Differenciálszámítás
(Gyakorló feladatok)

Programtervező matematikus szakos hallgatóknak
az Analízis 3. című tárgyhoz

Összeállította: Szili László

$\boxed{\text{L-Sch}}$ -sel hivatkozunk a Leindler–Schipp jegyzetre

2004. szeptember

A derivált definíciója és a deriválás technikája

F1. A definíció alapján vizsgálja meg az alábbi függvényeket deriválhatóság szempontjából, és adja meg a deriváltfüggvényeket is:

(a) $f(x) := x^3 - 2x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$; (b) $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \quad (x > -1)$; (d) $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2-3} \quad (x > 3)$;

F2. Gyakorolja a deriválás technikáját! (L. a $\boxed{\text{L-Sch}}$ 6–8. feladatokat.)

F3. Határozza meg az alábbi függvények deriváltját:

(a) $x^x \quad (x > 0)$; (b) $(1 + \frac{1}{x})^x \quad (x > 0)$;

(c) $f(x) := (\ln x)^x \quad (x > 1)$; (d) $\boxed{\text{L-Sch}}$ 10.

F4. Írja fel az f függvény grafikonjának az x_0 abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét:

(a) $f(x) := \dfrac{x+1}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}), \quad x_0 = 3$;

(b) $f(x) := \sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$;

(c) $f(x) := \sin x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad x_0 = 1/2$;

(d) $f(x) := \dfrac{1}{\ln^2(x - \frac{1}{x})} \quad (x > 1), \quad x_0 = 2$;

(e) $f(x) := x^{\ln x} \quad (x > 0), \quad x_0 = e^2$.

F5. Keressen az $y = e^x$ egyenletű görbéhez olyan érintőt, amely

(a) párhuzamos az $x - 4y = 1$ egyenessel,

(b) átmegy az origón.

F6. Keresse meg az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszisnek azokat a pontjait, amelyekben az érintő meredeksége 1.

F7. Írja fel az alábbi egyenletek által meghatározott síkgörbéknek a megadott pontokhoz tartozó érintőjük egyenletét:

(a) $y = \dfrac{x}{x^2-2}, \quad (2, 1)$; (b) $y = (e^x + e^{2x}), \quad (0, 2)$.

F8. Bizonyítsa be, hogy az alábbi függvényeknek létezik a jobb oldali és a bal oldali deriváltjuk a 0 pontban, de ezek nem egyenlők, ezért nem deriválhatók ebben a pontban:

(a) $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R});$ (b) $f(x) := e^{|x|} \quad (x \in \mathbb{R});$

(c) $f(x) := |\ln(1+x)| \quad (x > -1).$

F9. Az értelmezési tartományuk mely pontjában deriválhatók az alábbi függvények? (a, b és c valós paraméterek.) Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat.

(a) $f(x) := |x| \ (x \in \mathbb{R});$ (b) $f(x) := x|x| \ (x \in \mathbb{R});$

(c) $f(x) := \ln|x| \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$ (d) $f(x) := \dfrac{1}{|x|+1} \ (x \in \mathbb{R});$

(e) $f(x) := x^2(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign}|x-1|) \ (x \in \mathbb{R});$

(f) $f(x) := \begin{cases} x + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \geq 0; \end{cases}$ (g) $f(x) := \begin{cases} 1 - x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0; \end{cases}$

(h) $f(x) := \begin{cases} 1 - ax, & x < 0 \\ e^{-x^2}, & x \geq 0; \end{cases}$ (i) $f(x) := \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \in \mathbb{Q}^*; \end{cases}$

(j) $f(x) := \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0; \end{cases}$

(k) $f(x) := \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ a \sin x + x + b, & x > 0. \end{cases}$

F10. Tegyük fel, hogy a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Fejezze ki az f függvény deriváltját g segítségével, ha:

(a) $f(x) := x^2 g(x) \quad (x \in \mathbb{R});$ (b) $f(x) := g(x^2) \quad (x \in \mathbb{R});$

(c) $f(x) := g^2(x) \quad (x \in \mathbb{R});$ (d) $f(x) := g(g(x)) \quad (x \in \mathbb{R});$

(e) $f(x) := g(e^x) \quad (x \in \mathbb{R});$ (f) $f(x) := e^{g(x)} \quad (x \in \mathbb{R});$

(g) $f(x) := g(\ln x) \quad (x > 0);$

(h) $f(x) := \ln|g(x)| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid g(y) = 0\}).$

F11. Legyenek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki h'-t f és g segítségével, ha

(a) $h(x) := \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \quad (x \in \mathbb{R});$ (b) $h(x) := f(g(\sin x)) \ (x \in \mathbb{R});$

(c) $h(x) := \log_{f(x)}\big(g(x)\big) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid f(y) = 1\}).$

F12. Mutassa meg, hogy az $f(x) := x^3 + x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény invertálható, $f^{-1} \in D$, és számítsa ki $\left(f^{-1}\right)'(2)$-t.

F13. Bizonyítsa be, hogy a Riemann-függvény az értelmezési tartományának egyetlen pontjában sem deriválható.

F14. Adjon példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely differenciálható, de

(a) a deriváltfüggvénye nem differenciálható a 0 pontban;

(b) a deriváltfüggvénye nem folytonos.

F15. Tegyük fel, hogy az f és a g valós-valós függvények, továbbá $c \in \operatorname{int}\left(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\right)$. Mit lehet mondani az $f + g$, illetve az $f \cdot g$ függvény c-beli deriválhatóságáról, ha

(a) f differenciálható c-ben és g nem differenciálható c-ben;

(b) f és g egyike sem differenciálható a c pontban?

F16. Igaz-e az, hogy ha $f, g \notin D\{c\}$, akkor $f + g$ (illetve $f \cdot g$) sem deriválható c-ben?

F17. Adjon meg olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket és olyan $c \in \mathbb{R}$ pontot, amelyekre

(a) $g \in D\{c\}$ és $f \notin D\{g(c)\}$

(b) $g \notin D\{c\}$ és $f \in D\{g(c)\}$

(c) $g \notin D\{c\}$ és $f \notin D\{g(c)\}$

teljesül, azonban $f \circ g \in D\{c\}$.

F18. Legyen f olyan valós-valós függvény, amelynek az értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$ halmaz. Mutassa meg, hogy ha f deriválható az $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor létezik és véges a

$$\lim_{n \to +\infty} \Big(n\big(f(a + \frac{1}{n}) - f(a)\big)\Big)$$

határérték. Ennek a határértéknek a létezéséből következik-e az, hogy $f \in D\{a\}$?

F19. Bizonyítsa be, hogy ha $f \in D\{a\}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h} = f'(a).$$

Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre az $a \in \mathbb{R}$ pontban létezik és véges a fenti határérték, akkor igaz-e az, hogy $f \in D\{a\}$?

F20. Határozza meg az alábbi magasabbrendű deriváltakat ($n \in \mathbb{N}$ paraméter):

(a) $f(x) := x^2 \ln x \quad (x \in \mathbb{R}^+), \;\; f^{(2)}(x) = \cdots;$

(b) $\left(e^x\right)^{(n)} \quad (x \in \mathbb{R});$ (c) $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\});$

(d) $\sin^{(n)}, \quad \mathrm{sh}^{(n)},$ (e) $\cos^{(n)}, \quad \mathrm{ch}^{(n)};$

(f) $f(x) := \ln(1+x) \quad (x \in (-1, +\infty)), \qquad f^{(n)}(x) = \cdots;$

(g) $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}, \qquad f^{(n)}(0) = \cdots.$

F21. **Leibniz-féle szabály:** Legyen $f, g \in D^n\{a\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Igazolja, hogy ekkor $f \cdot g \in D^n\{a\}$, és

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Összeg és határérték meghatározása, hatványsorba fejtés a deriválás technikájával

F22. Írja fel „zárt alakban” az alábbi összegeket:

(a) $F(x) := 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R});$

(b) $G(x) := 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

F23. Számítsa ki az alábbi sorok összegét:

(a) $\sum\limits_{k=1} kx^k \; (-1 < x < 1);$ (b) $\sum\limits_{k=1} k^2x^k \; (|x| < 1);$

(c) $\sum\limits_{k=0} \dfrac{2k+1}{2^k}.$

F24. Az $\ln' 1 = 1$ egyenlőség felhasználásával mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

F25. Határozza meg a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16+h} - 2}{h};$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2}.$

F26. Állítsa elő az $f(x) := \frac{1}{(1-x)^3}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$ függvényt egy alkalmas intervallumban a 0 pont körüli hatványsor összegfüggvényeként.

F27. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1);$

(b) $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} \qquad (|x| < 1);$

(c) $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1).$

Függvényvizsgálat I.
(Középértéktételek; függvény monotonitása és a derivált kapcsolata; lokális szélsőérték szükséges, illetve elégséges feltétele.)

F28. Bizonyítsa be, hogy ha egy intervallumon értelmezett valós-valós függvény az értelmezési tartományának minden pontjában lokálisan növekedő, akkor a függvény monoton növő.

F29. Legyen az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény deriválható (a, b)-n. Bizonyítsa be, hogy f akkor és csak akkor szigorúan monoton növekedő (a, b)-n, ha $f'(x) \geq 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén és nem létezik olyan (c, d) részintervalluma (a, b)-nek, hogy $f'(x) = 0$ minden $x \in (c, d)$ pontban. Keressen szükséges és elégséges feltételt a szigorú monoton csökkenésre.

F30. Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény szigorúan monoton:

(a) $f(x) := x^2(x-3) \quad (x \in \mathbb{R});$ (b) $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R});$

(c) $f(x) := (x-3)\sqrt{x} \quad (x > 0);$ (d) $f(x) := xe^{-x} \quad (x \in \mathbb{R});$

(e) $f(x) := 2e^{x^2-4x} \quad (x \in \mathbb{R});$ (f) $f(x) := x \ln x \quad (x \in \mathbb{R}^+);$

(g) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 8\});$

(h) $f(x) := \dfrac{e^x}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$

(i) $f(x) := \ln \dfrac{x^2}{(1+x)^3} \quad (x > -1,\ x \neq 0);$

(j) $f(x) := \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq -1).$

F31. Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékhelyeit:

(a) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := x - \ln(1 + x) \quad (x \in (-1, +\infty)$;

(c) $f(x) := \dfrac{x}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(d) $f(x) := \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$.

F32. Mutassa meg, hogy az $f(x) := x^3 + x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény invertálható, $f^{-1} \in D$, és számítsa ki $\big(f^{-1}\big)'(2)$-t.

F33. Bizonyítsa be, hogy az $f(x) := x + e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény invertálható, $f^{-1} \in D^2$, és számítsa ki $\big(f^{-1}\big)''(1)$-et.

F34. Bizonyítsa be, hogy van olyan differenciálható $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyik minden x valós számra teljesíti a $h(x^3 + 3x + 1) = x^3 - 2x + 1$ egyenletet.

F35. Legyen $f(x) := x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ $(x \in \mathbb{R})$. Igazolja, hogy az $f'(x) = 0$ egyenletnek három valós gyöke van. A feladat általánosításaként bizonyítsa be, hogy ha P egy olyan *valós* együtthatós polinom, amelynek minden gyöke valós, akkor minden olyan $n \in \mathbb{N}$ esetén, amelyre $n < \operatorname{grad} P$ a $P^{(n)}$ polinomnak is csak valós gyökei vannak.

F36. Igazolja, hogy ha P egy legfeljebb n-edfokú polinom, akkor az $e^x - P(x) = 0$ egyenletnek legfeljebb $(n + 1)$ valós gyöke van.

F37. Határozza meg az (a, b) intervallumnak azt a ξ pontját, amelyben az $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény grafikonjának az érintője párhuzamos az $\big(a, f(a)\big)$ és $\big(b, f(b)\big)$ pontokat összekötő szelővel.

F38. Legyen $f(x) := x^2 + 2,\ g(x) := x^3 - 1$ $(x \in [1, 2])$. Határozza meg azt a $\xi \in (1, 2)$ pontot, amelyre $\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ teljesül.

F39. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre fennáll az

$$\big|f(x) - f(y)\big| \le (x - y)^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenség. Bizonyítsa be, hogy ekkor van olyan c valós szám, hogy $f(x) = c$ minden x valós számra.

F40. Lássa be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriválható és a deriváltfüggvénye korlátos $\mathbb{R}$-en, akkor f egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en.

F41. Legyen $n \in \mathbb{N}$, és válasszunk meg olyan $c_0, c_1, \ldots, c_n$ valós számokat, amelyekre

$$\frac{c_0}{n+1} + \frac{c_1}{n} + \cdots + c_n = 0.$$

Bizonyítsa be, hogy ekkor a $p(x) := c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$ $(x \in \mathbb{R})$ polinomnak van zérushelye a $(0, 1)$ intervallumban.

F42. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n-szer deriválható az (a, b) intervallumon és folytonos $[a, b]$-n. Bizonyítsa be, hogy ha f-nek $(n-1)$ zérushelye van (a, b)-ben, továbbá $f(a) = f(b) = 0$, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $f^{(n)}(\xi) = 0$.

F43. Tegyük fel, hogy az $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók az (a, b) intervallumban és $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (a, b)$ esetén. Igazolja, hogy ekkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, amellyel $f(x) = g(x) + c$ $(x \in (a, b))$ teljesül.

F44. Tegyük fel, hogy az $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók az (a, b) intervallumon,

$$f(a) = g(a), \quad \text{valamint} \quad f'(x) > g'(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Mutassa meg, hogy ekkor fennáll az

$$f(x) > g(x) \quad (x \in (a, b))$$

egyenlőtlenség is. (Néhány esetben a deriváltfüggvények közötti egyenlőtlenséget egyszerűbb belátni, mint a függvények közötti egyenlőtlenséget.)

F45. Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $1 + x < e^x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(b) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(x + 1) < x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$;

(c) $\dfrac{x}{1 + x} < \ln(x + 1) < x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$;

(d) $\sqrt{1 + x} < 1 + \dfrac{x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$;

(e) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

F46. Legyen az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan *differenciálható* függvény, amelyre $f' = f$. Mutassa meg, hogy ekkor van olyan λ valós szám, hogy $f(x) = \lambda e^x$ $(x \in \mathbb{R})$.
Útmutatás: Az $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre $\varphi'(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ teljesül.

F47. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *differenciálható* függvény deriváltja a 0 pontban nem 0 és a függvényre teljesül az

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvényegyenlet. Mutassa meg, hogy ekkor van olyan valós α szám, amelyre $f(x) = e^{\alpha x}$ $(x \in \mathbb{R})$.
Útmutatás: Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f(x)\frac{f(y) - 1}{y},$$

ezért $f'(x) = f(x)f'(0)$ $(x \in \mathbb{R})$. Legyen $\alpha := f'(0)$ és $\varphi(x) := f(x)e^{-\alpha x}$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor $\varphi'(x) \equiv 0$.

F48. Van-e olyan $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ deriválható függvény, amelynek a deriváltja a $\operatorname{sign}_{|(-1,1)}$ függvény?

Elemi függvények

F49. Vázolja az alábbi függvények grafikonját:

(a) $f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

Folytonosság és deriválhatóság szempontjából vizsgálja meg ezeket a függvényeket.

F50. Adjon meg olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amelyik valamely pontban balról deriválható, de jobbról nem. (Tekintse például az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvényt a 0 pontban.)

F51. Mutassa meg, hogy az $f(x) := \sin\dfrac{\pi}{x}$ $(x \in (0,1))$ függvény nem egyenletesen folytonos a $(0,1)$ intervallumon.

F52. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény Darboux-tulajdonsású, de nem folytonos.

F53. Vázolja az alábbi függvények grafikonját:

(a) $\log_{\frac{1}{3}} |x-2| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$; (b) $\log_3 |x-2| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$;

(c) $\arcsin(x-1) + 3 \quad (x \in [0,2])$;

(d) $2\arccos(1-x) - 2 \quad (x \in [0,2])$;

(e) $2\mathrm{arctg}\,(x-1) - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$, (f) $\mathrm{arcctg}\,(1-x) + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

F54. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ $(x \in [-1,1])$;

(b) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ $(x \in [-1,1])$;

(c) $\mathrm{tg}\,(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1))$;

(d) $\mathrm{tg}\,(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (x \in (-1,1),\ x \neq 0)$;

(e) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \quad (x \in [-1,1])$;

(f) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = \dfrac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

F55. Mutassa meg, hogy

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & \text{ha } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases},$$

$$\arcsin(\sin(x + 2k\pi)) = \arcsin(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Ennek felhasználásával ábrázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \arcsin(\sin x)$$

függvény grafikonját.

F56. Az $\arccos(\cos x)$ alkalmas átalakításával vázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \arccos(\cos x)$$

függvény képét.

F57. Bizonyítsa be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2\operatorname{arctg} x, & \text{ha } x > 1 \\ 2\operatorname{arctg} x, & \text{ha } -1 \le x \le 1 \\ -\pi - 2\operatorname{arctg} x, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

F58. Mutassa meg, hogy az f függvény invertálható, és határozza meg az inverzét:

(a) $f(x) := \pi - \arccos \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} \quad \left(x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right)$;

(b) $f(x) := \operatorname{tg} \left(\dfrac{\arcsin(2x-5)}{3}\right) \quad (x \in [2, 3])$.

F59. Bizonyítsa be, hogy:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

F60. Az sh, ch, th, cth, arsh, arch, arth, arcth függvények tulajdonságainak vizsgálata után vázolja a grafikonjukat.

F61. Fejezze ki az área függvényeket a ln függvény segítségével. (A következő összefüggések érvényesek:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsh} x &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) && (x \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{arch} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) && (x \in \geq 1), \\ \operatorname{arth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} && (x \in (-1, 1)), \\ \operatorname{arcth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} && (x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)).) \end{aligned}$$

A L'Hospital-szabály és a Taylor-sor

F62. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértékeket! (Minden egyes esetben állapítsa meg, hogy milyen típusú „kritikus” határértékről van szó!)

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a > 0)$;

(g) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$;

(h) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;

(k) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0)$;

(l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;

(m) $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{1/x} - x$;

(n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^{-x}$;

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$;

(p) $\lim\limits_{x\to 0+0} (-\ln x)^x$;

(q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$;

(r) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} \ln x$.

F63. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály nem alkalmazható, és számítsa ki a keresett határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(x+3)}{\operatorname{ch}(x-3)}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$.

F64. Adjon meg olyan f és g differenciálható függvényeket, amelyekre az f/g függvényeknek valamely c pontban létezik határértéke, de az f'/g' függvénynek nem.

F65. Adjon meg olyan f és g differenciálható függvényeket, amelyekre az f'/g' függvényeknek valamely c pontban létezik határértéke, de az f/g függvénynek nem.

F66. Írja fel a $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomot az $x + 1$ hatványai szerint. A feladat általánosításaként mutassa meg, hogy ha p egy legfeljebb n-edfokú polinom és $a \in \mathbb{R}$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

F67. Határozza meg az alábbi függvények adott pont körüli n-edik Taylor-polinomját:

(a) $f(x) := \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (n = 3,\ a = 0);$

(b) $f(x) := x^x \quad (x > 0) \qquad (n = 3,\ a = 1);$

(c) $f(x) := \sqrt{x} \quad (x \geq 0) \qquad (n = 3,\ a = 1);$

(d) $f(x) := \sin(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (n = 3,\ a = 0).$

F68. Írja fel az alábbi f függvények $x_0 = 0$ körüli n-edik Taylor-polinomját, és határozza meg, hogy a megadott I intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt:

(a) $f := \sin, \quad n = 4, \quad I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}];$

(b) $f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad n = 2, \quad I = [-0,2; 0,2];$

(c) $f(x) := \sqrt{1+x} \quad (x \in (-1, +\infty)), \quad n = 2, \quad I = [0, 1];$

(d) $f(x) := \sqrt[3]{1+x} \quad (x > -1), \quad n = 2, \quad I = [0, \frac{1}{4}];$

(e) $f(x) := \ln(1+x) \quad (x > -1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad I := [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}].$

F69. Adjon becslést az alábbi eltérésekre:

(a) $\left| e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} \right| \qquad (0 \leq x \leq 1);$

(b) $\left| \operatorname{tg} x - x - \dfrac{x^3}{3} \right| \qquad \big(|x| \leq \frac{1}{10}\big);$

(c) $\left| \sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} \right| \qquad (0 \leq x \leq 1).$

F70. (a) Az $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ $(x > -1)$ függvény 0 pont körüli másodfokú Taylor-polinomjának felhasználásával számítsa ki $\sqrt{\frac{2}{3}}$ egy közelítő értékét, és határozza meg a közelítés hibáját.

(b) Az $f(x) := \ln(1+x)$ $(x > -1)$ függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-polinomjának felhasználásával számítsa ki $\ln(1/4)$ egy közelítő értékét, és határozza meg a közelítés hibáját.

F71. Számítsa ki ε-nál kisebb hibával az alábbi számokat a Taylor-formula felhasználásával:

(a) $e \quad (\varepsilon = 10^{-6})$; (b) $\sin 1^o \quad (\varepsilon = 10^{-5})$;

(c) $\cos 9^o \quad (\varepsilon = 10^{-5})$; (d) $\ln 1,2 \quad (\varepsilon = 10^{-3})$.

F72. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvény, és legyen

$$M_k := \sup\{\left|f^{(k)}(x)\right| \ : \ x \in \mathbb{R}\} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Mutassa meg, hogy $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

F73. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény végtelen sokszor deriválható a 0 pontban, és a függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sora konvergens a valós számok halmazán, de az összegfüggvénye nem f.

F74. Adja meg a következő függvények 0 pont körüli Taylor-sorát:

(a) $f(x) := \operatorname{arctg} x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$; (b) $f(x) := \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := \ln(1 + x) \ \ (x > -1)$; (d) $f(x) := \dfrac{1}{(1 - 3x)^5} \quad (x < \frac{1}{3})$;

(e) $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$.

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

Függvényvizsgálat II. Szélsőértékszámítás.

F75. Mutassa meg, hogy ha $f \in D$ és f páros (páratlan, periodikus), akkor f' páratlan (páros, periodikus).

F76. Mutassa meg, hogy ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekedő, akkor az inverze is szigorúan monoton növekedő.

F77. Mutassa meg, hogy a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű *szükséges* feltétel *nem elégséges.* (Tekintse például az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt a 0 pontban.)

F78. Mutassa meg, hogy a deriváltfüggvény adott pontbeli előjelváltása *nem szükséges* (csak *elégséges*!) feltétele a lokális szélsőérték létezésének. (Tekintse például az

$$f(x) := \begin{cases} x^4\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt a 0 pontban.)

F79. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény, $c \in \mathbb{R}$ és f' folytonos c-ben. Bizonyítsa be, hogy

(a) ha $f'(c) > 0$, akkor c-nek van olyan környezete, amelyen f szigorúan monoton növekedő;

(b) ha $f'(c) < 0$, akkor c-nek van olyan környezete, amelyen f szigorúan monoton csökkenő.

F80. Igaz-e az, hogy ha f olyan differenciálható függvény, amelynek deriváltja valamely pontban pozitív, akkor ennek a pontnak van olyan környezete, amelyben f monoton? (Tekintse például az

$$f(x) := \begin{cases} x + x^2\sin\frac{2}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt a 0 pontban.)

F81. Adjon meg olyan $H \subset \mathbb{R}$ nemüres nyílt halmazt és olyan $f : H \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, amelyre $f'(x) < 0$ minden $x \in H$ esetén, de f nem szigorúan monoton csökkenő H-n.

F82. Milyen a, b, c és d valós számok esetén lesz az

$$f(x) := \frac{x^2+2ax+b}{x^2+2cx+d} \qquad (x \in \mathbb{R},\ x^2+2cx+d \neq 0)$$

függvénynek (-1)-ben 2 a lokális maximuma, 1-ben pedig 4 a lokális minimuma?

F83. Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén van az $x^3 - 6x^2 + 9x + p = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

F84. Számítsa ki az alábbi függvények abszolút szélsőértékeit:

(a) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := 22x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-10, 12])$;

(c) $f(x) := 22x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-1, 5]);$

(d) $f(x) := x - \ln(1 + x) \quad (x > -1);$

(e) $f(x) := x^2 e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R});$

(f) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R});$

(g) $f(x) := x^3 \quad (-1 \le x \le 3);$

(h) $f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x \quad (x \in \mathbb{R});$

(i) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 + x + 1} \quad (-2 \le x \le 0);$

(j) $f(x) := x - \sqrt{2x} \quad (x \in [0, \pi]).$

F85. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := e^{2x} - (4x + 1) \ (x \in \mathbb{R});$

(c) $f(x) := e^{-x^2} \ (x \in \mathbb{R});$ (d) $f(x) := x^x \ (x > 0);$

(e) $f(x) := \ln(1 + x^2) \ (x \in \mathbb{R});$ (f) $f(x) := x + \cos x \ (x \in \mathbb{R}).$

F86. Igazolja, hogy az

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha > 1); \qquad \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x; \qquad (0, +\infty) \ni x \mapsto x \ln x$$

függvények konvexek, a

$$(0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha \quad (0 < \alpha < 1); \qquad (0, +\infty) \ni x \mapsto \ln x$$

függvények pedig konkávok.

F87. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $\left(\dfrac{x + y}{2}\right)^n < \dfrac{x^n + y^n}{2} \qquad (n > 1;\ x, y > 0 \text{ és } x \ne y);$

(b) $e^{\frac{x+y}{2}} < \dfrac{e^x + e^y}{2} \qquad (x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \ne y);$

(c) $(x + y) \ln \dfrac{x + y}{2} < x \ln x + y \ln y \qquad (x, y > 0);$

(d) $x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} < \lambda_1 x + \lambda_2 y \qquad (x, y > 0;\ \lambda_1, \lambda_2 > 0;\ \text{és } \lambda_1 + \lambda_2 = 1).$

F88. Tegyük fel, hogy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ egy *konvex* függvény. Mutassa meg, hogy ekkor

(a) f *folytonos* az egész (a, b) intervallumon;

(b) minden $x \in (a, b)$ pontban f balról is és jobbról is deriválható;

(c) f az (a, b) intervallum legfeljebb megszámlálható sok pontjának kivételével *deriválható*.

F89. Legyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ egy konvex függvény, $c \in (a, b)$ és $m \in [f'_-(c), f'_+(c)]$. Mutassa meg, hogy

$$f(x) \geq m(x - c) + f(c)$$

minden $x \in (a, b)$ pontban. (Ha $f \in D\{c\}$, akkor ez azt jelenti, hogy az f függvény grafikonja az egész (a, b)-n a $(c, f(c))$ pontban húzott érintő felett van.)
Útmutatás. Ha $x > c$, akkor $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq f'_+(c) \geq m$, ha $x < c$, akkor $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq f'_-(c) \leq m$.

F90. **Jensen-egyenlőtlenség.** Legyen az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ egy konvex függvény, és tegyük fel, hogy

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b); \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0 \quad \text{és} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

Ekkor

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha f lineáris az x_k-kat tartalmazó legszűkebb zárt intervallumon.
Útmutatás. Feltehetjük, hogy $x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Ha $c := \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, akkor $x_1 \leq c \leq x_n$, ezért $c \in (a, b)$. Ha $m \in [f'_-(c), f'_+(c)]$, akkor minden $k = 1, \ldots, n$ esetén $f(x_k) \geq m(x_k - c) + f(c)$ (l. az előző feladatot). Ezeket λ_k-val megszorozva, majd a kapott n egyenlőtlenségeket összeadva adódik az állítás. A Jensen-egyenlőtlenségben egyenlőség akkor és csak akkor van, ha az összeadott egyenlőtlenségekben egyenlőség áll fenn. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy $f(x) = m(x - c) + f(c)$ minden $x \in [x_1, x_n]$ esetén. (A feladatot teljes indukcióval is megoldhatjuk.)

F91. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $x_k > 0$ és $\lambda_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, továbbá tegyük fel, hogy $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Mutassa meg, hogy

$$\prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

és itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Mit állít ez az egyenlőtlenség abban az esetben, ha $\lambda_k = \frac{1}{n}$ minden $k = 1, 2, \dots, n$ esetén?

F92. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken, és vázolja a grafikonjukat:

(a) $f(x) := 2 - 2x^2 - x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$;

(d) $f(x) := \dfrac{1}{x(x-3)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\})$;

(e) $f(x) := \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\})$;

(f) $f(x) := \dfrac{x^2 + 9}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(g) $f(x) := \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$;

(h) $f(x) := x + \sqrt{1-x} \quad (x \le 1)$; (i) $f(x) := x\sqrt{2+x} \quad (x \ge -2)$;

(j) $f(x) := \sin^2 x - 2\cos x \quad (x \in \mathbb{R})$;

(k) $f(x) := e^{2x - x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$; (l) $f(x) := e^x + e^{-3x} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(m) $f(x) := \dfrac{1 + x^2}{e^{x^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$; (n) $f(x) := \ln(x^2 - 1) \quad (|x| > 1)$;

(o) $f(x) := \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (|x| > 1)$;

(p) $f(x) := x^x \quad (x > 0)$; (q) $f(x) := \dfrac{\ln x}{x} \quad (x > 0)$;

(r) $f(x) := \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

F93. Egységnyi kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb, illetve legkisebb a területe?

F94. A $6x + y = 9$ egyenletű egyenesen keressük meg a $(-3, 1)$-hez legközelebbi pontot.

F95. Az $y^2 - x^2 = 4$ egyenletű hiperbolának mely pontja van legközelebb a $(2, 0)$ pothoz?

F96. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $(3, 5)$ ponton és az első síknegyedből a legkisebb területű részt vágja le.

F97. Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 4 m átmérőjű, kör keresztmetszetű toronyba, egy a torony falán vágott 2 m magas ajtón át bevihetünk?

F98. Tekintsünk egy v kezdősebességgel ferdén elhajított testet. Határozzuk meg, hogy a vízszinteshez képest milyen α szög alatt kell elhajítani, hogy a maximális távolságban érjen földet.

F99. Mekkora R külső ellenálláson keresztül zárjuk az e elktromos erejü és r belső ellenállású galvánelemet, hogy a külső ellenálláson keletkező I^2R Joule-féle energia a maximális legyen?

F100. Vízszintes síkon álló függőleges falu tartályban m magasságig víz van. A tartály falába a víz szintje alatt x mélységbe lyukat ütve a kiáramló víz sebessége $\sqrt{2gx}$ (Toricelli törvénye), ahol g a gravitációs állandó. x milyen értéke mellett jut el a vízsugár a legmesszebbre?

F101. Egy $10m$ hosszú kötelet két részre vágunk. Az egyik részből négyzetet, a másikból szabályos háromszöget formálunk. Hol kell elvágni a kötelet ahhoz, hogy a a keletkezett négyzet és háromszög együttes területe maximális, illetve minimális legyen?

F102. Egy körlemez alakú papírlapból kivágunk egy körcikket, majd a keletkezett éleket egymáshoz csatlakoztatva egy kúpot formálunk. Hogyan tegyük ezt meg ahhoz, hogy a kúp térfogata maximális legyen?

F103. Ha egy hal a vízhez képest v sebességgel úszik, akkor időegység alatti energia felhasználása arányos v^3-nel. Tapasztalatok szerint a vándorló halak (pl. lazac) úgy teszik meg az adott távolságot, hogy energiafelhasználásuk minimális egyen. Ha az u sebességgel folyó vízben a hal v $(v > u)$ sebességgel úszik felfelé, akkor egy adott L távolság megtételéhez szükséges energia

$$E(v) = av^3 \frac{L}{v-u},$$

ahol a az arányossági tényező. Határozza meg azt a v értéket, amely mellett E a legkisebb.
(Megjegyzés: mérések szerint a halak általában a víz sebességénél 50 százalékkal gyorsabban úsznak.)