Integrálszámítás
(Gyakorló feladatok)

Programtervező matematikus szakos hallgatóknak
az Analízis 3. című tárgyhoz

Összeállította

Bese Antal, Csillag Dávid, Kiss Balázs, Mátyás Gergely,
Szili László

2004. október

Tartalomjegyzék

I. rész

Feladatok

1. Primitív függvények (határozatlan integrálok)

1.1. A definíciók egyszerű következményei

F1. Határozza meg az alábbi függvények *összes* primitív függvényét:

(a) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big);$ (b) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad \big(x \in (-\infty, 0)\big);$

(c) $f(x) := \dfrac{1}{\sin^2 x} \quad \big(x \in (0, \pi)\big);$ (d) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).$

F2. Határozza meg az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in I$ pontban eltűnő primitív függvényét, ha

(a) $f(x) := \cos x \quad \big(x \in \mathbb{R},\ \ x_0 := \frac{3\pi}{4}\big);$

(b) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \big(x \in \mathbb{R}^+,\ \ x_0 := 8\big).$

F3. Keresse meg azt a f függvényt, amelyre

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \in \mathbb{R}^+), \quad f(4) = 1;$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \quad (x > -1), \quad f(0) = 2;$

(c) $f''(x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f(0) = -3,\ f'(0) = 2;$

(d) $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}^+), \quad f(1) = 0,\ f'(2) = 0;$

(e) $f''(x) = 3e^x + 5\sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 2;$

(f) $f'''(x) = \sin x, \ (x \in \mathbb{R}), \ f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1.$

F4. Igazolja, hogy a sign függvénynek *nincs* primitív függvénye.

F5. (a) Bizonyítsa be, hogy ha az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek az $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ primitív függvényei, akkor

$$\exists\, c \in \mathbb{R}, \text{ hogy } F_1(x) - F_2(x) = c \quad (\forall\, x \in I).$$

(b) Mutassa meg, hogy az előző állításban az a feltétel, hogy $\mathcal{D}_f$ *intervallum* legyen, lényeges: Adjon meg olyan nemüres $H \subset \mathbb{R}$ nyílt *halmazt*, olyan $F_1, F_2 : H \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényeket, amelyre $F_1'(x) = F_2'(x)$ teljesül minden $x \in H$ esetén, ugyanakkor F_1 és F_2 nem konstansban különböznek egymástól.

1.2. Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek

1.2.1. Alapintegrálok

F6. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \big(6x^2 - 8x + 3\big)\, dx,\ I := \mathbb{R};$ (b) $\displaystyle\int \big(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\big)\, dx,\ I := \mathbb{R}^+;$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx,\ I := R^+;$ (d) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\, dx,\ I := \mathbb{R}^+;$

(e) $\displaystyle\int \big(2x + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\big)\, dx,\ I := (-1, 1).$

1.2.2. Alapintegrálokra vezető típusok

- **$\int \frac{f'}{f}$ alakú integrálok**

F7. Mutassa meg, hogy ha $f : I \to \mathbb{R}$ pozitív és differenciálható az I intervallumon, akkor

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + c} \qquad (x \in I).$$

F8. Az előző feladat segítségével számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\, dx,\ I := \mathbb{R};$ (b) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2 - 6x + 27}\, dx,\ I := \mathbb{R};$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx,\ I := \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big);$ (d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\, dx,\ I := \mathbb{R};$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x},\ I := (0, 1);$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x},\ I := (1, +\infty);$

- **$\int f^\alpha \cdot f'$ alakú integrálok**

F9. Tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pozitív és differenciálható az I intervallumon és $\alpha \neq -1$ valós szám. Mutassa meg, hogy

$$\boxed{\int f^\alpha(x) f'(x)\, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c} \qquad (x \in I).$$

F10. Az előző feladat eredményének felhasználásával számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int x^2(2x^3+4)^{2004}\, dx,\ I := \mathbb{R};$ (b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{6x^3+4}\, dx,\ I := \mathbb{R}^+;$

(c) $\displaystyle\int e^x(1-e^x)^3\, dx,\ I := \mathbb{R};$ (d) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\, dx,\ I := \mathbb{R};$

(e) $\displaystyle\int \frac{\ln^5 x}{x}\, dx,\ I := \mathbb{R}^+;$ (f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arsh} x}{1+x^2}}\, dx,\ I := \mathbb{R}^+;$

(g) $\displaystyle\int \frac{4x+7}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+5)^5}}\, dx,\ I := \left(-\tfrac{5}{2}, +\infty\right);$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}}\, dx,\ I := \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right);$

- **$\int f(ax+b)\, dx$ alakú integrálok**

F11. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $F : I \to \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek egy primitív függvénye. Mutassa meg, hogy ekkor bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boxed{\int f(ax+b)\, dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c} \qquad (x \in I).$$

F12. Az előző feladat eredményének felhasználásával számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int (2x-3)^{10}\, dx \quad (x > \tfrac{3}{2});$ (b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\, dx \quad (x < \tfrac{1}{3});$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx \quad (x \in \mathbb{R});$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{2-3x^2}\,dx \quad (x > \tfrac{2}{3});$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx \quad \big(|x| < \sqrt{\tfrac{2}{3}}\big);$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx \quad \big(x > \sqrt{\tfrac{2}{3}}\big).$

F13. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-12x+23} \quad (x \in \mathbb{R});$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+12x+16} \quad (x \in \mathbb{R});$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+30}} \quad (x \in \mathbb{R});$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx \quad \big(1-\sqrt{5} < x < 1+\sqrt{5}\big).$

- $\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx$ **alakú integrálok**

F14. Tegyük fel a következőket:

(i) a $g : I \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az I intervallumon,

(ii) $J \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $\mathcal{R}_g \subset J$,

(iii) az $f : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye.

Ekkor az $f \circ g \cdot g'$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c} \qquad (x \in J),$$

ahol F a f egy primitív függvénye.
(Gondolja meg, hogy ez az állítás speciális esetként tartalmazza az **F7.**, **F9.** és **F11.** feladatok eredményeit!)

F15. Az előző feladat segítségével számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int x\sin x^2\,dx,\ I := \mathbb{R};$ (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,\ I := \mathbb{R}^+;$

(c) $\displaystyle\int (6x+2)\sin(3x^2+2x-1)\,dx,\ I := \mathbb{R};$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx,\ I := \mathbb{R}^+;$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\,dx,\ I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx,\ I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$

1.2.3. Integrálás „ügyesen”

F16. Az integrandus „alkalmas” átalakítása után számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx,\quad I := \mathbb{R};$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x-2}\,dx,\quad I := (2, +\infty);$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,dx,\quad I := \mathbb{R};$ (d) $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx,\quad I := \mathbb{R};$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx,\quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$ (f) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx,\quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$

(g) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx,\quad I := \mathbb{R};$ (h) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx,\quad I := \mathbb{R};$

(i) $\displaystyle\int \sin 3x \cdot \cos 7x\,dx,\quad I := \mathbb{R};$ (j) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx,\quad I := \mathbb{R};$

(k) $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx,\quad I := (0, \pi);$

(l) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x - 5}{1+\cos 2x}\,dx,\quad I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx,\quad I := (0, \pi);$ (n) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx,\quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$

(o) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\,dx,\quad I := \mathbb{R};$ (p) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx,\quad I := \mathbb{R}.$

(q) $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg} x}\,dx,\quad I := (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}).$

1.2.4. Parciális integrálás

F17. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott I intervallumokon:

(a) $\int xe^{2x}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$ (b) $\int x^2 \sin 3x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(c) $\int e^x \sin x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$ (d) $\int e^{2x} \operatorname{ch} 3x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(e) $\int \ln x\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$ (f) $\int \operatorname{arctg} 3x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(g) $\int x^2 \ln x\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$ (h) $\int x^5 e^{x^3}\,dx, \quad I := \mathbb{R}.$

F18. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott I intervallumokon:

(a) $\int \cos(2x+1)e^{3x+2}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$ (c) $\int \arcsin x\,dx, \quad I := (-1,1);$

(d) $\int \cos(\ln x)\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$ (e) $\int \ln\sqrt{x}\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$

(f) $\int \cos x \ln(\sin x)\,dx, \quad I := (0,\pi);$

(g) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$ (h) $\int x \ln^2 x\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+.$

F19. Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy az $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvények n-szer deriválhatók és $f^{(n)}$, $g^{(n)}$ folytonosak. Mutassa meg, hogy

$$\int fg^{(n)} = fg^{(n-1)} - f'g^{(n-2)} + \cdots + (-1)^n \int f^{(n)}g.$$

F20. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$
$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

1.2.5. Integrálás helyettesítéssel

F21. Állítsa elő helyettesítéses integrálással a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad (x \in (-1,1))$; (b) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $\int \sqrt{x^2-1}\,dx \quad (x > 1)$; (d) $\int \sqrt{x^2-1}\,dx \quad (x < -1)$;

(e) $\int \sqrt{x^2-3x+3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$; (f) $\int \sqrt{1+x^2}x^5\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$;

(g) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$.

1.2.6. Racionális függvények integrálása

F22. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott intervallumokon:

(a) $\int \frac{1}{x-3}\,dx, \quad x > 3$; (b) $\int \frac{1}{x-3}\,dx, \quad x < 3$;

(c) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx, \quad I := \mathbb{R}$; (d) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}\,dx, \quad I := \mathbb{R}$;

(e) $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx, \quad I := \mathbb{R}$; (f) $\int \frac{x+5}{x^2-x+5}\,dx, \quad I := \mathbb{R}$;

(g) $\int \frac{6x}{x^2-2x+7}\,dx, \quad I := \mathbb{R}$; (h) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx, \quad I := \mathbb{R}$;

F23. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

F24. Parciális törtekre bontással számítsa ki a következő határozatlan integrálokat a megadott intervallumokon:

(a) $\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx, \quad I := (2, 4)$;

(b) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx, \quad I := (1, +\infty)$; (c) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx, \quad I := (-1, 1)$;

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3-4}{5x^3-x}\,dx, \quad I := \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right);$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx, \quad I := (-1, +\infty);$

(g) $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{2x^2+x-3}\,dx, \quad I := \left(-1, \tfrac{3}{2}\right);$

(h) $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(1+x^2)^2}\,dx, \quad I := (1, +\infty);$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

1.2.7. Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések

F25. Alkalmas helyettesítéssel vezesse vissza az alábbi integrálokat racionális függvények integráljára:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \quad (x>0);$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx \quad (x>0);$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx \quad (x>0);$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^{2/3}}{1+x^{1/7}}\,dx \quad (x>0);$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-3}{x-1}}\,dx \quad (x<1);$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \ (-1<x<1);$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx \quad \left(x>\tfrac{3}{2}\right);$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx \quad (x<0);$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx \quad (-1<x<0).$

F26. Alkalmas helyettesítéssel számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat úgy, hogy visszavezeti racionális függvények integráljára:

(a) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx \quad (0<x<2\pi);$

(b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx \quad (-\pi < x < \pi);$

(c) $\displaystyle\int \frac{2}{1+2\operatorname{tg} x}\,dx \quad \left(0 < x < \tfrac{\pi}{2}\right).$

F27. Oldja meg az előző feladatot „ügyesen” is. Alkalmazza a következő azonosságokat:

(a) $\displaystyle\frac{1+\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{1-\cos x} + \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{\sin x}{1-\cos x};$

(b) $\displaystyle\frac{\cos x}{1+\cos x} = 1 - \frac{1}{1+\cos x} = 1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}};$

(c) $\displaystyle\frac{2}{1+2\operatorname{tg} x} = \frac{2\cos x}{\cos x + 2\sin x} = \frac{2}{5}\left(1 + 2\frac{-\sin x + 2\cos x}{\cos x + 2\sin x}\right).$

A végeredményeket hasonlítsa össze az előző feladatban kapott végeredményekkel.

F28. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx \quad \left(-\tfrac{\pi}{2} < x < \pi\right);$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx \quad \left(\pi < x < \tfrac{3\pi}{2}\right);$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{3+5\cos x}\,dx \quad \left(0 < x < \tfrac{\pi}{2}\right);$

(d) $\boxed{\text{L-Sch}}$ 264. oldal 8. feladat.

F29. Alkalmas helyettesítéssel számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat úgy, hogy visszavezeti racionális függvények integráljára:

(a) $\displaystyle\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx \quad (x > \ln 2);$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx \quad (x \in \mathbb{R});$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R});$

Elemi függvények

2. A határozott integrál

2.1. A határozott integrál értelmezése

F30. Mutassa meg, hogy a Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon.

F31. Adjon meg olyan $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyik nem Riemann-integrálható $[a,b]$-n, de $|f|$ már Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

F32. A definíció alapján számítsa ki a következő határozott integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x^2dx,$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx.$

F33. Mutassa meg, hogy az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható a kompakt $[a,b]$ intervallumon, és az integrál értéke az I valós szám, ha az $[a,b]$ intervallumnak **van olyan** felosztássorozata, amelyhez tartozó alsó- és felső közelítő összegek sorozata konvergens, és mindkettőnek az I szám a határértéke. Jelekkel:

$$f\in R[a,b]\ \text{ és }\ \int_a^b f=I\ \Leftrightarrow \begin{cases}\text{ha } [a,b]\text{-nek } \exists\ (\tau_n) \text{ felosztássorozata, amelyre}\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n)=\lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n)=I.\end{cases}$$

F34. Az előző feladat állítását felhasználva igazolja, hogy

(a) $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx=e^b-e^a \quad (a<b);$

(b) $\displaystyle\int_a^b x^\alpha\,dx=\frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (0<a<b,\quad \alpha\neq -1 \text{ valós szám});$

(c) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\,dx=\ln b-\ln a \quad (a<b).$

F35. Mutassa meg, hogy ha f akkor és csak akkor Riemann-integrálható a kompakt $[a,b]$ intervallumon és az integrál értéke I, ha bármely minden határon túl finomodó (τ_n) felosztássorozat esetén

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(f,\tau_n)=\lim_{n\to+\infty} S_n(f,\tau_n)=I.$$

F36. Bizonyítsa be, hogy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \ln 2.$$

F37. Lássa be, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, (p,q) = 1 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Riemann-függvény Riemann-integrálható $[0,1]$-en és $\int_0^1 f = 0$.

2.2. A határozott integrál tulajdonságai és kiszámítása

F38. Adjon meg olyan Riemann-integrálható függvényt, amelyiknek nincs primitív függvénye.

F39. Mutassa meg, hogy ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon és itt $f \geq 0$, akkor

$$\int_a^b f = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f \equiv 0 \ \text{ az } [a,b]\text{-n.}$$

F40. A Newton–Leibniz-tétel felhasználásával számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; (b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$; (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

(e) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x\,dx$; (f) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$;

(g) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; (h) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

F41. Alkalmasan megválasztott függvények határozott integráljának felhasználásával számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$;

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{10}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^9$;

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{1+n^2} + \dfrac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2} \right)$;

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$;

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \qquad (\alpha > 0)$.

F42. **Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség**: Tetszőleges $f, g \in R[a,b]$ függvények esetén

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

F43. Számítsa ki az

$$I_n := \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

integrálokat. (Keressen I_n-re rekurziós formulát.)

F44. Bizonyítsa be, hogy ha f folytonos a $[0,1]$ intervallumon, akkor

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx.$$

F45. Lássa be, hogy

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

F46. Bizonyítsa be, hogy

$$B(m,n) := \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \qquad (m,n \in \mathbb{N}).$$

F47. Igazolja, hogy ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor

$$\int_0^x f(u)(x-u)\, du = \int_0^x \Big(\int_0^u f(t)\, dt \Big) du.$$

F48. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}}\, dx \le \frac{1}{4}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin x}\, dx \le \frac{\pi}{2r}(1-e^{-r})$, ahol $r > 0$ valós szám,

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx \le 0,7$, (d) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \le \sqrt{\frac{6}{5}}$,

(e) $\displaystyle\frac{\sqrt{3}}{8} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\, dx \le \frac{\sqrt{2}}{6}$.

F49. Határozza meg az alábbi minimumokat:

(a) $\min\big\{ \int_0^1 |x^2 - c|\, dx \ : \ c \in \mathbb{R} \big\}$;

(b) $\min\big\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x - ax - b)^2\, dx \ : \ a.b \in \mathbb{R} \big\}$.

F50. Keresse meg azokat az $a < b$ valós számokat, amelyekre az $\int_a^b (2 + x - x^2)\, dx$ integrál értéke maximális.

F51. Igazolja, hogy $f \in D[0,1]$, $f' > 0$ esetén

$$\min\Big\{ \int_0^1 |f - c| \ : \ c \in \mathbb{R} \Big\} = \int_0^1 \big| f - f\big(\tfrac{1}{2}\big) \big|.$$

F52. Keresse meg a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3}\, dt$,

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \Big(\dfrac{x}{x-3} \displaystyle\int_3^x \dfrac{\sin t}{t}\, dt \Big)$.

F53. Mutassa meg, hogy az $f(x) := \int_0^x x^2 \sin(t^2)\, dt$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény deriválható, és számítsa ki a deriváltfüggvényt.

F54. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amelyre

$$x \sin \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\, dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. Mennyi az f értéke a 4 pontban?

F55. Bizonyítsa be a következő állításokat:

(a) Ha f monoton növekedő, akkor

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \right| \le \frac{f(1) - f(0)}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Ha f differenciálható és f' korlátos a $[0, 1]$ intervallumon, akkor van olyan n-től független $c > 0$ valós szám, amellyel az

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \right| \le \frac{c}{n}$$

egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül.

2.3. A határozott integrál alkalmazásai

Síkidom területe

$\boxed{\mathbf{A}}$ Ha a korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon és $f(x) \ge 0$ $(x \in [a, b])$, akkor az f grafikonja alatti

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$$

síkidom területét így *értelmezzük:*

$$t(A) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ha $f \leq 0$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor a

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$

síkidom területe:

$$t(B) := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

B Legyen

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t) \qquad (t \in [\alpha,\beta]),\\ y &= \varphi_2(t) \qquad (t \in [\alpha,\beta]) \end{aligned}$$

a sima elemi $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ görbe egy paraméteres előállítása. Tegyük még fel azt is, hogy φ_1 szigorúan monoton növő és $\varphi_2(t) \geq 0$ ($t \in [\alpha,\beta]$). Ekkor a

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \varphi_1(t), 0 \leq y \leq \varphi_2(t), \quad t \in [\alpha,\beta]\}$$

síkidom területe:

$$t(C) = \int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\varphi_1'(t)\,dt.$$

C Az

$$r = \varrho(\varphi), \qquad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

polárkoordinátás alakban megadott görbe által meghatározott

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi; \quad 0 \leq r \leq \varrho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

szektorszerű tartomány területe, ha ϱ integrálható:

$$T(E) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

F56. Számolja ki az $y = x - 1$ egyenletű egyenes és a az $y^2 = 2x + 6$ egyenletű parabola által közrezárt síkidom területét.

F57. Határozza meg az $y = x^4$ és az $y = 4-x^2$ görbék által meghatározott síkidom területét.

F58. Határozza meg az $y = x^4$ és az $y = 3x^2 - 2$ görbék által meghatározott síkidom területét.

F59. Számítsa ki az alábbi síkbeli halmazok területét:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4,\ \ 0 \le y \le 4x - 4x^2\}$,

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le e,\ \ 0 \le y \le \ln x\}$,

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0\}$.

F60. Határozza meg az f ás a g függvények grafikonja által határolt síkrész területét:

(a) $f(x) := \sqrt{2px} \quad (x > 0,\quad p > 0),\quad g(x) := \frac{x^2}{2p} \quad (x \in \mathbb{R},\ \ p > 0)$;

(b) $f(x) := \frac{x^2}{3} \quad (x \in \mathbb{R}),\quad g(x) := 4 - \frac{2}{3}x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

F61. Szemléltesse az alábbi *paraméteres alakban* megadott síkbeli görbéket:

(a) $x = \varphi_1(t) := \cos^3 t\ (t \in [0, 2\pi)$,
$y = \varphi_2(t) := \sin^3 t\ (t \in [0, 2\pi)$ (*asztrois*);

(b) $x = \varphi_1(t) := 2\cos t - \cos 2t\ (t \in [0, 2\pi)$,
$y = \varphi_2(t) := 2\sin t - \sin 2t\ (t \in [0, 2\pi)$ (*kardiodid*);

Számítsa ki a görbék által meghatározott síkidomok területét.

F62. Szemléltesse az alábbi *polárkoordinátákban* megadott síkbeli görbéket:

(a) $r = \varrho(\varphi) := \cos\varphi\ (\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (*kör*);

(b) $r = \varrho(\varphi) := 2\sqrt{\cos 2\varphi}\ (\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (*lemniszkáta*).

Számítsa ki a görbék által meghatározott síkidomok területét.

Síkbeli görbe ívhossza

$\boxed{\textbf{B}}$ Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ egy sima elemi görbe és $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ a Γ egy paraméterezése. Ekkor a Γ görbe rektifikálható, és Γ ívhossza:

$$l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi_1'(t)\right]^2 + \left[\varphi_2'(t)\right]^2}\, dt.$$

A Legyen Γ az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény grafikonja. Ekkor a Γ görbe rektifikálható, és ívhossza:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \big[f'(t)\big]^2}\, dt.$$

C Ha $\varrho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor az

$$r = \varrho(\varphi) \qquad (\alpha \le \varphi \le \beta)$$

polárkoordinátás alakban megadott Γ görbe rektifikálható és az ívhossza:

$$l(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varrho^2(\varphi) + \big[\varrho'(\varphi)\big]^2}\, d\varphi.$$

F63. Határozza meg az alábbi függvények grafikonjának a hosszát:

(a) $f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \le x \le 2)$,

(b) $f(x) = \dfrac{2}{3}(x-1)^{3/2} \quad (2 \le x \le 5)$,

(c) $f(x) = \ln x - \dfrac{x^2}{8} \quad (1 \le x \le 4)$,

(d) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x} \quad (1 \le x \le 2)$.

F64. Számítsa ki az alábbi *paraméteres alakban* megadott görbék ívhosszát:

(a) $x = \varphi_1(t) := e^t \sin t,\ y = \varphi_2(t) := e^t \cos t\ (t \in [0, \pi/2)$;

(b) $x = \varphi_1(t) := \cos 2t,\ y = \varphi_2(t) := \sin t\ (t \in [0, \pi/2)$.

F65. Határozza meg az alábbi *polárkoordinátás* alakban megadott görbék ívhosszát:

(a) $r = \varrho(\varphi) := \sin^3 \frac{\varphi}{3}\ (\varphi \in [0, 3\pi]$;

(b) $r = \varrho(\varphi) := \frac{1}{\varphi}\ (\varphi \in [\pi/2, \pi]$.

Forgástest térfogata

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és tegyük fel, hogy $f \ge 0$ az $[a, b]$ intervallumon. Az f grafikonjának az x-tengely körüli forgatásával adódó

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f(x)\}$$

forgástest térfogata:

$$V(H) := \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

F66. Határozza meg az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát:

(a) $f(x) := 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ $(x \in [-2, 2])$;

(b) $f(x) := \sin^2 x$ $(x \in [0, \pi])$;

(c) $f(x) := xe^x$ $(x \in [0, 1])$.

Forgástest felszíne

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény és tegyük fel, hogy $f \geq 0$ az $[a, b]$ intervallumon. Az f grafikonjának az x-tengely körüli forgatásával adódó

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 = f(x)\}$$

forgásfelület felszíne:

$$F(H) := 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

F67. Határozza meg az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest felszínét:

(a) $f(x) := 3\sqrt{x(3 - x^2)}$ $(x \in [0, 3])$;

(b) $f(x) := \sin x$ $(x \in [0, \pi])$;

(c) $f(x) := \sqrt{x}$ $(x \in [1, 4])$.

2.4. Improprius integrálok

D1. Tegyük fel, hogy az f függvény Riemann-integrálható a *tetszőleges* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallum (a lehet $-\infty$ és b lehet $+\infty$ is) minden *kompakt* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ részintervallumán, és legyen $c \in (a, b)$ egy tetszőleges, de rögzített pont. Az f függvényt **impropriusan integrálhatónak** nevezzük az (a, b) intervallumon (vagy azt mondjuk, hogy f **improprius integrálja konvergens** (a,b)-n), ha léteznek és végesek az alábbi határértékek:

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^c f(x)\,dx \qquad \text{és} \qquad \lim_{s\to b-0}\int_c^s f(x)\,dx,$$

és f **improprius integrálján** ezek összegét értjük:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to a+0}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{s\to b-0}\int_c^s f(x)\,dx.$$

T1. Ha f impropriusan integrálható az (a,b) intervallumon, akkor az improprius integráljának az értéke független a definíciójában szereplő $c\in(a,b)$ pont megválasztásától.

T2. Tegyük fel, hogy a korlátos f függvény Riemann-integrálható a kompakt $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon. Ekkor f impropriusan is integrálható (a,b)-n és ezen az intervallumon az improprius integrálja megegyezik az f függvény $[a,b]$-n vett Riemann-integráljával.

F68. Vizsgálja meg az alábbi improprius integrálok konvergenciáját. Ha konvergens, akkor határozza meg az értékét:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha\in\mathbb{R})$, (b) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha\in\mathbb{R})$,

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha\in\mathbb{R})$, (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{1-x^2}\,dx$.

F69. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyek a konvergensek. A konvergensek esetén számolja ki az integrál értékét.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x, dx$, (d) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\,dx \quad (p\in\mathbb{R})$.

T3. **Az összehasonlító kritérium:** Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ (ahol lehet $a = -\infty$ és lehet $b = +\infty$), és tegyük fel, hogy f is és g is Riemann-integrálható (a,b)-nek minden kompakt részintervallumán, továbbá

$$0 \le f(x) \le g(x) \qquad \big(x \in (a,b)\big).$$

Ha az $\int_a^b g(x)\,dx$ improprius integrál konvergens, akkor az $\int_a^b f(x)\,dx$ improprius integrál is konvergens (**majoránskritérium**).
Ha az $\int_a^b f(x)\,dx$ improprius integrál divergens, akkor az $\int_a^b g(x)\,dx$ improprius integrál is divergens (**minoránskritérium**).

F70. Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}$, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5}$,

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}\,dx$.

D2. Akkor mondjuk, hogy az $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ improprius integrál **abszolút konvergens**, ha az $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ improprius integrál konvergens.

T4. Ha az $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ improprius integrál abszolút konvergens, akkor konvergens is.

F71. Mutassa meg, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

F72. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergens, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx$ divergens.

T5. Tegyük fel, hogy az $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_0^+$ függvény folytonos, monoton csökkenő. Mutassa meg, hogy a $\sum\limits_{n=1} f(n)$ számsor konvergens vagy divergens aszerint, hogy az $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál konvergens vagy divergens.
A tétel érvényben marad abban az esetben is, amikor f a fenti tulajdonságokkal a $[k, +\infty)$ intervallumon ($k \in \mathbb{N}$) rendelkezik. Ebben az esetben $\sum\limits_{n=1} f(n)$, illetve $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ helyébe $\sum\limits_{n=k} f(n)$, illetve $\int\limits_k^{+\infty} f(x)\,dx$ értendő.

F73. Az előző tétel felhasználásával vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorokat:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R});$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{n \ln n}.$

F74. Mutassa meg, hogy az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

improprius integrál konvergens. Később majd meg fogjuk mutatni azt, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

F75. (a) Bizonyítsa be, hogy minden $x > 0$ valós számra az $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ improprius integrál konvergens. A

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

függvényt **gammafüggvénynek** nevezzük.

(b) Igazolja, hogy
 (i) $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ $(x \in \mathbb{R}^+)$,
 (ii) ha $n = 1, 2, 3, \ldots$, akkor $\Gamma(n + 1) = n!$.

2.5. Kiegészítések a differenciálszámításhoz és az integrálszámításhoz

F76. A binomiális sor. Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

binomiális együtthatókkal képzett

$$\sum_{k=0} \binom{\alpha}{k} x^k$$

hatványsor (ezt nevezzük **binomiális sornak**) minden $|x| < 1$ esetén konvergens, és az összegfüggvénye az $(1+x)^\alpha$ $(x \in (-1,1))$ függvény:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

F77. A Wallis-formula:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^2}{1^2} \cdot \frac{4^2}{3^2} \cdots \frac{(2n)^2}{(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

F78. A Stirling-formula:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1,$$

azaz $n!$ közelítésére az alábbi formula érvényes:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

F79. Mutassa meg, hogy π irracionális szám.

II. rész

Megoldások

1. Primitív függvények (határozatlan integrálok)

1.1. A definíciók egyszerű következményei

M1. **(a)** $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + c \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$;

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c \quad \big(x \in (-\infty, 0)\big)$;

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \ -\operatorname{ctg} x + c$;

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c.$

M2. **(a)** $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + c$ és $\sin \frac{3}{4}\pi + c = 0 \implies c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\int\limits_{\frac{3}{4}\pi} \cos x\,dx = \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + c.$

M3. **(a)** $\displaystyle f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \Rightarrow \ \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = f(x) = \sqrt{x} + c$ és $f(4) = 1 \ \Rightarrow$ $\sqrt{4} + c = 1 \Leftrightarrow 2 + c = 1 \Leftrightarrow c = -1,$ *azaz* $f(x) = \sqrt{x} - 1.$

(b) $\displaystyle f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x}\,dx = f(x) = \ln(1+x) + c$ *és* $f(0) = 2 \Rightarrow$ $\ln(0+1) + c = 2 \Leftrightarrow 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2,$ azaz $f(x) = \ln(x+1) + 2.$

(c) $\displaystyle f''(x) = x \Rightarrow \int x\,dx = f'(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$ *és* $\displaystyle f'(0) = 2 \Rightarrow \frac{0^2}{2} + c_1 = 2 \Leftrightarrow$ $\displaystyle c_1 = 2$ *és* $\displaystyle f'(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \Rightarrow \int (\frac{x^2}{2} + 2)\,dx = f(x) =$ $\displaystyle \frac{x^3}{2\cdot 3} + 2x + c_2$ *és* $\displaystyle f(0) = -3 \Rightarrow \frac{0^3}{6} + 2\cdot 0 + c_2 = -3 \Leftrightarrow c_2 = -3$ *és* $\displaystyle f(x) = \frac{x^3}{6} + 2x - 3.$

(d) $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = f'(x) = -\frac{1}{x} + c_1$ és $f'(2) = 0 \;\Rightarrow$
$-\dfrac{1}{2} + c_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; c_1 = \dfrac{1}{2}$ és $f'(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \Big(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\Big)\,dx =$
$f(x) = -\ln x + \dfrac{x}{2} + c_2$ és $f(1) = 0 \;\Rightarrow\; -\ln 1 + \dfrac{1}{2} + c_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; c_2 = -\dfrac{1}{2}$
és $f(x) = -\ln x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}$.

(e) $f''(x) = 3e^x + 5\sin x \Rightarrow \displaystyle\int (3e^x + 5\sin x)\,dx = f'(x) =$
$= 3e^x - 5\cos x + c_1$ *és* $f'(0) = 2 \Rightarrow 3e^0 - 5\cos 0 + c_1 = 2 \Leftrightarrow$
$c_1 = 4$ *és* $f'(x) = 3e^x - 5\cos x + 4 \Rightarrow \displaystyle\int (3e^x - 5\cos x + 4)\,dx = f(x) =$
$= 3e^x - 5\sin x + 4x + c_2$ *és* $f(0) = 1 \Rightarrow 3e^0 - 5\sin 0 + 4\cdot 0 + c_2 = 1 \Leftrightarrow$
$c_2 = -2$ *és* $f(x) = 3e^x - 5\sin x + 4x - 2$.

(f) $f'''(x) = \sin x \Rightarrow \displaystyle\int \sin x\,dx = f''(x) = -\cos x + c_1$ *és* $f''(0) = 1 \Rightarrow$
$-\cos 0 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 1$ *és* $f''(x) = -\cos x + 1 \Rightarrow \displaystyle\int (1 - \cos x)\,dx =$
$= f'(x) = x - \sin x + c_2$ *és* $f'(0) = 1 \Rightarrow 0 - \sin 0 + c_2 = 1 \Leftrightarrow$
$c_2 = 1$ *és* $f'(x) = x - \sin x + 1 \Rightarrow \displaystyle\int (x - \sin x + 1)\,dx = f(x) =$
$\frac{x^2}{2} + \cos x + x + c_3$ *és* $f(0) = 1 \Rightarrow \frac{0^2}{2} + \cos 0 + 0 + c_3 = 1 \Leftrightarrow$
$c_3 = 0$ *és* $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \cos x + x$.

1.2. Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek

1.2.1. Alapintegrálok

M6. **(a)** $\displaystyle\int \big(6x^2 - 8x + 3\big)\,dx = 2x^3 - 4x^2 + 3x + c,$

(b) $\displaystyle\int \big(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\big)\,dx = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c,$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int x^{\frac{7}{8}}\,dx = \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}} + c,$

(d) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c,$

(e) $\displaystyle\int \Big(2x + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\,dx = 2\int x\,dx + 5\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x^2 + 5\arcsin x + c.$

1.2.2. Alapintegrálokra vezető típusok

- **$\int \frac{f'}{f}$ alakú integrálok**

M7. Az $\frac{f'}{f}$ függvény egy primitív függvénye $\ln f$, mert $\big(\ln f\big)' = \frac{f'}{f}$. Mivel $\frac{f'}{f}$ intervallumon értelmezett, ezért minden primitív függvénye $\ln f$-től egy konstansban különbözik.

M8. (a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + c,$

(b) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-6x+27}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+27}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+27),$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln(\cos x) + c,$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+5) + c,$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln(-\ln x) + c,$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln\ln(x) + c.$

- **$\int f^\alpha \cdot f'$ alakú integrálok**

M9. **M7**-hez hasonlóan.

M10. (a) $\displaystyle\int x^2(2x^3+4)^{2004}\,dx = \frac{1}{6}\int 6x^2(2x^3+4)^{2004} = \frac{1}{6}\frac{(2x^3+4)^{2005}}{2005} + c,$

(b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{6x^3+4}\,dx = \frac{1}{18}\int 18x^2(6x^3+4)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{18}\frac{(6x^3+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c,$

(c) $\displaystyle\int e^x(1-e^x)^3\,dx, = -\int (-e^x)(1-e^x)^3\,dx = -\frac{(1-e^x)^4}{4} + c,$

(d) $\int \sin^3 x \cos x \, dx \ = \int \sin^3 x (\cos x) \, dx = \dfrac{\sin^4 x}{4} + c,$

(e) $\int \dfrac{\ln^5 x}{x} \, dx \ = \int \dfrac{1}{x} \ln^5 x \, dx = \dfrac{\ln^6 x}{6} + c,$

(f) $\int \sqrt{\dfrac{\operatorname{arsh} x}{1+x^2}} \, dx, \ = \int \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arsh}^{\frac{1}{2}} x \, dx = \dfrac{\operatorname{arsh}^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2\operatorname{arsh}^{\frac{3}{2}} x}{3} + c,$

(g) $\int \dfrac{4x+7}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+5)^5}} \, dx = \int (4x+7) \cdot (2x^2+7x+5)^{-\frac{5}{4}} \, dx =$

$= -\dfrac{4}{\sqrt[4]{2x^2+7x+5}} + c,$

(h) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}} \, dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot (\operatorname{tg} x)^{-\frac{3}{2}} \, dx = \dfrac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + c.$

- $\int f(ax+b) \, dx$ **alakú integrálok**

M11. **M7**-hez hasonlóan.

M12. **(a)** $\int (2x-3)^{10} dx = \dfrac{(2x-3)^{(10+1)}}{2 \cdot (10+1)} + c = \dfrac{(2x-3)^{11}}{22} + c,$

(b) $\int \sqrt[3]{1-3x} \, dx = \int (1-3x)^{\frac{1}{3}} \, dx = \dfrac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \cdot (-3)} + c = -\dfrac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{(1-3x)^4} + c,$

(c) $\int \dfrac{1}{2+3x^2} \, dx = \dfrac{1}{2} \cdot \int \dfrac{1}{1+\frac{3}{2}x^2} \, dx = \dfrac{1}{2} \cdot \int \dfrac{1}{1+(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2} \, dx =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + c,$

(d) $\int \dfrac{1}{2-3x^2} \, dx = \dfrac{1}{2} \cdot \int \dfrac{1}{1-\frac{3}{2}x^2} \, dx = \dfrac{1}{2} \cdot \int \dfrac{1}{1-(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2} \, dx =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{arth} \sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + c,$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arcsin}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}x\right)+c,$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arch}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}x\right)+c.$

M13. **(a)** $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-12x+23} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-6x+\frac{23}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-3)^2+\frac{5}{2}}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\int \frac{1}{\frac{2}{5}(x-3)^2+1}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{[\sqrt{\frac{2}{5}}(x-3)]^2+1}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{2}{5}}(x-3)\right)+c,$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+12x+16} = \int \frac{1}{3(x^2+4x)+16}\,dx = \int \frac{1}{3(x+2)^2+4}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{4}\int \frac{1}{[\sqrt{\frac{3}{4}}(x+2)]^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}\right)\frac{1}{2\sqrt{3}}+c,$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+30}} = \int \frac{1}{\sqrt{3(x+2)^2+18}}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{\sqrt{18}}\int \frac{1}{\sqrt{[\sqrt{\frac{3}{18}}(x+2)]^2+1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arsh}\left(\sqrt{\tfrac{3}{18}}(x+2)\right)+c,$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x-1)^2+5}}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left[\sqrt{\frac{1}{5}}(x-1)\right]^2}}\,dx = \operatorname{arcsin}\left(\sqrt{\tfrac{1}{5}}(x-1)\right)+c.$

- $\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx$ **alakú integrálok**

M14. **M7**-hez hasonlóan.

M15. **(a)** $\displaystyle\int x\sin x^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int 2x\,\sin x^2\,dx = -\frac{\cos x^2}{2}+c,$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}\,dx = 2\operatorname{ch}\sqrt{x} + c,$

(c) $\displaystyle\int (6x+2)\sin(3x^2+2x-1)\,dx = -\cos(3x^2+2x-1) + c,$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+(\ln x)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(\ln x) + c,$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\,dx = \operatorname{arsh}(\operatorname{tg} x) + c,$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,e^{\operatorname{tg} x}\,dx = e^{\operatorname{tg} x} + c.$

1.2.3. Integrálás „ügyesen”

M16. **(a)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \Big(1-\frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx = x-\operatorname{arctg}(x)+c,$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x-2}\,dx = \int \frac{2x-4+7}{x-2}\,dx = \int \Big(2+\frac{7}{x-2}\Big)\,dx =$

$\displaystyle= \int 2\,dx + 7\int \frac{1}{x-2}\,dx = 2x + 7\ln(x-2) + c,$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,dx = \int x\frac{1}{4+(x^2)^2} = \frac{1}{4}\int x\frac{1}{1+\frac{1}{4}(x^2)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + c,$

(d) $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int [x(1+x^2)-x]\sqrt[3]{1+x^2}\,dx =$

$\displaystyle= \int x(1+x^2)^{1+\frac{1}{3}}\,dx - \int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{\frac{4}{3}}\,dx -$

$\displaystyle- \frac{1}{2}\int 2x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c,$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + c,$

(f) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big)\,dx =$

$= \operatorname{tg} x - x + c,$

(g) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c,$

(h) $\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x \cdot (\cos^2 x)\,dx = \int \cos x \cdot (1-\sin^2 x)\,dx =$
$= \int \cos x\,dx - \int \cos x \cdot \sin^2 x\,dx = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + c,$

(i) a $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ azonosság alapján
$\int \sin 3x \cdot \cos 7x\,dx = \int \dfrac{\sin 10x + \sin(-4x)}{2}\,dx =$
$= \int \dfrac{\sin 10x - \sin(4x)}{2}\,dx = \dfrac{1}{2} \cdot \int \sin 10x\,dx - \dfrac{1}{2} \cdot \int \sin 4x\,dx =$
$= -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cos 10x}{10} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cos 4x}{4} + c,$

(j) most a $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ azonosságot alkalmazzuk:
$\int \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{3}\,dx = \dfrac{1}{2}\int [\cos(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}) + \cos(\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3})]\,dx =$
$= \dfrac{3}{5} \cdot \sin\dfrac{5}{6}x + 3\sin\dfrac{x}{6} + c,$

(k) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{1-2\sin x\cos x}\,dx =$
$= \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x}\,dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx =$
$= \int \left|\sin x - \cos x\right|\,dx = \int \begin{cases} \cos x - \sin x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ \sin x - \cos x, & \text{ha } \frac{\pi}{4} \le x \le \pi \end{cases};$
az $f(x) := \begin{cases} \sin x + \cos x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ -\cos x - \sin x + 2\sqrt{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{4} \le x \le \pi \end{cases}$
függvény egy primitív függvény.

(l) $\int \dfrac{\cos^2 x - 5}{1+\cos 2x}\,dx = \int \dfrac{\cos^2 x - 5}{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}\,dx =$
$= \int \dfrac{\cos^2 x - 5}{2\cos^2 x}\,dx = \int \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx - \dfrac{5}{2} \cdot \int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2} \cdot \operatorname{tg} x + c,$

(m) $\int \dfrac{1}{\sin x}\,dx = \int \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int \dfrac{1}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}}\,dx =$
$= \int \dfrac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,dx = \ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + c.$

1.2.4. Parciális integrálás

M17. **(a)** $\int xe^{2x}\,dx = \left(f(x)=x \Longrightarrow f'(x)=1\,,\quad g'(x)=e^{2x} \Longrightarrow g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

$= x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x} + c.$

(b) $\int x^2 \sin 3x\,dx =$

$\left(f(x)=x^2 \Longrightarrow f'(x)=2x\,,\quad g'(x)=\sin 3x \Longrightarrow g(x)=\frac{-\cos 3x}{3}\right)$

$= -x^2\frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}\int x\cos 3x\,dx =$

$\left(f(x)=x \Longrightarrow f'(x)=1\,,\quad g'(x)=\cos 3x \Longrightarrow g(x)=\frac{\sin 3x}{3}\right)$

$= -\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{x\sin 3x}{3} - \frac{1}{3}\int 1\sin 3x\,dx\right] =$

$= \frac{-x^2\cos 3x}{3} + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{9}\frac{\cos 3x}{3} + c.$

(c) $\int e^x \sin x\,dx =$

$\left(f(x)=e^x \Longrightarrow f'(x)=e^x\,,\quad g'(x)=\sin x \Longrightarrow g(x)=-\cos x\right)$

$= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx =$

$\left(f(x)=e^x \Longrightarrow f'(x)=e^x\,,\quad g'(x)=\cos x \Longrightarrow g(x)=\sin x\right)$

$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx$; rendezés után kapjuk, hogy

$\int e^x\sin x\,dx = \frac{-e^x\cos x + e^x\sin x}{2} + c.$

(d) $\int e^{2x}\mathrm{ch}\,3x\,dx$ parciális integrálással is meghatározható, de egyszerűbb a következő:

$\int e^{2x}\mathrm{ch}\,3x\,dx = \int e^{2x}\cdot\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}\,dx = \int\left(\frac{e^{5x}}{2}+\frac{e^{-x}}{2}\right)dx =$

$= \frac{e^{5x}}{10} - \frac{e^{-x}}{2} + c;$

(e) $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx =$

$$\left(g'(x) = 1\,, g(x) = x;\ f(x) = \ln x,\ f'(x) = \tfrac{1}{x}\right)$$

$$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c;$$

(f) $\int \operatorname{arctg} 3x\,dx = \int 1\cdot \operatorname{arctg} 3x\,dx =$

$$\left(g'(x) = 1,\ g(x) = x,\quad f(x) = \operatorname{arctg} 3x,\ f'(x) = \frac{3}{1+(3x)^2}\right)$$

$$= x\operatorname{arctg} 3x - \int \frac{3x}{1+(3x)^2}dx = x\operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}\int \frac{18x}{1+9x^2}dx =$$

$$= x\operatorname{arctg} 3x - \tfrac{1}{6}\ln(1+9x^2) + c;$$

(g) $\int x^2 \ln x\,dx =$

$$\left(g'(x) = x^2,\ g(x) = \tfrac{x^3}{3};\quad f(x) = \ln x,\ f'(x) = \tfrac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c;$$

(h) $\int x^5 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} 3x^2\, x^3 dx$

$$\left(g'(x) = e^{x^3}3x^2,\ g(x) = e^{x^3};\quad f(x) = x^3,\ f'(x) = 3x^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int e^{x^3}3x^2\,x^3dx = \frac{1}{3}(e^{x^3}x^3 - \int e^{x^3}3x^2\,dx) = \frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1) + c.$$

M18. **(a)** $\int \cos(2x+1)e^{3x+2}\,dx =$

$$\left(f(x) = e^{3x+2},\ f'(x) = 3e^{3x+2};\quad g'(x) = \cos(2x+1),\ g(x) = \frac{\sin(2x+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{3x+2}\sin(2x+1)}{2} - \frac{3}{2}\int e^{3x+2}\sin(2x+1)\,dx =$$

$$\left(f(x) = e^{3x+2},\ f'(x) = 3e^{3x+2};\quad g'(x) = \sin(2x+1),\ g(x) = -\frac{\cos(2x+1)}{2}\right)$$

$$= e^{3x+2}\frac{\sin(2x+1)}{2} - \frac{3}{2}\Big[\frac{-e^{3x+2}\cos(2x+1)}{2} - \int \frac{-3e^{3x+2}\cos(2x+1)}{2}\,dx\Big] =$$

$$= e^{3x+2}\frac{\sin(2x+1)}{2} + \frac{3}{4}e^{3x+2}\cos(2x+1) - \frac{9}{4}\int e^{3x+2}\cos(2x+1)\,dx,$$

rendezés után azt kapjuk, hogy
$$\int \cos(2x+1)e^{3x+2}\,dx = \frac{2e^{3x+2}\sin(2x+1)+3e^{3x+2}\cos(2x+1)}{13}+c;$$

(b) $x^3 = x(x^2+4-4)$,

(c) $\int \arcsin x\,dx = \int 1\cdot \arcsin x\,dx =$
$$\left(g'(x)=1,\ g(x)=x;\quad f(x)=\arcsin x,\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$
$$= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$
$$= x\arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + c;$$

(d) $\int \cos(\ln x)\,dx = \int \cos(\ln x)\frac{1}{x}\,x\,dx =$
$$\left(g'(x)=\cos(\ln x)\frac{1}{x},\ g(x)=\sin(\ln x);\quad f(x)=x,\ f'(x)=1\right)$$
$$= x\sin(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) + \int -\sin(\ln x)\frac{1}{x}\,x\,dx =$$
$$\left(g'(x)=-\sin(\ln x)\frac{1}{x},\ g(x)=\cos(\ln x);\quad f(x)=x,\ f'(x)=1\right)$$
$$= x\sin(\ln x) + x\cos(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \Longrightarrow$$
$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x\big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\big)}{2}+c;$$

(e) $\int \ln\sqrt{x}\,dx = \int \ln\big(x^{\frac{1}{2}}\big)\,dx = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx = \frac{1}{2}(x\ln x - x)+c \qquad (F17/e);$

(f) $\int \cos x\ln(\sin x)\,dx =$
$$\left(g'(x)=\cos x,\ g(x)=\sin x;\quad f(x)=\ln(\sin x),\ f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$
$$= \sin x\ \ln(\sin x) - \int \sin x\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \sin x\ \ln(\sin x) - \int \cos x\,dx =$$
$$= \sin x\ \ln(\sin x) - \sin x + c;$$

(g) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x\frac{1}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2}+c;$

(h) $\int x \ln^2 x \, dx =$

$$\left(g'(x) = x,\ g(x) = \tfrac{x^2}{2};\quad f(x) = \ln^2 x,\quad f'(x) = \tfrac{2\ln x}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{2\ln x}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\,dx =$$

$$\left(g'(x) = x,\ g(x) = \tfrac{x^2}{2};\quad f(x) = \ln x,\ f'(x) = \tfrac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + c.$$

1.2.5. Integrálás helyettesítéssel

M21. Az elkövetkező feladatok megoldásához az alábbi összefüggés nyújt segítséget:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)}}$$

Itt f egy I intervallumon adott (pl. folytonos) függvény, $g : J \to I$ pedig egy szigorúan monoton (növekedő vagy csökkenő) differenciálható függvény a J intervallumon. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $x = g(t)$ *helyettesítést alkalmazzuk.* (Figyeljünk majd a g helyettesítő függvény szigorú monotonitásának az ellenőrzésére!)

(a) Most az $x = \sin t =: g(t)$ helyettesítést alkalmazzuk. Mivel $-1 \le x \le 1$, ezért, ha g-t a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon tekintjük, akkor itt g szigorúan monoton növekedő, ezért a fenti képlet alkalmazható:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt_{\big|t=\arcsin x} = \int \cos^2 t_{\big|t=\arcsin x} =$$

$$= \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)_{\big|t=\arcsin x} + c = \frac{\mathrm{arcin}\, x}{2} - \frac{\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)}{2} + c =$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

(b) Itt az

$$x = \mathrm{sh}\, t =:= g(t)\ (t \in \mathbb{R});\quad g\ \uparrow,\quad g'(t) = \mathrm{ch}\, t\ (t \in \mathbb{R})$$

helyetesítést alkalmazzuk:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\,\operatorname{ch} t\,dt_{\big|t=\operatorname{arsh} x} = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t}\,\operatorname{ch} t\,dt_{\big|t=\operatorname{arsh} x} =$$
$$= \int \frac{\operatorname{ch} 2t+1}{2}\,dt_{\big|t=\operatorname{arsh} x} = \left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{4}+\frac{t}{2}\right)_{\big|t=\operatorname{arsh} x} + c = \left(\frac{\operatorname{ch} t\operatorname{sh} t}{2}+\frac{t}{2}\right)_{\big|t=\operatorname{arsh} x} + c =$$
$$= \frac{x\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)}{2} + \frac{\operatorname{arsh} x}{2} + c == \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\operatorname{arsh} x}{2} + c;$$

(c) Az $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ $(x>1)$ integrál kiszámításához alkalmazza az $x = \operatorname{ch} t =: g(t)$ $(t>0)$ helyettesítést.

(f) Alkalmazhatjuk az $x = \operatorname{sh} x =: g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ helyettesítést.
A feladatot megoldhatjuk az $x^5 = x \cdot x^4 = x\big[(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) + 1\big]$ azonosság felhasználásával is. ■

1.2.6. Racionális függvények integrálása

M22. **(a)** $\displaystyle\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln(x-3) + c$, ha $x \in (3, +\infty)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln(3-x) + c$, ha $x \in (-\infty, 3)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + c$,

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}\,dx = \int \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{1}{x^2+2x+3}\right) dx =$
$$= \ln(x^2+2x+3) + \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \ln(x^2+2x+3) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{[\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)]^2+1}\,dx = \ln(x^2+2x+3) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\tfrac{x}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + c,$$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\cdot\int \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot(x+\frac{1}{2})\right]^2+1}\,dx =$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + c,$$

(f) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-x+5}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+10}{x^2-x+5}\,dx =$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\int \frac{2x-1}{x^2-x+5}\,dx\ +\ 11\cdot\int \frac{1}{x^2-x+5}\,dx\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\ln(x^2-x+5)\ +\right.$$

$$+ 11 \cdot \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}}\,dx] = \frac{1}{2} \cdot [\ln (x^2 - x + 5) +$$
$$+ \frac{4}{19} \cdot 11 \cdot \int \frac{1}{[\frac{2}{\sqrt{19}}(x-\frac{1}{2})]^2+1}\,dx] = \frac{1}{2} \cdot \ln (x^2 - x + 5) +$$
$$+ \frac{11 \cdot \sqrt{19}}{19} \cdot \arctan[\tfrac{2}{\sqrt{19}} \cdot (x - \tfrac{1}{2})] + c,$$

(g) $$\int \frac{6x}{x^2-2x+7}\,dx = 3 \cdot \int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+7}\,dx = 3 \cdot [\int \frac{2x-2}{x^2-2x+7}\,dx +$$
$$+2 \cdot \int \frac{1}{(x-1)^2+6}\,dx] = 3 \cdot [\ln(x^2-2x+7) + \frac{2}{6} \cdot \int \frac{1}{[\frac{1}{\sqrt{6}}(x-1)]^2+1}\,dx =$$
$$= 3 \cdot \ln(x^2 - 2x + 7) + \sqrt{6} \cdot \arctan[\tfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot (x-1)] + c. \blacksquare$$

M23. ...

M24. **(a)** Az integrandus felbontása „kis próbálkozással” is meghatározható:

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} \left(= \cdots \frac{\cdots}{x-2} \cdots \frac{\cdots}{x-4}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4}\right),$$

de a „biztos módszert” is alkalmazhatjuk: az

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)} =$$
$$= \frac{(A+B)x-(4A+2B)}{(x-2)(x-4)}$$

alapján $A + B = 0$, $-(4A + 2B) = 1$ adódik, amiből $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ következik. Ezért

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-4}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(x-2) + \frac{1}{2}\ln(4-x) + c, \quad \text{ha } 2 < x < 4.$$

(e) Az integrandus így bontható fel:

$$\frac{1}{x(x^2+4)} \left(= \cdots \frac{\cdots}{x} \cdots \frac{x+\ldots}{x^2+4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}\right).$$

Ezt a felbontást a „biztos módszerünkkel” így határozhatjuk meg: az

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)} = \\ = \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}$$

alapján $A+B=0$, $C=0$, $4A=1$, azaz $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$. Ezért

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{8}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \\ = \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\ln(x^2+4)+c, \qquad \text{ha } x>0.$$

(h) Az integrandus felbontása:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(1+x^2)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{1+x^2} + \frac{B_2x+C_2}{(1+x^2)^2}.$$

Közös nevezőre hozás, majd a számlálóban a változó együtthatóinak összehasonlítása után egy 6 ismeretlenes egyenletrendszert kapunk az A_i, B_i, C_i ismeretlenekre.

A szóban forgó felbontást azonban így is meghatározhatjuk:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(1+x^2)^2} = \frac{4}{(1+x^2)^2} - \left[\frac{2}{(x-1)(1+x^2)}\right]^2 = \\ = \frac{4}{(1+x^2)^2} - \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{1+x^2}\right)^2 = \\ = \frac{4}{(1+x^2)^2} - \frac{(x+1)^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2(x+1)}{(x-1)(1+x^2)} = \\ = \frac{4}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2+2x+1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} + 2\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{1+x^2}\right) = \\ = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x+1}{1+x^2} - \frac{2x-4}{(1+x^2)^2}.$$

Az egyes tagok primitív függvényei innen már a „szokásos” módon határozhatók meg.

(i) Először a nevezőt kell felbontani tovább már nem bontható **valós** tényezők szorzatára. A felbontásban elsőfokú tényezők nyilván nem lesznek (az $1 + x^4 = 0$ egyenletnek ui. nincs valós gyöke), ezért $1+x^4$ összeget két másodfokú tényező szorzatára kell felbontanunk. Ezt némi „ügyeskedéssel" így tehetjük meg:

$$1 + x^4 = 1 + 2x^2 + x^4 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 =$$
$$= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Így

$$\frac{1}{1 + x^4} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1},$$

amiből a „szokásos" módszerrel

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D = \frac{1}{2}$$

adódik. Ezért

$$\int \frac{1}{1 + x^4}\, dx = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\, dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\, dx =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{2}(2x - \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\, dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{2}(2x + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\, dx =$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}\, dx +$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} +$$
$$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1}\, dx + + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1}\, dx =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \Big(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) \Big) + c. \blacksquare$$

1.2.7. Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések

M25. **(b)** $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[6]{x})}\,dx =$$
$$\Big(t := \sqrt[6]{x};\ x = t^6 =: g(t)\ (t>0);\quad g'(t) = 6t^5\ (t>0),\quad g \uparrow\Big)$$
$$= \int \frac{1}{t^2(1+t)}\,6t^5\,dt_{\big|t=\sqrt[6]{x}} = 6\int \frac{t^3}{1+t}\,dt_{\big|t=\sqrt[6]{x}} =$$
$$= 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1}\,dt_{\big|t=\sqrt[6]{x}} = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt_{\big|t=\sqrt[6]{x}} =$$
$$= \left(6\tfrac{t^3}{3} - 6\tfrac{t^2}{2} + 6t - 6\ln(1+t) + c\right)_{|t=\sqrt[6]{x}} =$$
$$= 6\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + c;$$

(c) $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int \frac{(\sqrt[4]{x})^2}{1+(\sqrt[4]{x})^3}\,dx =$$
$$\Big(t := \sqrt[4]{x};\ x = t^4 =: g(t)\ (t>0);\quad g'(t) = 4t^3\ (t>0);\quad g \uparrow\Big)$$
$$= \int \frac{t^2}{1+t^3}\,4t^3\,dt_{\big|t=\sqrt[4]{x}} = 4\int \frac{t^3+1-1}{t^3+1}\,t^2\,dt_{\big|t=\sqrt[4]{x}} =$$
$$= 4\int (1-\frac{1}{t^3+1})\,t^2\,dt_{\big|t=\sqrt[4]{x}} = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right) dt_{\big|t=\sqrt[4]{x}} =$$
$$= 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\int \frac{3t^2}{t^3+1}\,dt_{\big|t=\sqrt[4]{x}} = (\tfrac{4}{3}t^3 - \tfrac{4}{3}\ln(t^3+1) + c)_{\big|t=\sqrt[4]{x}} =$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \tfrac{4}{3}\ln(\sqrt[4]{x^3}+1) + c$$

(g) Tudjuk, hogy a

$$t = \sqrt{\frac{2x-3}{x}} = \sqrt{2-\frac{3}{x}}$$

helyettesítés racionális törtfüggvény integrálására vezet. Ha $x > \frac{3}{2}$, akkor nyilván $0 < t < \sqrt{2}$, ami azt jelenti, hogy az

$$x = \frac{3}{2-t^2} =: g(t) \qquad (t \in (0, \sqrt{2}))$$

helyettesítő függvényt alkalmazzuk. Mivel

$$g'(t) = \frac{6t}{(2-t^2)^2} > 0 \qquad \big(t \in (0, \sqrt{2})\big),$$

ezért g szigorúan monoton növekedő, így a határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabályunk valóban alkalmazható:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx = \int \frac{2-t^2}{3}\cdot t \cdot \frac{6t}{(2-t^2)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}}.$$

Mivel

$$\int \frac{2-t^2}{3}\cdot t\cdot\frac{6t}{(2-t^2)^2}\,dt = \int \frac{2t^2}{2-t^2}\,dt = \int\left(-2+\frac{4}{(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)}\right)dt =$$
$$= -2t + \frac{4}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}-t}+\frac{1}{\sqrt{2}+t}\right)dt = -2t+\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}+c,$$

ezért

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx = -2\sqrt{\frac{2x-3}{x}}+\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x}-\sqrt{2x-3}}+c \quad (x>\frac{3}{2}). \ \blacksquare$$

2. A határozott integrál

2.1. A határozott integrál értelmezése

M30. ...

M31. Legyen $f(x) = 1$, ha $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ és $f(x) = -1$, ha $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}^*$. ■

M32. A feladat (a) részében tekintse az $[1, 2]$ intervallum egyenletes felosztásait. A (b) részben minden $n \in \mathbb{N}$ esetén vegye az $[1, 2]$ intervallumnak azt a felosztását, amelyet az $\left(\sqrt[n]{2}\right)^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ pontok határoznak meg.

(b) megoldása: Legyen $f(x) := \frac{1}{x^2}$ $(x \in [1, 2])$, $q := \sqrt[n]{2}$, és tekintsük az $[1, 2]$ intervallum

$$\tau_n := \{x_i := q^i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$$

felosztását. Az ehhez tartozó alsó közelítő összeg:

$$s(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{2i}}\left(q^i - q^{i-1}\right) =$$

$$= \frac{q-1}{q^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{q}\right)^i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \to \frac{1}{2}, \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Hasonlóan a τ_n felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg:

$$S(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{2i-2}}\left(q^i - q^{i-1}\right) =$$

$$= (q-1) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{q}\right)^{i-1} = \frac{1}{2} \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{2} \to \frac{1}{2}, \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Mivel

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} s(f, \tau_n) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \lim_{n\to+\infty} S(f, \tau_n) = \frac{1}{2},$$

ezért $I_*(f) = I^*(f) = \frac{1}{2}$. Az f függvény tehát integrálható az $[1, 2]$ intervallumon, és $\int_1^2 f = \frac{1}{2}$. ■

M33. $\boxed{\Rightarrow}$ Ha $f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = I$, akkor $I_*(f) = I^*(f) = I$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz létezik $[a,b]$-nek olyan τ_n felosztása, amelyre

$$I - \tfrac{1}{n} \le s(f,\tau_n) \le I_*(f) = I^*(f) \le S(f,\tau_n) \le I + \tfrac{1}{n}.$$

A (τ_n) felosztássorozatra tehát $\lim\limits_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I$ teljesül.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ha $[a,b]$-nek *van olyan* (τ_n) felosztássorozata, amelyre

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I$$

teljesül, akkor az

$$I = \lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) \le I_*(f) \le I^*(f) \le \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I$$

egyenlőtlenségekből következik, hogy $I_*(f) = I^*(f) = I$, azaz f Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon és $\int_a^b f = I$. ■

M34. A feladat (a) részében tekintse az $[a,b]$ intervallum egyenletes felosztásait. A (b) és (c) részben minden $n \in \mathbb{N}$ esetén vegye az $[a,b]$ intervallumnak azt a felosztását, amelyet az $\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^i$ $(i = 0,1,2,\dots,n)$ pontok határoznak meg.

(c) megoldása: Legyen $f(x) := \frac{1}{x}$ $(x \in [a,b])$, $q := \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, és tekintsük az $[a,b]$ intervallum

$$\tau_n := \{x_i := q^i \mid i = 0,1,\dots,n\}$$

felosztását. Az ehhez tartozó alsó közelítő összeg:

$$s(f,\tau_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^i}\big(q^i - q^{i-1}\big) = n\big(1 - \frac{1}{q}\big) = n\big(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\big).$$

A sorozat határértékének a meghatározásához vegyük észre, hogy

$$n\big(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\big) = -\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}},$$

és ennek határértéke a $g(x) := \left(\frac{a}{b}\right)^x$ $(x \in \mathbb{R})$ exponenciális függvény 0 pontbeli deriváltjával hozható kapcsolatba. Mivel $g \in D\{0\}$ és $g'(0) = \ln\frac{a}{b}$, ezért

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} n\big(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\big) = -g'(0) = -\ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}.$$

A τ_n felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg:

$$S(f,\tau_n)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q^{i-1}}\big(q^i-q^{i-1}\big)=n(q-1)=n\Big(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\Big).$$

Mivel a $h(x):=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény deriválható, és $h'(0)=\ln\frac{b}{a}$, ezért

$$\lim_{n\to+\infty}S(f,\tau_n)=\lim_{n\to+\infty}n\Big(1-\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\Big)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}-1}{1/n}=h'(0)=\ln\frac{b}{a}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az $[a,b]$ intervallumnak van olyan felosztássorozata, amelyhez tartozó alsó- és felső közelítő összegek sorozata ugyanahhoz a számhoz tart. Alkalmazzuk most az előző feladat állítását. ■

M35. ...

M36. A sor Leibniz-típusú sor, tehát konvergens. Itt a hangsúly az összeg meghatározásán van. Ehhez tekintse a következő „cseles” átalakításokat:

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\\
&=\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)-2\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)=\\
&=\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)-\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)=\\
&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\Big).
\end{aligned}$$

Ez utóbbi az $\frac{1}{x}$ $(x\in\mathbb{R}^+)$ függvénynek az $[1,2]$ intervallum n egyenlő részre való felosztásával vett alsó közelítő összege. Az **F34.** feladat (c) része alapján ez a függvény integrálható, és $\int_1^2\frac{1}{x}\,dx=\ln 2$. Az előző feladat állítását felhasználva kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget. ■

M37. Mivel minden intervallumban van irracionális szám és így olyan, ahol f értéke 0, ezért a $[0,1]$ intervallum tetszőleges τ felosztása esetén $s(f,\tau)=0$, tehát $I_*(f)=\sup\{s(f,\tau)\mid\tau\in\mathcal{F}([a,b])\}=0$. Azt kell megmutatni, hogy

$$I^*(f)=\inf\{S(f,\tau)\mid\tau\in\mathcal{F}([a,b])\}=0$$

is igaz. $I^*(f)=0$ azt jelenti, hogy

$$\forall\,\varepsilon>0\text{-hoz }\exists\,\tau\in\mathcal{F}([0,1]):S(f,\tau)<\varepsilon.$$

Adott $\varepsilon > 0$ számhoz egy ilyen τ felosztást a következőképpen adhatunk meg. Vegyünk egy olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $\frac{3}{n} < \varepsilon$ teljesül. Vegyük észre, hogy a függvény $\frac{1}{n}$-nél nagyobb értéket n^2-nél kevesebb helyen veszi fel. (Ugyanis, ha $f(x) \geq \frac{1}{n}$, akkor $x = \frac{p}{q}$ és $q \leq n$ kell, hogy legyen, márpedig minden $q \leq n$-hez n-nél kevesebb p van, amelyre $0 < \frac{p}{q} < 1$ és $(p, q) = 1$.) Ezért tekintsük $[0, 1]$-nek az n^3 egyenlő részre való τ_n felosztását. Mutassa meg, hogy $S(f, \tau_n) < \frac{3}{n}$. ■

2.2. A határozott integrál tulajdonságai és kiszámítása

M38. ...

M39. ...

M40. (a) $\displaystyle \int \frac{1}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{9 - (x - 2)^2}}\, dx = \arcsin \frac{x - 2}{3} + c,$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}\, dx = \left[\arcsin \frac{x - 2}{3}\right]_2^5 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(b) $\displaystyle \int \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx = -\cos(\ln x) + c, \qquad \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx = 1 - \cos 1.$

(g) Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg. Alkalmazzuk a

$$t = \sqrt{3x + 1}, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad 1 \leq t \leq 4$$

helyettesítést, azaz tekintsük az

$$x = \frac{t^2 - 1}{3} =: g(t) \quad (1 \leq t \leq 4)$$

helyettesítő függvényt. A g függvény szigorúan monoton növekedő az $[1, 4]$ intervallumon, deriválható és $g'(t) = \frac{2}{3}t$ $(t \in [1, 4])$, ezért a határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabályt alkalmazhatjuk:

$$\int \frac{dx}{2x + \sqrt{3x + 1}} = \int \frac{1}{\frac{2}{3}(t^2 - 1) + t} \cdot \frac{2}{3} t\, dt_{|t = \sqrt{3x+1}}.$$

Mivel

$$\int \frac{1}{\frac{2}{3}(t^2-1)+t}\cdot\frac{2}{3}t\,dt = \int \frac{2t}{2t^2+3t-2}\,dt = \int \frac{2t}{(2t-1)(t+2)}\,dt =$$
$$= \int \left[\frac{A}{2t-1}+\frac{B}{t+2}\right]dt = \cdots =$$
$$= \frac{2}{5}\int \frac{1}{2t-1}\,dt + \frac{4}{5}\int \frac{1}{t+2}\,dt = \frac{1}{5}\ln(2t-1)+\frac{4}{5}\ln(t+2)+C,$$

ezért

$$\int \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{1}{5}\ln\big(2\sqrt{3x+1}-1\big)+\frac{4}{5}\ln\big(\sqrt{3x+1}+2\big)+C.$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{1}{5}\Big[\ln\big(2\sqrt{3x+1}-1\big)+4\ln\big(\sqrt{3x+1}+2\big)\Big]_0^5 = \frac{\ln 112}{5}.$$

(h) Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg. Most a

$$t=\sqrt{e^x-1},\quad 0\le x\le \ln 2,\quad 0\le t\le 1$$

helyettesítéssel *próbálkozunk*, azaz vesszük az

$$x=\ln(1+t^2) =: g(t)\quad (0\le t\le 1)$$

helyettesítő függvényt. A g függvény deriválható és $g'(t)=\frac{2t}{1+t^2}$ $(t\in[0,1])$, g tehát szigorúan monoton növekedő. A határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabály tehát alkalmazható:

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} =$$
$$= \Big(2t-2\operatorname{arctg} t\Big)\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = 2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C.$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx = \Big[2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\Big]_0^{\ln 2} = 2-\frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

M41. *(a) megoldása:* Mivel

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}=$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right),$$

ezért ezt az összeget felfoghatjuk úgy is, mint az $f(x):=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $(x>-1)$ függvénynek a $[0,1]$ intervallum egyenletes felosztásához tartozó közelítő összege. Sőt ez f monoton csökkenése miatt egy alsó közelítő összeg. Az f függvény folytonos, tehát integrálható, és

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx=2(\sqrt{2}-1).$$

Az **F35.** feladat állítását felhasználva kapjuk, hogy a kérdezett sorozat határértéke $2(\sqrt{2}-1)$.

(e) megoldása: Mivel

$$a_n:=\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^\alpha,$$

ezért

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\int_0^1 x^\alpha\,dx=\frac{1}{1+\alpha}.$$

Megjegyzés. Ez az eredmény azt jelenti, hogy minden $\varepsilon>0$ valós számhoz létezik olyan $n_0\in\mathbb{N}$ index, hogy minden $n\ge n_0$ természetes számra fennállnak az

$$(1-\varepsilon)\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\le 1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha\le(1+\varepsilon)\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

egyenlőtlenségek. Nagy n-ekre tehát az $1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha$ összeg az $\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}$ számmal jól közelíthető. Ezt úgy is ki szoktuk fejezni, hogy $1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha$ *aszimptotikusan egyenlő* $\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}$*-gyel, ha* $n\to+\infty$, és ezt röviden így szokás jelölni:

$$1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha\sim\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}\quad(n\to+\infty).$$

(Vagy azt mondjuk, hogy az $1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha$ összeg $n^{\alpha+1}$ nagyságrendű.) Figyelje meg, hogy ha $\alpha = 1, 2$ vagy 3, akkor a szóban forgó összegeket zárt alakban is fel tudjuk írni, és ebből kaphatunk információt arról, hogy az összeg nagy n-ekre mekkora. Más α-kra (pl. $\alpha = \frac{1}{2}$) zárt alak vagy nincs vagy pedig nehezen adható meg. A feladatban mutatott egyszerű eszközökkel tehát minden $\alpha > 0$ valós szám esetén a zárt alak ismerete nélkül kaptunk információt az összeg nagy n-ekre való viselkedéséről.■

M42. Ha $\int_a^b f^2 = \int_a^b g^2 = 0$, akkor az

$$|f(x)g(x)| \le \frac{1}{2}\big(f^2(x) + g^2(x)\big) \qquad (x \in [a, b])$$

egyenlőtlenségből

$$0 \le \left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \frac{1}{2}\Big[\int_a^b f^2(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx\Big] = 0$$

következik, tehát ekkor igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy $\int_a^b f^2$ és $\int_a^b g^2$ közül legalább az egyik 0-tól különböző, például $\int_a^b f^2 > 0$. Minden λ valós paraméter esetén az $F := (\lambda f + g)^2$ függvény integrálható $[a, b]$-n, és az integrálja nemnegatív, azaz

$$0 \le \int_a^b \big(\lambda f + g\big)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \qquad (\forall\, \lambda \in \mathbb{R}).$$

A jobb oldal λ-nak egy másodfokú polinomja, és ez a polinom minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén nemnegatív, ami csak úgy lehetséges, ha a diszkriminánsa ≤ 0, azaz

$$\Big(2\int_a^b fg\Big)^2 - 4\Big(\int_a^b f^2\Big)\Big(\int_a^b g^2\Big) \le 0,$$

amiből már következik az állítás. ■

M43. $I_0 = \int_0^1 1\,dx = 1$. Ha $n \ge 1$, akkor

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^2)(1 - x^2)^{n-1}\,dx = I_{n-1} - \int_0^1 x^2(1 - x^2)^{n-1}\,dx =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2}\int_0^1 x \cdot (-2x)(1 - x^2)^{n-1}\,dx =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2}\Big[x \cdot \frac{(1 - x^2)^n}{n}\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1 - x^2)^n}{n}\,dx = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n,$$

azaz

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ezért

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \blacksquare$$

M44. Végezze el az $x = 1 - t = g(t)$ $(t \in [0,1])$ helyettesítést. $\blacksquare$

M45. ...

M46. Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$B(m,n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx =$$

$$= \Big[\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1}\Big]_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} \, dx = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1).$$

Ezért

$$B(m,n) = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1) = \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdots \frac{1}{m+n} B(m+n, 0) =$$

$$= \frac{n!}{(m+1)\cdots(m+n)} \int_0^1 x^{m+n} \, dx = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}. \blacksquare$$

M47. Integráljon parciálisan. $\blacksquare$

M48. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}} \, dx \le \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{1}{4}.$

(b) Mivel $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ $(x \in [0, \frac{\pi}{2}])$, ezért

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{r \sin x}} \, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{r \frac{2}{\pi} x}} \, dx = \frac{\pi}{2r} \Big[-e^{-\frac{2r}{\pi}x}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2r}(1 - e^{-r}).$$

(c) Az integrálszámítás középértéktétele szerint létezik olyan $\xi \in [0,1]$, amellyel

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx = \sin \xi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \sin \xi \big[\operatorname{arctg} x\big]_0^1 = \frac{\pi}{4} \sin \xi \le \frac{\pi}{4} \sin 1 < 0,7.$$

(d) A Cauchy–Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{\int_0^1 (1+x^4)\,dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 1\,dx} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

(e) Legyen $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ $\big(x \in (0, \frac{\pi}{2})\big)$. Mivel $f'(x) = \frac{\cos x (x - \operatorname{tg} x)}{x^2}$ $\big(x \in (0, \frac{\pi}{2})\big)$ és $x \le \operatorname{tg} x$ minden $x \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ pontban (a tg függvény ui. konvex $(0, \pi/2)$-en és a grafikonjának az érintője a 0 pontban az $y = x$ egyenes), ezért f monoton csökkenő $(0, \pi/2)$-en, ezért

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = f\Big(\frac{\pi}{3}\Big)\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\Big) \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx \le f\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{6}. \blacksquare$$

M52. (a) Az integrandus folytonos, ezért az

$$F(x) := \int_2^x \sqrt{1+t^3}\,dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

integrálfüggvénye minden $x \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható és $F'(x) = \sqrt{1+x^3}$ $(x \in \mathbb{R})$, következésképpen

$$F'(2) = \lim_{h\to 2} \frac{F(2+h) - F(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3}\,dt = 3. \blacksquare$$

M55. (b) Jelölje M az $|f'|$ egy felső korlátját: $|f'(x)| \le M$ $(x \in [0,1])$. Legyen n egy rögzített természetes szám, és tekintsük a $[0,1]$ intervallum $\frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ osztópontokkal vett egyenletes felosztását. Ekkor

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx,$$

ezért

$$\triangle := \Big|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| = \Big|\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\,dx\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big[f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big]\,dx\Big| \le \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|\,dx.$$

Alkalmazzuk most az f függvényre a $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ intervallumon a Lagrange-féle középértéktételt: van olyan $\xi \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, amelyre

$$f(x) - f\big(\frac{k}{n}\big) = f'(\xi)\big(x - \frac{k}{n}\big).$$

Az f' korlátossága miatt

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big|f(x) - f\big(\frac{k}{n}\big)\big|\, dx \le M \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(\frac{k}{n} - t\big)\, dt = \frac{M}{2n^2}.$$

Ezért a

$$\triangle \le \frac{M}{2n^2} \cdot n = \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül. ∎

2.3. A határozott integrál alkalmazásai

2.4. Improprius integrálok

2.5. Kiegészítések a differenciálszámításhoz és az integrálszámításhoz

M76. Ha α nemnegatív egész szám, akkor a tagok bizonyos indextől kezdve 0-val egyenlők, így a sor konvergens. Ha α nem ilyen, akkor egyik együttható sem 0, ezért a D'Alembert-féle hányadoskritérium és

$$\binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1}\binom{\alpha}{k} \qquad (*)$$

alapján

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \cdot x\right| = \left|\frac{\alpha - k}{k+1}x\right| \to |x|, \quad \text{ha } k \to +\infty,$$

ezért a sor valóban konvergens minden $x \in (-1, 1)$ esetén.

Jelöljük f-fel a sor összegét:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \big(x \in (-1, 1)\big).$$

Megmutatjuk, hogy f hasonló deriválási szabály érvényes, mint az $(1+x)^\alpha$ $(|x|<1)$ függvényre. Erre a függvényre ugyanis

$$\Big((1+x)^\alpha\Big)' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad \text{azaz} \quad (1+x)\Big((1+x)^\alpha\Big)' = \alpha(1+x)^\alpha$$

teljesül minden $x\in(-1,1)$ pontban. Ehhez hasonlóan fennáll az

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x) \qquad \big(x\in(-1,1)\big) \tag{$**$}$$

egyenlőség. Ez a hatványsor deriválására vonatkozó állítás és $(*)$ felhasználásával így igazolható:

$$(1+x)f'(x) = (1+x)\sum_{k=1}^{+\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k\binom{\alpha}{k}x^{k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[(k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k}\right]x^k = \alpha\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = \alpha f(x).$$

Ebből most már az $f(x)=(1+x)^\alpha$ egyenlőség könnyen bizonyítható. Legyen ugyanis

$$g(x) := \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} \qquad \big(x\in(-1,1)\big).$$

A g függvény deriválható és $(**)$ miatt

$$g'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - f(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)f'(x) - \alpha f(x)}{(1+x)^\alpha} = 0,$$

ezért g állandó $(-1,1)$-en. Az $x=0$ pontban $g(1)=1$, ezért valóban fennáll az $f(x)=(1+x)^\alpha$ $(x\in(-1,1))$ egyenlőség. ■

M77. Az állítást az

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

integrálok kiszámításán keresztül látjuk be.

Világos, hogy

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

ha $n > 2$, akkor parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin^{n-2} x\,dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^{n-2} x \cdot \cos x\,dx =$$
$$= I_{n-2} - \left[\frac{\sin^{n-1}}{n-1}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-1} x}{n-1}\sin x\,dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n,$$

amiből

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

adódik.

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_0 \qquad (I_0 = \frac{\pi}{2}),$$
$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot I_1 \qquad (I_1 = 1).$$

Mivel minden n természetes számra

$$\sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \qquad (x \in (0, \pi/2)),$$

ezért

$$I_{2n+2} \le I_{2n+1} \le I_{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \le \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3} \le \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ebből

$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{2} \le \frac{2^2}{1^2}\cdot\frac{4^2}{3^2}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+1} \le \frac{\pi}{2}$$

M78. Az alapötlet az, hogy az $\int_0^n \ln x\,dx$ integrált, azaz az ln függvény $[1, n]$ intervallumon vett grafikonja alatti területet a beírt trapézok területének összegével közelítjük.

A szóban forgó integrál könnyen meghatározható:

$$\int_1^n \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_1^n = n\ln n - n + 1 = \ln n^n - \ln e^n + \ln e = \ln\left(e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right).$$

Tekintsük most az ln (konkáv!) függvény grafikonjába beírt azon töröttvonalat, amelynek szögpontjai a görbe $1, 2, \ldots, n$ abszcisszákhoz tartozó pontjai. Az e töröttvonal alatti síkidom területe egy háromszögnek és $(n-1)$ trapéznak a területéből tevődik össze, és az értéke:

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + \cdots + \frac{\ln(n-1) + \ln 2}{2} =$$
$$= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n - \frac{1}{2} \ln n = \ln\Big(\frac{n!}{\sqrt{n}}\Big),$$

ezért a területek különbsége:

$$\triangle_n := \ln\Big(e \cdot \big(\frac{n}{e}\big)^n\Big) - \ln\Big(\frac{n!}{\sqrt{n}}\Big) = \ln\left(\frac{e \cdot \big(\frac{n}{e}\big)^n \sqrt{n}}{n!}\right) > 0 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

($\triangle_n$ azért pozitív, mert az ln függvény konkáv az egész $\mathbb{R}^+$-on.) A geometriai tartalomból nyilvánvaló, hogy a $(\triangle_n)$ sorozat monoton növekedő. Egy szellemes geometriai megfontolásból az is következik, hogy a $(\triangle_n)$ sorozat felülről korlátos és $\triangle_n \leq \frac{\ln 2}{2}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért **a** $(\triangle_n)$ **sorozat konvergens**. Az exp függvény szigorúan monoton növekedő, ezért az

$$\frac{e^{\triangle_n}}{e} = \frac{\big(\frac{n}{e}\big)^n \sqrt{n}}{n!}$$

sorozat is konvergens, és a határértéke pozitív. A sorozat reciproka, tehát az

$$a_n := \frac{n!}{\big(\frac{n}{e}\big)^n \sqrt{n}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat is konvergens. Feladatunk a határértékének a kiszámolása.

Ehhez két **észrevételt** érdemes megjegyezni: egyrészt azt, hogy

$$0 < \lim(a_n) = \lim\Big(\frac{a_n^2}{a_{2n}}\Big),$$

ami az $\frac{a_n^2}{a_{2n}} = a_n \cdot \frac{a_n}{a_{2n}}$ és $\lim(a_n) = \lim(a_{2n})$ nyilvánvaló következménye. A másik észrevétel az, hogy $\frac{a_n^2}{a_{2n}}$ a Wallis-formulával hozható kapcsolatba:

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{\big[n!\big]^2}{\big(\frac{n}{e}\big)^{2n} n} \cdot \frac{\big(\frac{2n}{e}\big)^{2n} \sqrt{2n}}{(2n)!} = \frac{\big[2^n n!\big]^2}{(2n)!} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} =$$
$$= \frac{\big[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)\big]^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdot (2n)} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}.$$

A Wallis-formula alapján

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ezért

$$\lim(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}=\lim\left(\frac{a_n^2}{a_{2n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot 2=\sqrt{2\pi},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}=1. \quad \blacksquare$$

M79. Elég igazolni azt, hogy π^2 irracionális. Ezt indirekt módon látjuk be. Ha π^2 racionális lenne, akkor léteznének olyan $p, q\in\mathbb{N}$ számok, amelyre $\pi^2=\frac{p}{q}$ teljesülne. Vegyünk most egy olyan $n\in\mathbb{N}$ számot, amelyre

$$\pi p^n < n!$$

(ilyen van, miért?), és tekintsük az

$$f(x):=\frac{x^n(1-x)^n}{n!} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvényt. Az inderekt feltételt felhasználva parciális integrálással mutassa meg, hogy

$$A:=\pi p^n\int_0^1 f(x)\sin\pi x\,dx$$

egy *egész* szám. Ez viszont ellentmondás, mert

$$0<A=\frac{\pi p^n}{n!}\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx\le\frac{\pi p^n}{n!}<1. \quad \blacksquare$$