzük, jól számolunk-e inverz mátrixot (interaktív):
http://www.mathsnet.net/asa2/modules/p62inverse.html

Példa: Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Def.: Azt az algebrai struktúrát, amelyben két művelet, ősszeadás (+) és szorzás (*) van megadva a következő tulajdonságokkal, **gyűrű**nek nevezzük.

Tulajdonságok:

- az összeadás Abel-csoport
- a szorzás asszociatív
- a két műveletet a **disztributív szabály**ok kapcsolják össze:

$$a*(b+c)=a*b+a*c$$
$$(b+c)*a=b*a+c*a$$

Feladatok:

1. Bizonyítsuk be, hogy $T^{n\times n}$ az előzőekben definiált összeadásra és szorzásra nézve gyűrűt alkot.

2. Ellenőrizzük, hogy a háromdimenziós vektorok a szokásos vektor (mátrix!) összeadásra és a vektoriális szorzásra nézve gyűrűt alkotnak-e.

<u>További speciális mátrixok:</u>

<u>Definíció:</u>

Az olyan mátrixot, amelynek mindegyik sorában és oszlopában PONTOSAN egy darab egyes áll, **permutáló** mátrixnak nevezzük.

<u>Következmény:</u> Minden permutáló mátrix a megfelelő típusú egységmátrixból sorok (oszlopok) cseréjével keletkezik.

<u>Példa:</u>

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Feladat:</u>

Az alábbi B mátrixot szorozzuk meg

- jobbról
- balról

a fenti P permutáló mátrix-szal, és figyeljük meg, az eredmény milyen kapcsolatban van az eredeti B mátrix-szal.

Próbáljuk meg általánosan megfogalmazni a megfigyelést.

Definíció:
Az A=(a_{ik}) mátrix **antiszimmetrikus**, ha $a_{ij} = -a_{ji}$, következmény: $a_{ii} = 0$
Példa:
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$ antiszimmetrikus mátrix.

A definíció miatt:
$$\Rightarrow \quad -B^t = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

természetesen általában is igaz, hogyha B antiszimmetrikus, akkor $-B^T=B$, így is lehet definiálni.

Tétel: Minden $A \in T^{n\times n}$ mátrix felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

Biz.: konstruktív:
A mátrix összeadás tulajdonságai miatt az alábbi azonosság (ahol A^T az A mátrix transzponáltja) fennáll:
$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$
Azt kell tehát bizonyítani, hogy az S= $(A + A^T)$ mátrix szimmetrikus, és az
ANT= $A - A^T$ mátrix antiszimmetrikus.

A def. alapján $s_{ik}= a_{ik}+a_{ki}$, valóban $s_{ki}=a_{ki} +a_{ik}=s_{ik}$, igy S valóban szimetrikus.

$ant_{ik}=a_{ik}-a_{ki}= -(a_{ki}- a_{ik})=ant_{ki}$

Feladat: Írja fel a fenti B mátrixot egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként!

Definíció:
A K mátrix **idempotens**, ha $K^2 = K$.

Feladat: Bizonyítsa be az alábbi tulajdonságokat, ha K, K_i idempotens mátrixok!

1. $K^r = K$
2. *E-K* is idempotens, E a megfelelő egységmátrix (Mi igaz (K-E)-re?)
3. ha $K_1K_2 = K_2K_1$ **akkor** K_2K_1 is idempotens

Definíció: Az A mátrix **nilpotens**, ha $A^2=0$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2=0$$

Definíció: A B mátrix **unipotens**, ha $B^2=E$. (Mi a B mátrix inverze:)

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definíció : A G mátrix **ortogonális**, ha $G.G^T=E$, ahol E a megfelelő típusú egységmátrix.

Definíció : A G mátrix **ortogonális**, ha $G^T=G^{-1}$. (G transzponáltja az inverze G-nek)

Megjegyzés: Az elnevezés magyarázata:

$$A = \begin{bmatrix} sor_1 \\ sor_2 \\ sor_3 \\ . \\ . \\ sor_n \end{bmatrix} \quad \mathrm{B}=\left[\mathrm{oszlop}_1,\mathrm{oszlop}_2,\ldots\mathrm{oszlop}_\mathrm{n}\right],$$

$$sor_k = \left[a_{k1}, a_{k2}, \ldots.a_{kn}\right], oszlop_l = \left[a_{1l}, a_{2l}, \ldots a_{nl}\right]$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} sor_1 \cdot oszlop_1 & sor_1 \cdot oszlop_2 & sor_1 \cdot oszlop_3 \ldots. & sor_1 \cdot oszlop_n \\ sor_2 \cdot oszlop_1 & sor_2 \cdot oszlop_2 & sor_2 \cdot oszlop_3 \ldots. & sor_2 \cdot oszlop_n \\ . & & & \\ . & & & \\ sor_n \cdot oszlop_1 & sor_n \cdot oszlop_2 & sor_n \cdot oszlop_3 \ldots & sor_n \cdot oszlop_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$sor_i \cdot oszlop_k = \begin{cases} 0, ha\, i \neq k, vagyis\ a\ sorvektor\ merőleges, ortogonális\ az\ oszlopvektorra, \\ hiszen\ skalárszorzatuk = 0 \\ \\ 1, ha\ i = k \end{cases}$$

<u>Feladat:</u>

Bizonyítsa be, hogy az alábbi G mátrix ortogonális! (Ez a mátrix egy adott pontot az orgó körül θ pozitív szöggel forgat el. Illusztráljuk ezt egy konkrét **<u>p</u>** helyvektor (pont) és szög megadásával, számitsuk ki a **<u>p’</u>=G.<u>p</u>** helyvektor kooordinátáit, és egy koordinátarendszerben ábrázoljuk a **<u>p</u>**, **<u>p’</u>** vektorokat! Alkalmazás pl.a számítógépes grafika lesz)

$$G = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Hasonló három dimenzóban:

Az alábbi mátrixokat harmadrendű **G**ivens mátrixoknak nevezik. Az első pl. a z tengely körüli pozitiv θ szöggel való elforgatás:

$$G_{12} = \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_{13} = \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$G_{23} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{array}$$

(XXXL méretű)Mátrixok szorzása
Particionált (részekre bontott) mátrixok

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ 10000} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ 10000} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{10000\ 1} & a_{10000\ 1} & \cdots & a_{10000\ 10000} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\ 10000} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2\ 10000} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{10000\ 1} & b_{10000\ 1} & \cdots & b_{10000\ 10000} \end{bmatrix}$$

A fenti, pl. 1000 x 1000 típusú mátrixok szorzásánál már problémát okozhat szorzatuk kiszámítása. Ekkor az A és B mátrixokat kisebb, pl. 100×100 **BLOKK-okból álló mátrixokra bonthatjuk:**

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\ 100} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{100\ 1} & A_{100\ 2} & \cdots & A_{100\ 100} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1\ 100} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{100\ 1} & B_{100\ 2} & \cdots & B_{100\ 100} \end{bmatrix},$$

$A_{ij}, B_{ij}, i=1,2,\ldots,100;\ j=1,2,\ldots,100,$ **(**100×100**-as mátrixok)**

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\ 100} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{100\ 1} & A_{100\ 2} & \cdots & A_{100\ 100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1\ 100} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{100\ 1} & B_{100\ 2} & \cdots & B_{100\ 100} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1\ 100} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2\ 100} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{100\ 1} & C_{100\ 2} & \cdots & C_{100\ 100} \end{bmatrix}=C$$

, ahol

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{100} A_{ik}B_{kj}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{i\ 100}B_{100\ j},\ i=1,2,\ldots,100,\ j=1,2,\ldots,100.$$

például:

$$C_{12}=\sum_{k=1}^{100} A_{1k}B_{k2}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}+\cdots+A_{1\ 100}B_{100\ 2}\,\textbf{.}$$

Tehát “csak ” 100 x 100-as mátrixok szorzatát kell kiszámítani.

Általában:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ np} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ np} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mq\ 1} & a_{mq\ 2} & \cdots & a_{mq\ np} \end{bmatrix}$$

A típusa: $mq \times np$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\ sr} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2\ sr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{np\ 1} & b_{np\ 2} & \cdots & b_{np\ sr} \end{bmatrix}$$

B típusa: $np \times sr$ **.**

A két mátrixot a következőképpen bonthatjuk részekre:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \cdots & A_{qp} \end{bmatrix}$$

és

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pr} \end{bmatrix},$$

Az A_{ij} **mátrixok** $m\times n$ **típusúak,** B_{jk} **mátrixok pedig** $n\times s$ **típusúak,**
$i=1,2,\ldots,q;\ j=1,2,\ldots,p,\ k=1,2,\ldots,r.$

Ezekkel:

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \cdots & A_{qp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pr} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{q1} & C_{q2} & \cdots & C_{qr} \end{bmatrix}=C_{mq\times sr}$$

Itt:

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{p}A_{ik}B_{kj}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{ip}B_{pj},\ i=1,2,\ldots,q;\ j=1,2,\ldots,r,$$

C_{ij} -k $m\times s$ **típusú mátrixok.**

Példa: $A_{4\times4}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \vdots & 1 & 0\\ 0 & 2 & \vdots & 3 & -1\\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots\\ 2 & 0 & \vdots & -4 & 0\\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$ $\quad B_{4\times6}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 & 2 & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 3 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}.$

A pontozott vonalakkal jelölt részmátrixok rendre:

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, B_{12}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}, B_{21}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -3 & -1 & 2\end{bmatrix}, B_{22}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Ezekkal A és B szorzata:

$$A_{4\times4}B_{4\times6}=C_{4\times6}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0 & \vdots & 1 & 2 & -1\\ 6 & 12 & 0 & \vdots & -3 & 7 & 5\\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & -12 & 0 & \vdots & 2 & -2 & -2\\ -9 & -2 & 7 & \vdots & 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Érdekes linkek:

Angol:

http://www.cs.unr.edu/~bebis/CS791E/Notes/2D_geometrical_transf.pdf

Interaktív, hogyan változik a síkidom alakja:

http://www.mathsnet.net/asa2/modules/p62transform.html

Magyar:

http://www.fsz.bme.hu/~szirmay/grafika/bmetransf.pdf