Vektorok által generált altér, lineáris összefüggőség, függetlenség, generátorrendszer, bázis, dimenzió

Ebben a részben általánosítjuk a térbeli vektorokra már megismert hasznos fogalmakat. A legfontosabb, hogy bármely vektortérben le tudjuk irni, meg tudjuk adni a vektorokat valamilyen módon. Ez a mód a koordinátázás lesz. Látni fogjuk azonban, hogy nem minden vektorrendszer (koordinátarendszer) alkalmas erre, ugyanis vannak olyanok, amelyekre vonatkozóan nem lenne egyértelmű a koordinátázás, ezek nyilván hasznavehetetelenek. Tehát először meg kell fogalmaznunk, milyen tulajdonságúnak kell lennie azoknak a vektoroknak, amelyekkel a többit le szeretnénk írni. Emiatt van szükség a címben említett fogalmakra. Az itt említett problémákat először példákon illusztráljuk.

Definíció:

A $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorok **lineáris kombinációja** $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$
,
ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k \in$ T.

Azt mondjuk, hogy a v vektor a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineáris kombinációja, ha $\exists$ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ $\in$ T, amelyekkel $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k$

(T az a test, amely fölötti vektortérről van szó.)

Példa:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1e_1 + 2e_2 + 3e_3\,,$$

A v vektor tehát az e_1, e_2, e_3 vektorok lineáris kombinációja. Ez az előállítás itt egyértelmű, ez azonban más alapvektorok esetében nincsen mindig így. Ezt a rendszert szokás i, j, k rendszernek , vagy kanonikus bázisnak is nevezni.

Az e fejezetben elmondottakat 3 dimenzióban már vettük, ismétlésképpen nézzük meg a térbeli felbontási tételt.

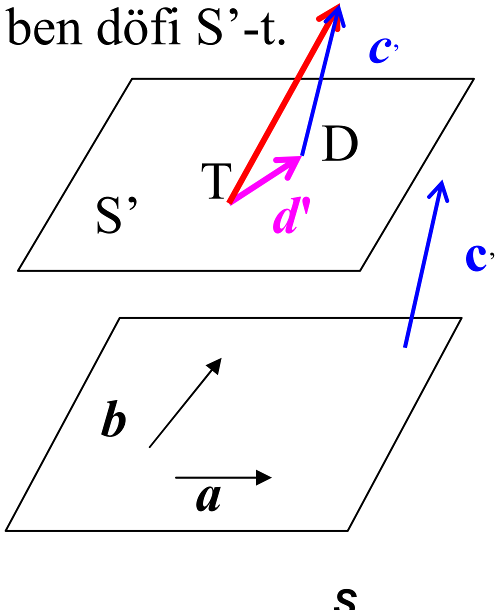
Tétel (Vektorok felbontása térben-volt):

Ha adott a térben három, nem egysíkú, páronként nem párhuzamos vektor, ***a, b, c***, akkor bármely **d** térbeli vektorhoz van olyan $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, amelyekre igaz, hogy $\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$.

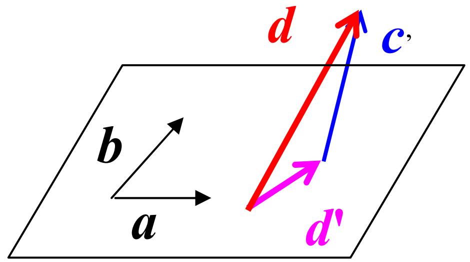
Ez a felbontás egyértelmű.

Biz.: ***d*** talppontján, T-n át az S síkkal || S' síkot rajzolunk.

c nem párhuzamos ***a***-val és ***b***-vel, tehát a ***d*** végpontjában ***c***-vel húzott || egyenes D-ben döfi S'-t.



1. D-ből T-be mutató vektor legyen ***d'***.



$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{d}'+\boldsymbol{c}'=(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})+\gamma\boldsymbol{c}$,
hiszen ***d'*** egy síkban van ***a***-val és ***b***-vel, így az előző tétel miatt felírható azok lineáris kombinációjaként.

Példa:

Már láttuk, hogy pl. a 2 x 2-es mátrixok a szokásos mátrix összeadásra és valós számmal való szorzásra nézve vektorteret alkotnak a való számok teste felett. Igy e térben a „vektorok" a 2 x 2-es mátrixok. Tekintsük itt az alábbi „vektorokat":

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel a v vektort a v1, v2, v3 vektorok lineáris kombinációjaként!

Megoldás:

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = v_1 + 2v_2 - v_3 .$$

Példa: Lineáris egyenletrendszer értelmezhető (oszlop)vektorok **lineáris kombinációjaként:**

$$Ax=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=b.$$

A megoldás: $\Rightarrow\ x=\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 1\end{bmatrix}$, ami azt jelenti, hogy

$$A\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 1\end{bmatrix}==2\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=b$$

$$=2oszlop_1(A)-3oszlop_2(A)+oszlop_3(A)=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=b$$

Az egyenletrendszert nem mátrix-szorzásként, értelmeztük, hanem a mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként. Tehát a b vektor az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációja. Ez egyben azt is mutatja, ha van megoldás, akkor a b vektor előáll az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként, ha nincsen megoldás, nem létezik ilyen lineáris kombináció sem.

Példa:

Irjuk fel a $v=\begin{bmatrix}4\\5\\5\end{bmatrix}$ vektort a következő vektorok lineáris kombinációjaként!

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}.$$

Megoldás: $v=\begin{bmatrix}4\\5\\5\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3$

$\Leftrightarrow$ az alábbi lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$A\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&3\\3&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\5\end{bmatrix}.$$

$c_1=-2t+3,\ c_2=t-1,\ c_3=t,\ t\in R.$ $v=(-2t+3)v_1+(t-1)v_2+tv_3,\ t\in R$

A v vektor **végtelen sokféleképpen** állítható elő a megadott vektorok lineáris kombinációjaként.

Példa: Állítsuk elő a $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$ vektort a következő vektorok lineáris kombinációjaként:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3, \quad A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ Ennek a lineáris egyenletrendszernek **nincsen megoldása**

$\Leftrightarrow$ v **nem állítható** elő a v_1, v_2, v_3 vektorok lineáris kombinációjaként.

Definíció:

A $v_1, v_2, \dots, v_k$ **vektorok által generált altér** ezen vektorok összes lineáris kombinációja: $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k \mid c_1, c_2, \dots, c_k \in R\}$

E definíció helyes, ugyanis valamely vektorok halmaza akkor és csak akkor altér, ha bármely halmazbeli vektor számszorosa is halmazbeli, és bármely két halmazbeli vektor összege is halmazbeli. Ez a definícióból könnyen adódik (hf.)

Példa: Vizsgáljuk meg a következő vektorok (kanonikus bázis) által generált alteret!

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad .$$

Megoldás:

$$\langle\, e_1, e_2, e_3 \,\rangle = \left\{ c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \,|\, c_1, c_2, c_3 \in R \right\} = R^3$$

Az eredmény nem meglepő, hiszen a térbeli felbontási tételből is adódik.

Példa:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Igaz-e, hogy $\langle v, v_2, v_3 \rangle = \mathrm{R}^3$?

Megoldás:

Ha igen, akkor minden $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in R^3$, léteznek olyan c_1, c_2, c_3 valós számok, hogy

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 .$$

$$\text{vagyis: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

A megoldás (egyértelmű, a, b, c paraméterekkel mindegyik együttható kifejezhető):

$$c_1 = \frac{-2a+2b+c}{3},\ c_2 = \frac{a-b+c}{3},\ c_3 = \frac{4a-b-2c}{3}.$$

$$v = \left(\frac{-2a+2b+c}{3}\right)v_1 + \left(\frac{a-b+c}{3}\right)v_2 + \left(\frac{4a-b-2c}{3}\right)v_3 .$$

Tehát minden R^3-beli vektor felírható a v_1, v_2, v_3 vektorok lineáris kombinációjaként, tehát az egész tér előáll. (a lineáris kombináció itt is egyértelmű, összhangban a térbeli felbontási tétellel)

Generátorrendszer: vektorok olyan rendszere, amelyek lineáris kombinációjaként a vektortér minden eleme előáll.

Példa: R3-ban minden 3 páronként nem párhuzamos, nem egysíkú vektor generátorrendszert alkot. Ezt illusztrálják a fenti példák is.

Feladat: Adja meg a 2 x 2-es mátrixok egy generátorrendszerét!

Példa:

Igazoljuk, hogy a $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektorok az R^2 egy generátorrendszerét alkotják!

Megoldás: Azt kell bizonyítani, hogy bármely $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ vektor felírható a g_1, g_2, g_3 vektorok lineáris kombinációjaként.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

vagyis $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -2 & 0 & b-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2}(a+b) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \end{bmatrix}$ tehát

$\alpha_1 = \frac{1}{2}(a+b) + \alpha_3,\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(a-b),\ \alpha_3$ tetszőleges.

Legyen $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, ekkor például az $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ vektor a következőképpen írható fel:

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = 2\underline{g}_1 - \frac{1}{2}\underline{g}_2 + \frac{1}{2}\underline{g}_3$$

Legyen $\alpha_3 = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = 1\underline{g}_1 - \frac{1}{2}\underline{g}_2 + \frac{1}{2}\underline{g}_3$$

∞ sokféleképpen írható fel bármely R^2-beli vektor a $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ lineáris kombinációjaként.

Példa: Igazoljuk, hogy az $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ vektorok R_2 egy generátorrendszerét alkotják!

Megoldás: $\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$, előzőhöz hasonlóan:

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2&=a\\ \alpha_1-\alpha_2&=b\end{aligned} \;\rightarrow\; \begin{aligned}\alpha_1&=\frac{1}{2}(a+b)\\ \alpha_2&=\frac{1}{2}(a-b)\end{aligned} \;\rightarrow$$

Ez esetben a felírás egyértelmű!
(Függetlenek a vektorok.)

Példa: ***i***, ***j*** rendszerre mit mondhatunk? És ***i***, ***j***, ***k*** –ra?

Konklúzió: bizonyos generátorrendszer elemeinek lineáris kombinációja egyértelműen állítja elő a tér vektorait, bizonyosak pedig nem. Ennek kritériuma az ún. **lineáris függetlenség .**

A **lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség** fogalmak a vektorok egymással való kapcsolatát fejezik ki. A függetlenség azt biztosítja, hogy a független vektorok közül egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjával, míg az összefüggő vektorok közül legalább egyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjával.

<u>Definíció:</u> (Lineáris összefüggés (LÖF):

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok **lineárisan összefüggő**k, ha a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$ lineáris kombinációban $\exists i, \lambda_i \neq 0$.

(vagyis $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_i \underline{v}_i + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$ úgy, hogy egyik tag, az i-dik, nem nulla.)

Példa: LÖF síkban:

1. eset
2. $\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} = 0$ / tegyük fel, hogy $\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_1 \underline{a} = -\lambda_2 \underline{b} \qquad / \cdot \frac{1}{\lambda_2}$$

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \underline{a} = \underline{b}$$

Síkban **két vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha párhuzamosak**. (Ekkor egymás lineáris kombinációjaként előállíthatók)

2. eset

Most legyen $\underline{a}$ nem párhuzamos $\underline{b}$ -vel, és $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan összefüggő:

$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} = \underline{0}$ $\left\{ \right.$ Csak úgy lehet lineárisan összefüggő, ha $\lambda_3 \neq 0$, ui, ha például $\lambda_2 \neq 0$ lenne $\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + 0\underline{c} = \underline{0}$ -ban $\lambda_2 \neq 0$ miatt $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineárisan összefüggő lenne, vagyis párhuzamos.

$$\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c} = 0$$

$$\underline{c} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \underline{a} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \underline{b}$$

$\Rightarrow$ $\underline{c}$ kifejezhető $\underline{a}$ -val és $\underline{b}$ -vel!

Síkban tehát, ha 3 vektor összefüggő, akkor legalább az egyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

<u>Tétel (síkbeli felbontási tétel más megfogalmazása):</u>
Síkban bármely három vektor lineárisan összefüggő.

<u>Példa:</u> LÖF TÉRBEN

a.) $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} = \mathbf{0} \leftrightarrow \exists\lambda_i \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

b.) $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} = 0$ TFF. Hogy **a** nem párhuzamos **b**, akkor $\lambda_3 \neq 0$

$\mathbf{c} = \lambda_1^*\mathbf{a} + \lambda_2^*\mathbf{b}$

Ekkor a vektorok egysíkúak, és egyik kifejezhető a másikkal.

Tfh. $\lambda_1 \neq 0$ vagy $\lambda_2 \neq 0$ **ugyanaz mondható el.**

c.) $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$ $\lambda_3 \neq 0$ lenne, akkor bármely d vektorra:

$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} + \lambda_4\mathbf{d} = \mathbf{0}$ a térbeli felbontási tételt kaptuk

<u>Definíció:</u>: Lineáris függetlenség (FGTLEN)

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ lineárisan független, ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mathbf{0}$ csak úgy lehetséges,ha

$$\forall i \;\; \lambda_i = 0$$

<u>Tétel:</u>

Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, v_n$ LÖF, tetszőleges vektort hozzávéve, továbbra is LÖF marad.

<u>Biz.:</u> $\underbrace{\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_i \underline{v}_i + \ldots}_{\text{LÖF volt , } \exists \lambda_i \neq v \text{ úgy , hogy } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = 0} + \underbrace{\lambda_n \underline{v}_n +}_{\text{Ezt vesszük hozzá}} \lambda_{n+1} \underline{v}_{n+1} = 0$

LÖF,def.-nek eleget tesz $\lambda_i v_i$ miatt ha $\alpha_{n+1}=0$-t választjuk,
hiszen $\lambda_i \neq 0$-val LÖF teljesül

Kérdés:
Hány vektort szabad hozzávenni, hogy még LÖF maradjon?

Tétel:
Ha $v_1,v_2,...,v_n$ FGTLEN, tetszőleges vektort elhagyva FGTLEN marad.

Biz.:
Előzőre visszavezetjük, tfh. a FGTLEN rendszerből már elhagytunk egy vektort, és az így kapott rendszer, LÖF. Az előző tétel szerint, ha ehhez a LÖF rendszerhez hozzáveszünk egy vektort, a rendszer LÖF marad. Tehát akkor az eredeti is LÖF lenne, ami ellentmondás.

Tétel:

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ A.CS.A LÖF, ha $\exists i$, hogy $\underline{v}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k \underline{v}_k$ (legalább egy vektor a többivel kifejezhető)

a.) Ha LÖF, akkor $\exists\ \underline{v}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k \underline{v}_k$

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_i \underline{v}_i + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n + \lambda_{n+1} \underline{v}_{n+1} = 0$ $\exists i$ hogy $\lambda_i \neq 0$

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n + \lambda_{n+1} \underline{v}_{n+1} = -\lambda_i \underline{v}_i,$ $\underline{v}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k / \lambda_i v_k$

b.) Ha $\underline{v}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \underline{v}_k \Rightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_i, \ldots, \underline{v}_n$ LÖF.

Ugyanis: $\underline{v}_i = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n$

$$0 = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \underline{v}_{i-1} + (-1) \cdot \underline{v}_i + \alpha_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \ldots + \alpha_n \underline{v}$$

$$\alpha_i \neq 0$$

Tétel:

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ függetlenek, és $\underline{v}_{n+1}$ -et hozzávéve lineárisan összefüggők lesznek, akkor $\underline{v}_{n+1}$ kifejezhető: $\underline{v}_{n+1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i}$.

$$\underbrace{\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n}_{\text{Független volt}} + \underbrace{\lambda_{n+1} \underline{v}_{n+1}}_{\text{Ezt vettük hozzá.}} = \underline{0}$$

0

$\Downarrow$

$\exists i, \lambda_i \neq 0$, mert most lineárisan összefüggő. Ha $i \leq n$ lenne, akkor (vagyis $\lambda_{n+1} = 0$), akkor $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i + \lambda_{n+1} \underline{v}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$ és $\exists \lambda_i \neq 0$,

ami azt jelentené, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ lineárisan összefüggő lenne, ellentmondás!

Tehát $\lambda_{n+1} \neq 0$.

$$\Rightarrow \underline{v}_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}} \underline{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{v}_k$$

Tétel: A $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i$ előállítás akkor és csak akkor egyértelmű, ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ lineárisan független rendszer.

Bizonyítás: („visszafelé”)

Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ független rendszer. Ekkor egyértelmű $\underline{v}$ előállítása.

Indirekt módon: $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{v}_i$

$\underline{0} = \underline{v} - \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \underline{v}_i$, mivel $\underline{v}_i$ független, $(\alpha_i - \beta_i) = 0$ $\forall i$ -re: $\alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$ egyértelmű.

Bizonyítás: („oda”)

Ha a felírás egyértelmű, akkor $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ független.

Indirekt módon: Tegyük fel, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ lineárisan összefüggő, előzőek szerint:

$$\exists i \quad \underline{v}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \underline{v}_k$$

De akkor: $\underline{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{v}_k$ -ba $\underline{v}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k \underline{v}_k$ -t írva $\underline{v}$ egy másik, különböző felírását kapnánk,

ami ellentmond $\underline{v}$ egyértelmű felírásának.

Példa: Három dimenzióban, tegyük fel, hogy egyik vektor a másik kettő lineáris kombinációja:

$$\underline{v}_2 = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2$$

Ekkor:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 \underline{v}_3 = (\alpha_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\underline{v}_3$$

Két különböző lineáris kombináció létezik,

<u>Ism.: Definíció:</u> Lineáris függetlenség

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ lineárisan független, ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mathbf{0}$ csak úgy lehetséges,ha $\forall i \quad \lambda_i = 0$

<u>Függetlenség síkban:</u>

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

vagyis ha Pl.: $\lambda_1 \neq 0$ és $\lambda_2 \neq 0$, akkor a lineáris kombináció sosem lehet NULLA! (paralelogramma szabály – az átló sosem nulla hosszúságú, ha az oldalak nem azok!) $\Leftrightarrow \mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$

<u>Függetlenség térben:</u> $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \nparallel \mathbf{c}$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nem egysíkúak

$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c} = 0$ a parallelepipedon nem elfajuló

<u>Példa:</u> összefüggő-e a alábbi vektorrendszer:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}?$$

Megoldás:

$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 = \underline{0}$ Miként állítható elő a $\underline{0}$?

$$\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Csak triviális megoldás létezik, ezért függetlenek.

<u>Definíció:</u> A lineárisan független vektorokból álló generátorrendszert bázisnak nevezzük.

A bázisnak tehát két fontos tulajdonsága van:

- a bázisvektorok lineárisan függetlenek
- minden vektor előáll a bázisvektorok lineáris kombinációjaként

Példa:

Bizonyítsuk be, hogy az $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ vektorok az R^3 egy bázisát alkotják.

Megoldás: Első tul.: függetlenség

$$\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&2&0\end{array}\right]$$

$$\lambda_1+\lambda_3=0$$
$$\lambda_1+\lambda_2=0$$
$$\lambda_2+\lambda_3=0$$
$$2\lambda_3=0$$
$$\lambda_3=0$$
$$\lambda_2=0=\lambda_1$$

Csak triviális megoldása van, tehát független rendszer.
(A paralelepipedon térfogata≠0, csak akkor, ha a vektorokat „0-szor" vesszük.)

Második tul.: Minden vektor előállítható a bázisvektorok lineáris kombinációjaként (hf).

Megjegyzés: A megoldásból kitűnik, hogyha det(A)=0, ahol A a vektorokat mint oszlopokat tartalmazza, akkor van triviálistól különböző megoldás, vagyis, akkor összefüggő a vektorrendszer.

Az előzőekből láttuk, hogy egy vektorrendszer akkor és csak akkor FGTLEN, ha bármely más vektor EGYÉRTELMŰEN írható fel az elemek lineáris kombinációjaként. Ezért a vektortér vektorait a bázisok segítségével reprezentálhatjuk (máskülönben az előállítás nem lenne egyértelmű)

Definíció: Ha a $\underline{v}_i$ vektorok bázist alkotnak, akkor a $\underline{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{v}_k$ lineáris kombinációban a α_k valós számokat a v vektor $\underline{v}_i$ bázisra vonatkoztatott **koordinátáinak** nevezzük.

Amennyiben megállapodunk a vektorok felírási sorrendjében, akkor a vektor egy rendezett szám n-esel reprezentálható.

Tétel: Bármely vektortérben a bázisok elemszáma egyenlő.

Bizonyítás: A **kicserélési tétel** szerint, bármely független vektorrendszer elemei kicserélhetők egy adott generátorrendszer elemeivel úgy, hogy független rendszert kapunk. A bázis független vektorokból álló generátorrendszer.

Mivel a bázis generátorrendszer is:

FGETLEN legyen Bázis1, elemszáma n1, a GEN.rsz. legyen Bázis2, elemszáma n2

Ekkor n2≥n1

FGETLEN legyen Bázis2 elemszáma n2 – GEN. rsz. Legyen Bázis1, elemszáma n1,

Ekkor n1≥ n2. Ez csak úgy lehetséges, ha n1=n2.

KICSERÉLÉSI TÉTEL:

Az $\underline{\mathbf{f}}_1, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$ független vektorokból álló rendszer **bármely** $\underline{\mathbf{f}}_i$ vektorához a $\underline{\mathbf{g}}_1, \dots, \underline{\mathbf{g}}_j$ generátorrendszerből található olyan $\underline{\mathbf{g}}_k$ vektor, amellyel $\underline{\mathbf{f}}_i$ –t kicserélve a

$\underline{\mathbf{f}}_1, \dots \underline{\mathbf{f}}_{i-1}, \underline{\mathbf{g}}_k, \underline{\mathbf{f}}_{i+1}, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$

rendszer is független

Bizonyítás:

$\underline{\mathbf{f}}_1, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$ FGETLEN, akkor $\forall$ $\underline{\mathbf{f}}_i$-hez van olyan $\underline{\mathbf{g}}_k$, amire kicserélve $\underline{\mathbf{f}}_i$-t FGETLEN marad:

Ugyanis ha pl. $\underline{\mathbf{f}}_1$-hez nem lenne egyik $\underline{\mathbf{g}}_i$ sem jó, akkor minden egyes $\mathbf{g_i}$-re:

$\underline{\mathbf{g}}_1\ \underline{\mathbf{f}}_2, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$ LÖF $\Longrightarrow$ $\underline{\mathbf{g}}_1 : \underline{\mathbf{f}}_2, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$-nel kifejezhető: $g_1 = \sum_{k=2}^{n} \alpha_{1k} \underline{f}_k$

$\underline{\mathbf{g}}_2\ \underline{\mathbf{f}}_2, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$ LÖF $\Longrightarrow$ $\underline{\mathbf{g}}_2 : \underline{\mathbf{f}}_2, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$-nel kifejezhető: $g_2 = \sum_{k=2}^{n} \alpha_{2k} \underline{f}_k$

…

$\underline{\mathbf{g}}_j\ \underline{\mathbf{f}}_2, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$ LÖF $\Longrightarrow$ $\underline{\mathbf{g}}_e : \underline{\mathbf{f}}_2, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$-nel kifejezhető: $g_j = \sum_{k=2}^{n} \alpha_{jk} \underline{f}_k$

vagyis a $\mathbf{g_i}$ -k helyébe $\underline{\mathbf{f}}_2, \dots \underline{\mathbf{f}}_n$-k lineáris kombinációját írhatjuk.

Mivel $\underline{\mathbf{g}}_i$-kel $\forall$ vektor kifejezhető, így $\underline{\mathbf{f}}_1$ is: $\underline{\mathbf{f}}_1 = \beta_1\underline{\mathbf{g}}_1 + \dots \beta_j\underline{\mathbf{g}}_j$, de a $\underline{\mathbf{g}}_i$-k ki vannak fejezve f_k-kal, ezért f_1 is ki van fejezve a többi f_k-val, tehát az f_k **vektorok összefüggők lennének. Ez ellentmondás.**

Következmény:

$\underline{\mathbf{f}}_1, \dots \underline{\mathbf{f}}_{i-1}, \underline{\mathbf{g}}_k, \underline{\mathbf{f}}_{i+1}, \dots \underline{\mathbf{f}}_n \quad \Longrightarrow \quad \underline{\mathbf{g}}_1, \dots \underline{\mathbf{g}}_j \quad j \geq n$,

vagyis a generátorrendszer elemszám mindig nagyobb, vagy egyenlő, mint a független vektorokból álló rendszer elemeinek száma.

Mivel a bázis generátorrendszer is:

FGETLEN legyen Bázis1, elemszáma n1, a GEN.rsz. legyen Bázis2, elemszáma n2

Ekkor n2≥n1

FGETLEN legyen Bázis2 elemszáma n2 , GEN. rsz. Legyen Bázis1, elemszáma n1,

Ekkor n1≥ n2. Ez csak úgy lehetséges, ha n1=n2.

<u>Következmények:</u>

- N dimenziós térben bármely n db FGETLEN vektor bázis.
- N dimenziós térben bármely n+1 db vektor LÖF.

Definíció: A vektortér **dimenzió**ján bázisának elemszámát értjük.
(A definíció helyes, hiszen minden bázisnak ugyanannyi eleme van az előző tétel szerint.)

Feladatok:
A fentebb szereplő példákban több vektorrendszer található. Válasszuk ki közülük a generátorrendszereket, bázisokat, adjuk meg a generált tér dimenzióját.

Típusfeladatok:

- adott vektorok generátorrendszert alkotnak-e?
- adott vektorok bázist alkotnak-e?
- adott vektorok függetlenek-e?
- adott vektorokkal másik adott vektor kifejezhető-e?
- adott vektornak mik a koordinátái egy bázisra vonatkozóan?
- adott vektort többféleképpen kifejezni löf generátorrendszer elemeivel

Összefoglalás

E fejezetben láttuk, hogy minden vektortér felfogható bizonyos vektorok generátumaként. E vektorok összessége a **generátorrendszer**. Ez azt jelenti, hogy a tér minden vektora előállítható a generátorrendszer elemeinek **lineáris kombináció**jával. Ha a generátorrendszer vektorai lineárisan **függetlenek**, akkor minden más vektor **egyértelműen** áll elő ezek lineáris kombinációjaként. Ezért az ilyen, **független vektorok**ból álló **generátorrendsze**reket megkülönböztetésül **bázis**nak nevezzük. A bázisvektorok lineáris kombinációjaként előállított vektorok **koordinátái** a lineáris kombinációban szereplő skalárok. A **koordináta** tehát mindig valamely **előre rögzített bázisra vonatkozik**. A **bázisok elemszáma egy**enlő, ez a szám a vektortér **dimenzió**ja.