# Többváltozós analízis
# (gyakorló feladatok)

Programtervező matematikus szakos hallgatóknak
az Analízis 4. című tárgyhoz

2005. tavaszi félév

# 1. Metrikus terek

## • A metrikus tér fogalma. Példák

**F1.** Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\begin{aligned}
\rho_1(x,y) &:= (x-y)^2\,;\\
\rho_2(x,y) &:= \sqrt{|x-y|}\,;\\
\rho_3(x,y) &:= \left|x^2-y^2\right|;\\
\rho_4(x,y) &:= |x-2y|\,;\\
\rho_5(x,y) &:= \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,.
\end{aligned}$$

Döntse el mindegyik függvényről, hogy metrika-e vagy sem.

**F2.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton növekedő függvény és

$$\rho(x,y) := \big|f(x) - f(y)\big| \qquad (x,y \in \mathbb{R})\,.$$

Bizonyítsa be, hogy $\rho$ metrika az $\mathbb{R}$ halmazon. Ha $f(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor a „szokásos” metrikát kapjuk. Mutassa meg, hogy az $f(x) := \operatorname{arctg} x$ $(x \in \mathbb{R})$ választás is lehetséges, és az ezzel képzett metrikában bármelyik két $\mathbb{R}$-beli elem távolsága $< \pi$.

**F3.** Legyen $\rho(n,m) := \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$ $(n,m \in \mathbb{N})$. Igazolja, hogy a $\rho$ függvény metrika az $\mathbb{N}$ halmazon.

**F4.** Legyen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, és definiáljuk $\rho$-t a következőképpen:

$$\rho(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}, & \text{ha } x,y \in \mathbb{R}\\ \rho(y,x) := 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R},\ y = \pm\infty\\ \rho(-\infty,+\infty) := 1, & \text{ha } x = +\infty,\, y = -\infty\\ 0, & \text{ha } x = y = \pm\infty. \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy $\rho$ metrika az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon.

**F5.** Jelöljük $M$-mel azoknak a valós sorozatoknak a halmazát, amelyeknek mindegyik tagja természetes szám. A $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen értelmezzük: $\rho\big((x_n),(y_n)\big) := 0$, ha $(x_n) = (y_n) \in M$, és $\rho\big((x_n),(y_n)\big) := \frac{1}{N+1}$, ha a két sorozat különböző és $N$ a legkisebb olyan index, amire $x_N \neq y_N$. Lássa be, hogy $\rho$ metrika $M$-en.

**F6.** Tegyük fel, hogy $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ olyan monoton növekedő függvény, amelyre $f(x) = 0 \iff x = 0$ és $f(x + y) \le f(x) + f(y) \quad (x, y \ge 0)$. Bizonyítsa be, hogy ha $\rho$ metrika a nemüres $M$ halmazon, akkor $f \circ \rho$ is az.

**F7.** Igazolja, hogy az $f(x) = \sqrt{x}$; $\dfrac{x}{1+x}$; $\ln(1 + x)$ $(x \ge 0)$ függvények eleget tesznek az előző feladat feltételeinek. Következésképpen, ha $\big(M, \rho\big)$ metrikus tér, akkor

$$\big(M, \sqrt{\rho}\big), \quad \Big(M, \frac{\rho}{1+\rho}\Big) \text{ és } \big(M, \ln(1+\rho)\big)$$

is az.

**F8.** Legyen $(M, \rho)$ metrikus tér és $H$ olyan (nem üres) halmaz, hogy van egy $f : H \to M$ bijekció. Mutassa meg, hogy ekkor a

$$\sigma(x, y) := \rho\big(f(x), f(y)\big) \qquad (x, y \in H)$$

függvény metrika a $H$ halmazon.

**F9.** Bizonyítsa be, hogy az $x = (x_n)$ valós sorozatok $M$ halmazában a

(a) $\rho(x, y) := \sup\Big\{\dfrac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \;\Big|\; n \in \mathbb{N}\Big\} \quad (x, y \in M)$;

(b) $\rho(x, y) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad (x, y \in M)$

függvény mindegyike metrika.

**F10.** Tegyük fel, hogy $\rho_1$ és $\rho_2$ metrika a nemüres $M$ halmazon. Igaz-e az, hogy

(a) $\rho_1 + \rho_2$;

(b) $\rho_1 \cdot \rho_2$;

(c) $M \times M \ni (x, y) \mapsto \max\big\{\, \rho_1(x, y),\ \rho_2(x, y) \,\big\}$;

(d) $M \times M \ni (x, y) \mapsto \min\big\{\, 1,\ \rho_1(x, y) \,\big\}$

metrika $M$-en?

**F11.** Két síkbeli kör távolságát definiáljuk a szimmetrikus differencia területeként. Igazolja, hogy így metrikát kapunk a síkbeli körök halmazán.

- **Az axiómák néhány egyszerű következménye**

**F12.** Legyen $M$ egy nemüres halmaz és $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyikre minden $x, y, z \in M$ esetén
(i) $\rho(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$;
(ii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$.
Mutassa meg, hogy $\rho$ metrika az $M$ halmazon.

**F13.** Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $(M, \rho)$ metrikus térben igazak a *háromszög-egyenlőtlenség* alábbi változatai is:
(a) Tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ elemekre $(n \geq 2)$

$$\rho\big(x_1, x_n\big) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \rho\big(x_k, x_{k+1}\big).$$

(b) Minden $x, y, z \in M$ esetén

$$\big|\rho(x, z) - \rho(y, z)\big| \leq \rho(x, y).$$

**F14.** Vezessük be a nemüres $M$ halmazon a *félmetrika fogalmát* úgy, hogy a metrika definíciójából kihagyjuk a $\rho(x, y) = 0 \;\Rightarrow\; x = y$ feltételt. (Ekkor $(M, \rho)$-t *félmetrikus térnek* nevezzük.)
(a) Mutassa meg, hogy $x \sim y \;\Leftrightarrow\; \rho(x, y) = 0$ módon értelmezett reláció ekvivalencia reláció $M$-en.
(b) Jelöljük $\widehat{x}$-pal az $x \in M$ elem által generált ekvivalenciaosztályt. Bizonyítsa be, hogy

$$\widehat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) := \rho(x, y)$$

metrika lesz az ekvivalenciaosztályok halmazán.
Alkalmazza a feladatot az $M := R[0, 1]$, $\rho(f, g) := \int_0^1 |f - g|$ $(f, g \in M)$ esetre.

- **Környezetek, korlátos halmazok**

**F15.** Legyen $(M, \rho)$ egy metrikus tér, $a \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. A

$$k_r(a) := k_r^{\rho}(a) := \big\{\, x \in M \mid \rho(x, a) < r \,\big\}$$

halmazt az $a \in M$ *pont* $r$*-sugarú környezetének* vagy $r$*-sugarú* $a$ *középpontú nyílt gömbnek* nevezzük. Bizonyítsa be, hogy minden $a, b \in M$, $a \neq b$ esetén létezik olyan $r > 0$ szám, amellyel

$$k_r(a) \cap k_r(b) = \emptyset.$$

*Útmutatás.* Legyen $0 < r < \frac{\rho(a,b)}{2}$. Ha létezik $x \in k_r(a) \cap k_r(b)$, akkor a háromszögegyenlőtlenség alapján

$$\rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(x,b) < r + r < \rho(a,b),$$

és ez ellentmondás. ■

**F16.** Mutasson példát olyan metrikus térre, amelyben van olyan gömb, amelyik tartalmaz egy nagyobb sugarú valódi részgömböt.

*Útmutatás.* Legyen $M := (-4, 4]$ és $\rho(x,y) := |x-y|$ $(x, y \in M)$. Ekkor $k_4^\rho(4) \subset k_3^\rho(2)$. ■

**F17.** Az $(M, \rho)$ metrikus tér $A \subset M$ részhalmazát *korlátosnak* nevezzük, ha van olyan $M$-beli gömb, ami $A$-t tartalmazza, azaz

$$\exists\, a \in M \ \text{ és } \ \exists\, r > 0 \ \text{ valós szám, hogy } \ A \subset k_r^\rho(a).$$

Bizonyítsa be, hogy az $(M, \rho)$ metrikus tér $A \subset M$ részhalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha

$$\forall\, b \in M \ \text{ elemhez } \ \exists\, R > 0 \ \text{ valós szám, hogy } \ A \subset k_R^\rho(b).$$

*Útmutatás.* $\boxed{\Leftarrow}$ nyilvánvaló.
$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy $A \subset k_r(a)$. Legyen $b \in M$ egy tetszőleges elem és $R := \rho(a,b) + r$. Ekkor $A \subset k_R(b)$ is igaz, mert ha $x \in A$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\rho(x,b) \leq \rho(x,a) + \rho(a,b) < r + \rho(a,b) = R$$

is teljesül, tehát $x \in k_R(b)$ is fennáll. ■

**F18.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $1 \leq p \leq +\infty$. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz esetén jelölje $H_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a $H$ halmaz $i$-edik koordinátáiból álló $\mathbb{R}$-beli halmaz. Lássa be, hogy a $H$ halmaz pontosan akkor korlátos az $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ metrikus térben, ha mindegyik $H_i$ korlátos $\mathbb{R}$-ben.

**F19.** Legyen $\Phi$ a $C[0,1]$ függvényhalmaznak az a részhalmaza, amelyik pontosan az alábbi módon értelmezett $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvényeket tartalmazza:

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n^2\left(\frac{1}{n} - x\right), & \text{ha } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Igazolja, hogy

(a) a $\Phi \subset C[0,1]$ halmaz *nem korlátos* a $\big(C[0,1], \rho_\infty\big)$ metrikus térben;

(b) a $\Phi \subset C[0,1]$ halmaz *korlátos* a $\big(C[0,1], \rho_1\big)$ metrikus térben.

*Útmutatás.* **(a)** Az **F17.** feladat szerint az, hogy a $\Phi \subset C[0,1]$ halmaz *nem* korlátos a $\big(C[0,1], \rho_\infty\big)$ metrikus térben azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \exists\, F \in C[0,1], \text{ hogy } \forall\, R > 0 \text{ valós szám esetén } \Phi \not\subset k_R^{\rho_\infty}(F).$$

Nem nehéz *észrevenni*, hogy a megadott $\Phi$ halmazhoz a $[0,1]$-en azonosan nulla $F$ függvényre $(*)$ teljesül. Ennek igazolásához először azt jegyezzük meg, hogy a definícó alapján

$$g \in k_R^{\rho_\infty}(F) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big|g(x)\big| \le R \quad (x \in [0,1]).$$

Azonban

$$\rho_\infty(F, f_n) = \max_{x \in [0,1]} \big|f_n(x)\big| = n,$$

és ez azt jelenti, hogy adott $R > 0$ esetén az $f_n \in \Phi$, $n > R$ függvény például nem eleme $k_R^{\rho_\infty}(F)$-nek, így $(*)$ valóban igaz.

**(b)** A korlátosság definíciójából és az $\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ egyenlőségekből következik, hogy $\Phi \subset k_1^{\rho_1}(F)$, ahol $F(x) = 0$ $(x \in [0,1])$. ■

**F20.** Az $(M, \rho)$ metrikus tér $A \subset M$ részhalmazának *átmérőjét* így értelmezzük:

$$\operatorname{diam} A := \sup \big\{\, \rho(x,y) \mid x, y \in A \,\big\}.$$

Mutassa meg, hogy

(a) $0 \le \operatorname{diam} A \le +\infty$ minden $A \subset M$ halmazra;

(b) a sup helyett max nem vehető;

(c) az $A \subset M$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha $\operatorname{diam} A < +\infty$.

**F21.** Bizonyítsa be, hogy az $(M, \rho)$ metrikus tér egy $H \subset M$ korlátos halmazának minden $G \subset H$ részhalmaza is korlátos és $\operatorname{diam} G \le \operatorname{diam} H$.

## • Ekvivalens metrikák

**F22.** Legyen $M$ egy nem üres halmaz, és tegyük fel, hogy $\rho_1$ és $\rho_2$ ekvivalens metrikák $M$-en. Mutassa meg, hogy

(a) $\forall\, a \in M$ és $\forall\, r_1 > 0$ számhoz $\exists\, r_2 > 0$: $k_{r_2}^{\rho_2}(a) \subset k_{r_1}^{\rho_1}(a)$;

(b) $\forall\, a \in M$ és $\forall\, r_2 > 0$ számhoz $\exists\, r_1 > 0$: $k_{r_1}^{\rho_1}(a) \subset k_{r_2}^{\rho_2}(a)$.

*Útmutatás.* A $\rho_1$ és $\rho_2$ ekvivalenciája azt jelenti, hogy $\exists\, c_1, c_2 > 0$, hogy

$$c_1 \rho_2(x,y) \le \rho_1(x,y) \le c_2 \rho_2(x,y) \qquad (\forall\, x, y \in M).$$

Legyen $r_2 := \frac{r_1}{c_2}$ és $x \in k_{r_2}^{\rho_2}(a)$. Ekkor $\rho_2(x,a) < r_2$, ezért

$$\rho_1(x,a) \le c_2 \rho_2(x,a) < c_2 r_2 = r_1.$$

Ez azt jelenti, hogy $x \in k_{r_1}^{\rho_1}$ is teljesül, tehát $k_{r_1}^{\rho_1}(a) \subset k_{r_2}^{\rho_2}(a)$. ■

**F23.** Bizonyítsa be, hogy a nemüres $M$ halmazon értelmezett $\rho_1$ és $\rho_2$ metrikák *nem* ekvivalensek, ha van olyan $A \subset M$ halmaz, amelyik korlátos az $(M, \rho_1)$ metrikus térben, de nem korlátos az $(M, \rho_2)$ metrikus térben.

*Útmutatás.* Először gondolja meg azt, hogy ha a két metrika ekvivalens, akkor az $(M, \rho_1)$ és $(M, \rho_2)$ metrikus terekben ugyanazok a korlátos halmazok. Ezt felhasználva az állítást indirekt módon igazolja. ■

**F24.** Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ halmazon $(n \in \mathbb{N})$ bevezetett $\rho_p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ metrikák egymással ekvivalensek. Adjon meg $\mathbb{R}^n$-en olyan metrikát, amelyik nem ekvivalens – például – a $\rho_\infty$ metrikával.

*Útmutatás.* Elég igazolni (miért?), hogy minden $p \in [1, +\infty)$ esetén $\rho_p$ és $\rho_\infty$ ekvivalensek. Ez viszont következik a

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_k| \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n} \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| \qquad \big(a_k \in \mathbb{R}\big)$$

egyenlőtlenségből.
Az $\mathbb{R}^n$-en vett *diszkrét* metrika nem ekvivalens $\rho_\infty$-nel (miért?). ■

**F25.** Bizonyítsa be, hogy a $C[0, 1]$ halmazon értelmezett $\rho_\infty$ és $\rho_1$ metrikák *nem ekvivalensek.*

*Útmutatás.* **1. lehetőség.** Világos, hogy

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f - g| \leq \max |f - g| = \rho_\infty(f, g) \qquad (f, g \in C[0, 1]).$$

A fordított irányú egyenlőtlenség, vagyis az, hogy létezik olyan $c > 0$ valós szám, hogy

$$\rho_\infty(f, g) \leq c\, \rho_1(f, g) \qquad (f, g \in C[0, 1])$$

azonban nem igaz. Ezt indirekt módon láthatjuk be. Azt kell megmutatni, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz léteznek olyan $f_n, g_n \in C[0, 1]$ függvények, amelyekre $\rho_\infty(f_n, g_n) > n\, \rho_1(f_n, g_n)$. Tekintsük most minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $g_n(x) = 0$ $(x \in [0, 1])$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2\big(\frac{1}{n} - x\big), & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

függvényeket.

**2. lehetőség.** Az állítás az **F19.** és az **F23.** feladatok eredményeinek felhasználásával is igazolható. ■

## • Konvergens sorozatok metrikus terekben. Teljes metrikus terek

**F26.** Az $(M, \rho)$ metrikus tér egy $(a_n) : \mathbb{N} \to M$ sorozaata **konvergens**, ha

$$\exists\, \alpha \in M, \quad \text{hogy} \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \text{esetén} \quad a_n \in k_\varepsilon^\rho(\alpha).$$

Az $(a_n)$ sorozat **divergens**, ha nem konvergens.
Mutassa meg, hogy ha van ilyen $\alpha \in M$, akkor az egyértelműen meghatározott. Ezt az $\alpha$-t az $(a_n)$ **sorozat határértékének** nevezzük, és így jelöljük:

$$\lim{(a_n)} \stackrel{\rho}{=} \alpha \qquad \text{vagy} \qquad a_n \stackrel{\rho}{\to} \alpha \quad (n \to +\infty).$$

*Útmutatás.* A valós esethez hasonlóan indirekt módon igazoljuk az állítást: Tegyük fel, hogy $\alpha$-ra és $\overline{\alpha}$-ra $\alpha \neq \overline{\alpha}$ is teljesül a fenti tulajdonság. Legyen $\varepsilon := \frac{\rho(\alpha,\overline{\alpha})}{4}$. Ekkor

$$k_\varepsilon(\alpha) \cap k_\varepsilon(\overline{\alpha}) = \emptyset$$

(l. a **F15.** feladatot). Ekkor $\alpha$-nak is és $\overline{\alpha}$-nak is az $\varepsilon$-sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van; és ez ellentmondás. ■

**F27.** Az $(M, \rho)$ metrikus térben legyen adott egy konvergens $(a_n)$ sorozat. Igazolja, hogy ha $\alpha := \lim(a_n)$, akkor bármely $x \in M$ esetén a $\big(\rho(a_n, x)\big)$ számsorozat konvergens, és

$$\lim\big(\rho(a_n, x)\big) = \rho(\alpha, x).$$

*Útmutatás.* Alkalmazza a $\big|\rho(a_n, x) - \rho(\alpha, x)\big| \leq \rho(a_n, \alpha)$ egyenlőtlenséget. ■

**F28.** Melyek a konvergens sorozatok a diszkrét metrikus térben. Teljes-e a diszkrét metrikus tér?

**F29.** Tegyük fel, hogy az $M \neq \emptyset$ halmazon értelmezett $\rho_1$ és $\rho_2$ metrikák *ekvivalensek*. Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \to M$. Lássa be, hogy

(a) $\lim{(a_n)} \stackrel{\rho_1}{=} \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim{(a_n)} \stackrel{\rho_2}{=} \alpha$, azaz ekvivalens metrikák esetén egy sorozat konvergenciája és a határértéke nem változik akkor, ha az egyik metrikát a másikkal felcseréljük; másképp fogalmazva: ekvivalens metrikák esetén ugyanazok a konvergens sorozatok.

(b) az $(a_n)$ sorozat akkor és csak akkor Cauchy-sorozat az $\big(M, \rho_1\big)$ metrikus térben, ha az $\big(M, \rho_2\big)$ metrikus térben is az.

**F30.** Mutassa meg, hogy abból, hogy az $(M, \rho_1)$ és $(M, \rho_2)$ metrikus terekben ugyanazok a konvergens sorozatok nem következik, hogy a $\rho_1$ és a $\rho_2$ metrikák ekvivalensek.

*Útmutatás.* Legyen $M := \mathbb{N}$, $\rho_1$ a *diszkrét*, $\rho_2(x,y) := |x-y|$ $(x,y \in \mathbb{N})$ pedig a „szokásos" metrika. Az $(\mathbb{N}, \rho_1)$ és $(\mathbb{N}, \rho_2)$ metrikus terekben pontosan a kvázikonstans sorozatok (egy indextől kezdve azonos értékeket felvevő sorozatok) konvergensek. Ez a két metrika azonban nem ekvivalens. ■

**F31.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $1 \le p \le +\infty$. Ekkor az

$$\big(a_k\big) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, \qquad a_k := \big(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(n)}\big) \in \mathbb{R}^n$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens az $\big(\mathsf{R}^n, \rho_p\big)$ metrikus térben, és

$$\lim \big(a_k\big) \overset{\rho_p}{=} \alpha = \big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}\big),$$

ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén az $\big(a_k^{(i)}\big)_{k \in \mathbb{N}}$ valós sorozat (az $i$-edik koordinátasorozat) konvergens, és

$$\lim_{k \to +\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)}.$$

**F32.** Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az $\big(\mathbb{R}^2, \rho_p\big)$ $(1 \le p \le +\infty)$ metrikus terekben az alábbi sorozatokat

(a) $a_k := \Big(\frac{1}{2^k}, \big(1 + \frac{1}{k}\big)^k\Big) \in \mathbb{R}^2 \quad (k \in \mathbb{N})$;

(b) $a_k := \big((-1)^k, \frac{1}{k}\big) \in \mathbb{R}^2 \quad (k \in \mathbb{N})$.

**F33.** Bizonyítsa be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $1 \le p \le +\infty$ esetén az $\big(\mathsf{R}^n, \rho_p\big)$ *teljes metrikus tér*, azaz a tér minden Cauchy-sorozata konvergens.

*Útmutatás.* Mivel $\mathbb{R}^n$-en a $\rho_p$ $(1 \le p \le +\infty)$ metrikák ekvivalensek, ezért az állítást elég $p = +\infty$ esetére igazolni.
Tegyük fel, hogy $a_k := \big(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(n)}\big) \in \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat $\big(\mathsf{R}^n, \rho_\infty\big)$-ben, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\text{ számhoz }\; \exists\, k_0 \in \mathbb{N}: \;\; \rho_\infty(a_k, a_l) = \max_{1 \le i \le n} \big|a_k^{(i)} - a_l^{(i)}\big| < \varepsilon$$

minden $k, l \ge k_0$ indexre. Ekkor persze minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén

$$\big|a_k^{(i)} - a_l^{(i)}\big| < \varepsilon \qquad (\forall\, k, l \ge k_0)$$

is teljesül, ami azt jelenti, hogy az $i$-edik koordináták $\big(a_k^{(i)}\big)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozata $\mathbb{R}$-beli Cauchy-sorozat is, következésképpen konvergens. Legyen

$$\alpha^{(i)} := \lim_{k \to +\infty} a_k^{(i)} \in \mathbb{R} \;\; (i = 1, 2, \dots, n) \qquad \text{és} \qquad \alpha := \big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}\big) \in \mathbb{R}^n.$$

Bizonyítsa be, hogy az $(a_k)$ sorozat a $\rho_\infty$ metrikában $\alpha$-hoz tart, azaz az $(a_k)$ Cauchy-sorozat konvergens. ■

**F34.** Igaz-e minden metrikus térben a *Bolzano–Weierstrass-féle* kiválasztási tétel, azaz az, hogy minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata?

*Útmutatás.* Nem. Például az $(\mathsf{N}, \rho)$ *diszkrét* metrikus térben az $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat korlátos, de nincs konvergens részsorozata. ■

**F35.** Mutassa meg, hogy az $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ metrikus terekben $(n \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le +\infty)$ igaz a *Bolzano–Weierstrass-féle* kiválasztási tétel, azaz minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

**F36.** Adjon meg a $(C[0,1], \rho_\infty)$ metrikus térben olyan korlátos $(f_n)$ sorozatot, aminek nincs konvergens részsorozata.

*Útmutatás.* Tekintse az

$$f_n(x) := \sin(2^n \pi x) \qquad (x \in [0,1],\quad n = 0,1,2,\ldots)$$

függvénysorozatot. Mutassa meg, hogy $\rho_\infty(f_n, f_m) \ge 1$, ha $n \ne m$. ■

**F37.** Bizonyítsa be, hogy a

(a) $(C[a,b], \rho_\infty)$ metrikus tér *teljes*;

(b) $(C[a,b], \rho_1)$ metrikus tér *nem teljes*.

*Útmutatás.* **(a)** Legyen $(f_n)$ egy $(C[a,b], \rho_\infty)$ térbeli Cauchy-sorozat:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ számhoz } \ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}: \ \forall\, k, l \ge k_0 \ \text{ esetén } \ \rho_\infty(f_k, f_l) = \max_{x \in [a,b]} \big|f_k(x) - f_l(x)\big| < \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy minden $x \in [a,b]$ pontban az $(f_k(x))$ számsorozat Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben, következésképpen konvergens. Legyen

$$f(x) := \lim_{k \to +\infty} f_k(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Így értelmeztünk egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt. (Ezt az $(f_n)$ függvénysorozat **pontonkénti határfüggvényének** nevezzük.) Az

$$\big|f_k(x) - f_l(x)\big| < \varepsilon \quad \big(k, l \ge k_0,\quad x \in [a,b]\big)$$

egyenlőtlenségekben rögzített $k$ esetén az $l \to +\infty$ határátmenetet véve adódik $f$-re az

$$\big|f_k(x) - f(x)\big| < \varepsilon \quad \big(k \ge k_0,\quad x \in [a,b]\big)$$

egyenlőtlenség. Ezt és az $f_k$ függvények folytonosságát felhasználva mutassa meg, hogy az $f$ függvény folytonos $[a,b]$-en, és $(f_n)$ a $\rho_\infty$ metrikában $f$-hez konvergál.

**(b)** Az állítást az $[a,b] := [-1,1]$ intervallumra igazoljuk. Azt kell megmutatni, hogy van olyan $(f_n) : \mathbb{N} \to C[-1,1]$ függvénysorozat, ami a $\rho_1$ metrikában Cauchy-sorozat, de ebben a metrikában nem konvergens. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx & \text{ha } -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ \ \ 1, & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Ha $l > k$, akkor $\int_{-1}^{1} |f_k - f_l| = \frac{1}{k} - \frac{1}{l} = \frac{l-k}{l \cdot k} \leq \frac{1}{k}$. (Készítsen ábrát! A szóban forgó integrál két egybevágó háromszög területének az összege. A háromszög egyik oldala $\frac{1}{k} - \frac{1}{l}$, a magassága pedig $1$.) Ebből következik, hogy $(f_n)$ Cauchy-sorozat a $\rho_1$ metrikában.
Mutassa meg, hogy tetszőleges $f \in C[-1, 1]$ függvényre

$$\int_{-1}^{1} \left|f - \operatorname{sign}\right| > 0,$$

és ezt felhasználva indirket módon lássa be, hogy az $(f_n)$ függvénysorozat nem konvergens a $\rho_1$ metrikában.

Adjon meg *tetszőleges* $[a, b]$ intervallum esetén olyan $(f_n) : [a, b] \to C[a, b]$ függvénysorozatot, amelyik a $\big(C[a, b], \rho_1\big)$ metrikus térben Cauchy-sorozat, de nem konvergens. ■

**F38.** Konvergensek-e a $\big(C(I), \rho_\infty\big)$, illetve a $\big(C(I), \rho_1\big)$ metrikus terekben az alábbi függvénysorozatok:

(a) $f_n(x) := x^n \quad \big(x \in I := [0, 1],\ n \in \mathbb{N}_0\big)$;

(b) $f_n(x) := x^n \quad \big(x \in I := [0, \frac{1}{2}],\ \ n \in \mathbb{N}_0\big)$;

(c) $f_n(x) := \frac{1}{x+n} \quad \big(x \in I := [0, 2],\ n = 1, 2, 3, \ldots\big)$;

(d) $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \big(x \in I := [0, 2],\ n = 1, 2, 3, \ldots\big)$;

(e) $f_n(x) := x^n - x^{n+1} \quad \big(x \in I := [0, 1],\ n \in \mathbb{N}_0\big)$?

## • Topológiai fogalmak metrikus terekben

**F39.** Legyen $(M, \rho)$ metrikus tér és $A \subset M$. Mutassa meg, hogy $A$ akkor és csak akkor zárt, ha minden $(a_n) : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim(a_n) \in A$.

**F40.** Adjon példát a $(0, 1)$ intervallum olyan nyílt lefedésére, amelyikből nem választható ki véges lefedőrendszer.

**F41.** Tekintsük a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát metrikus térnek, a $\rho(x, y) := |x - y|$ távolságfüggvénnyel. Legyen $A$ mindazon $x \in \mathbb{Q}$ számok halmaza, amelyekre $2 < x^2 < 3$ teljesül. Lássa be, hogy $A$ zárt és korlátos $\mathbb{Q}$-ban, de nem kompakt. Igaz-e, hogy $A$ nyílt $\mathbb{Q}$-ban?

**F42.** Igazolja, hogy ha $(M, \rho)$ nem teljes metrikus tér, akkor van benne olyan korlátos és zárt halmaz, amelyik nem kompakt.

**F43.** Legyen $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz, $(M, \rho)$ egy metrikus tér és $A_\gamma \subset M$ kompakt halmaz $(\gamma \in \Gamma)$. Bizonyítsa be, hogy ekkor $\bigcap_{g \in \Gamma} A_\gamma$ kompakt, és hogy véges $\Gamma$ esetén $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ is kompakt.

**F44.** Mutassa meg, hogy kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt.

**F45.** Tekintsük a $\big(C[0,1], \rho_\infty\big)$ metrikus teret. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Jelölje $A$ azon legfeljebb $n$-edfokú polinomok halmazát, amelyek együtthatói legfeljebb $1$ abszolút értékűek. Mutassa meg, hogy $A$ kompakt. (Általában, ha az együtthatók halmaza kompakt $\mathbb{R}^n$-ben, akkor a polinomok halmaza is kompakt.)

**F46.** Legyen $(M, \rho)$ metrikus tér és $\emptyset \neq A \subset M$. Bizonyítsa be, hogy az $(A, \rho|_{A\times A})$ metrikus térben pontosan azok a nyílt halmazok, amelyek előállnak egy, az eredeti térben nyílt halmaznak az $A$-val való metszeteként.

**F47.** Legyen $(M, \rho)$ metrikus tér, $x \in M$ és $A \subset M$. Definiáljuk *pont és halmaz távolságát* a következőképpen

$$\rho(x, A) := \inf \big\{ \rho(x, a) \ : \ a \in A \big\}.$$

Mutassa meg, hogy *kompakt* $A$ halmaz esetén a halmaz távolsága „felvétetik", azaz létezik olyan $a^* \in A$, amelyre $\rho(x, A) = \rho(x, a^*)$. Másként fogalmazva: $A$-ban van $x$-hez legközelebbi elem.

*Útmutatás.* Legyen $d := \inf \big\{ \rho(x, a) \ : \ a \in A \big\}$. Az infimum definíciójából következik, hogy van $A$-ban olyan $(a_n)$ sorozat, amelyre $\rho(a_n, x) \to d$, ha $n \to +\infty$. Mivel $A$ kompakt, ezért $(a_n)$-nek van olyan konvergens $(a_{n_k})$ részsorozata, amelyiknek az $a^*$ határértéke $A$-ban van. Megmutatjuk, hogy $\rho(x, A) = d = \rho(x, a^*)$. Valóban, a háromszög-egyenlőtlenség miatt $\rho(x, a^*) \leq \rho(x, a_n) + \rho(a_n, a^*)$. A bal oldal itt $n$-től független, a jobb oldal pedig $n \to +\infty$ esetén $d$-hez tart, ezért $\rho(x, a^*) \leq d$. Másrészt $a^* \in A$, így $\rho(x, a^*) \geq d$ is igaz, tehát $\rho(x, a^*) = d$. ■

# 2. Metrikus terek közötti leképezések folytonossága

**F48.** Szemléltesse a síkon azoknak az $(x, y)$ koordinátájú pontoknak a legbővebb halmazát, amelyekre az alábbi kifejezések értelmezhetők:

(a) $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$; (b) $\sqrt{x^2 - y^2}$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; (d) $\dfrac{1}{4 - x^2 - y^2}$;

(e) $\ln(x + y)$; (f) $\sqrt{xy}$;

(g) $\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$; (h) $\arcsin(y - x)$.

**F49.** Határozza meg az alábbi $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeknek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit (*szintvonalait*). Szemléltesse az $(x, y)$ síkon a szintvonalakat. Alkalmas síkmetszetek alapján állapítsa meg, hogy milyen felülettel szemléltethető a függvény az $(x, y, z)$ térbeli koordináta-rendszerben. Készítsen ábrát a felületről.

(a) $f(x, y) := x^2 + y^2 \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(b) $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(c) $f(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\big)$;

(d) $f(x, y) := y^2 - 2x \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(e) $f(x, y) := \sqrt{x + y} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \geq 0\big)$;

(f) $f(x, y) := e^{x+y} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(g) $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(h) $f(x, y) := xy \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(i) $f(x, y) := \cos(x + \sqrt{3}y) \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(j) $f(x, y) := \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\big)$;

(k) $f(x, y) := \sqrt{2x^2 + 3y^2} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(l) $f(x, y) := \dfrac{1}{2x^2 + 3y^2} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\big)$.

**F50.** Jelölje $x_i$ az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor $i$-edik koordinátáját. Mutassa meg, hogy a

$$P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad P_i(x) := x_i$$

projekció folytonos.

**F51.** Mit jelent az, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f'$ pontban $A \in \mathbb{R}$ a határértéke? Mi ennek a szemléletes jelentése?

**F52.** Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f'$. Mutassa meg, hogy ha vannak olyan

$$\big(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}\big) \in \mathcal{D}_f \qquad \big(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}\big) \in \mathcal{D}_f \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatok, amelyekre a függvényértékek sorozatainak a határértékei különbözők, akkor $f$-nek $(x_0, y_0)$-ban nincs határértéke.

**F53.** Legyen

$$f(x, y) := \frac{x - y}{x + y} \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq -y\big).$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $\exists \lim\limits_{x \to 0} \big(\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)\big)$;

(b) $\exists \lim\limits_{y \to 0} \big(\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)\big)$;

(c) $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f$.

**F54.** Igazolja az előző feladatbeli állításokat az

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

függvényre.

**F55.** Mutassa meg, hogy ha

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = y = 0 \end{cases}$$

akkor

(a) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x,y)$ függvény folytonos;

(b) minden $y \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x,y)$ függvény folytonos;

(c) $f$ nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

**F56.** Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = y = 0 \end{cases}$$

függvény nem folytonos az origóban, de „minden az origon átmenő egyenes mentén folytonos".

**F57.** Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallumok, és $g : I \to \mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Mutassa meg, hogy az $F(x) := \big(f(x), g(x)\big)$ $(x \in I)$ függvény is folytonos.

**F58.** Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket.

(a) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(6,3)} xy\cos(x-2y)$;

(c) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$;

(e) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$;

(f) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

(g) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(h) $\displaystyle\lim_{(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

**F59.** Folytonosak-e az alábbi függvények?

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 1, & \text{ha } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**F60.** Egyenletesen folytonosak-e az értelmezési tartományukon az alábbi függvények:

(a) $f(x,y) := 2x - 3y + 5 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(b) $f(x,y) := \sin(x^2+y^2) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(c) $f(x,y) := e^{-|y|}\cos(x^2+y^2) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(d) $f(x,y) := \sin\dfrac{\pi}{1-x^2-y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2+y^2 < 1\big)$;

# 3. Normált-, Banach-, euklideszi- és Hilbert terek

**F61.** Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ téren értelmezett bármely két norma ekvivalens egymással.

*Útmutatás.* Elég igazolni (miért?), hogy ha $\|\cdot\|$ egy tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-en, akkor ez ekvivalens a $\|\cdot\|_\infty$ maximum-normával, azaz léteznek olyan $m$ és $M$ pozitív valós számok, hogy

$$(*) \qquad m\|x\|_\infty \le \|x\| \le M\|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolása: Jelölje $e_1, e_2, \dots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ térbeli „szokásos” bázist, azaz $e_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$ $i$-edik koordinátája $1$, a többi $0$. A tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ vektor felírható az $x = \sum\limits_{k=1}^n x_k e_k$ alakban, így

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^n x_k e_k\right\| \le \sum_{k=1}^n \|x_k e_k\| = \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|e_k\| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|\right) \max_{1\le k\le n} |x_k| = M\|x\|_\infty.$$

A $(*)$ jobb oldali egyenlőtlensége tehát az $M := \sum\limits_{k=1}^n \|e_k\|$ számmal valóban teljesül.

A $(*)$ bal oldali egyenlőtlenségét indirket módon igazoljuk. Az állítással ellentétben tehát tegyük fel, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ számhoz létezik olyan $x_k \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy

$$\|x_k\|_\infty > k\|x_k\|.$$

Legyen

$$y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\|y_k\| = \frac{\|x_k\|}{\|x_k\|_\infty} < \frac{1}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

következésképpen $\lim\limits_{k\to+\infty} \|y_k\| = 0$, ezért $(y_k)$ a $\|\cdot\|$ normában az $\mathbb{R}^n$ tér nulleleméhez, a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz tart:

$$y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\|\cdot\|} \mathbf{0}$$

Másrészt

$$\|y_k\|_\infty = \left\|\frac{x_k}{\|x_k\|_\infty}\right\|_\infty = \frac{\|x_k\|_\infty}{\|x_k\|_\infty} = 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ebből következik, hogy $(y_k)$ az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ metrikus tér egy korlátos sorozata. A Bolzano–Weierstrass-tétel ebben a metrikus térben (!) érvényes, tehát az $(y_k)$ sorozatnak van egy $(y_{k_i})$ konvergens részsorozata. Jelölje $y \in \mathbb{R}^n$ ennek a határértékét:

$$y_{k_i} \xrightarrow[k_i\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} y.$$

Ez a részsorozat a $\|\cdot\|$ normában a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz tart:

$$y_{k_i} \xrightarrow[k_i\to+\infty]{\|\cdot\|} \mathbf{0}.$$

A $(*)$ jobb oldali egyenlőtlensége alapján

$$\|y_{k_i} - y\| \le M\|y_{k_i} - y\|_\infty \to 0, \quad \text{ha } k_i \to +\infty,$$

másrészt a határérték (a $\|\cdot\|$ normában is!) egyértelmű, ezért $y = \mathbf{0}$ is igaz, ami ellentmond annak, hogy $\|y_{k_i}\|_\infty = 1$ minden $k_i$ indexre. Ez az ellentmondás igazolja, hogy $(*)$ bal oldali egyenlőtlensége valóban fennáll. ■

**F62.** Mutassa meg, hogy a valós $(X, \|\cdot\|)$ normált térben a norma akkor és csak akkor származtatható skaláris szorzatból (azaz $X$ euklideszi tér), ha minden $x, y \in X$ esetén igaz az

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$

ún. paralelogramma-egyenlőség.

*Útmutatás.* Ha $\langle\cdot,\cdot\rangle$ olyan skaláris szorzat, ami a $\|\cdot\|$ normát indukálja, azaz

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in X),$$

akkor minden $x, y \in X$ esetén

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Tegyük fel, hogy a $\|\cdot\|$ normára igaz a paralelogramma-egyenlőség. Lássa be, hogy ekkor az

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) \qquad (x, y \in X)$$

függvény skaláris szorzat $X$-en, és ez a $\|\cdot\|$ normát indukálja. ■

**F63.** Lássa be, hogy az

(a) $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

(b) $l_p$,

(c) $C[0,1]$

téren értelmezett $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le +\infty)$ norma akkor és csak akkor elégíti ki a paralelogramma-egyenlőséget, ha $p = 2$.

*Útmutatás.* Ha $p = 2$, akkor a normát skaláris szorzat indukálja, ezért igaz a paralelogramma-egyenlőség.

Az állítás megfordításának az igazolásához $\mathbb{R}^n$-ben tekintse az

$$x := (1, 1, 0, 0, \ldots, 0) \quad \text{és} \quad y := (1, -1, 0, 0, \ldots, 0)$$

vektorokat; $C[0,1]$ esetén pedig az

$$x(t) := t \ \ (t \in (0,1)); \qquad y(t) := 1 - t \ \ (t \in (0,1))$$

függvényeket. ■

**F64.** Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér. Mutassa meg, hogy a norma, mint $X \to \mathbb{R}$ típusú függvény folytonos.

# $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú lineáris függvények

**F65.** Mutassa meg, hogy ha $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ egy lineáris leképezés, akkor tetszőleges $x_k \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ esetén

$$L\Big(\sum_{k=1}^{s} \lambda_k x_k\Big) = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k L(x_k).$$

**F66.** Bizonyítsa be, hogy $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pontosan akkor lineáris leképezés, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $L(x) = cx$ teljesül minden $x$ valós számra.

**F67.** Jelölje $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ az $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ lineáris leképezések lineáris terét. Igazolja, hogy adott $\mathbb{R}^n$-beli $\|\cdot\|_1$ és $\mathbb{R}^m$-beli $\|\cdot\|_2$ normák esetén az

$$\|L\| := \sup\big\{\|L(h)\|_2 \in \mathbb{R} \ : \ h \in \mathbb{R}^n, \ \|h\|_1 \leq 1\big\} \qquad \big(L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\big)$$

függvény norma az $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris téren. ($\|L\|$ az $L$ operátor *normája* a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ vektornormákra vonatkozóan.)

**F68.** Lássa be, hogy ha $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, akkor

(a) $\|L(h)\|_2 \leq \|L\| \cdot \|h\|_1, \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$;

(b) $\|L\| = \sup\big\{\|L(h)\|_2 \in \mathbb{R} \ : \ h \in \mathbb{R}^n, \ \|h\|_1 = 1\big\}$;

(c) $\|L\| = \min\big\{M > 0 \ : \ \|L(h)\|_2 \leq M\|h\|_1, \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n\big\}$.

# $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények deriválhatósága

**F69.** Emlékeztetünk arra, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ (*totálisan*) *deriválható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban*, ha létezik olyan $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, amellyel

$$\lim_{h \to \mathbf{0}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_1}{\|h\|_2} = 0$$

teljesül, ahol $\|\cdot\|_1$ egy $\mathbb{R}^m$-beli, $\|\cdot\|_2$ pedig egy $\mathbb{R}^n$-beli tetszőleges norma. Az $L$ lineáris leképezést az $f$ függvény $a$-beli deriváltjának nevezzük és $f'(a)$-val jelöljük: $f'(a) := L$.

Mutassa meg, hogy

(a) ha $f(x) := c$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, ahol $c$ egy rögzített $\mathbb{R}^m$-beli vektor, akkor minden $a \in \mathbb{R}^n$ esetén $f$ deriválható $a$-ban, és $f'(a) = \mathbf{0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$;

(b) ha $f := L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, akkor minden $a \in \mathbb{R}^n$ esetén $L$ deriválható $a$-ban, és $L'(a) = L$.

**F70.** Legyen

(a) $f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$, $a := (1,2)$;

(b) $f(x,y) := x^3 + xy$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$, $a := (2,3)$;

(c) $f(x,y) := x^4 + y^4$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$, $a := (0,0)$;

(d) $f(x,y) := (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$, $a := (1,2)$;

(e) $f(x,y) := (x^3 + xy, x - y^2, 1 + y)$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$, $a := (1,2)$.

A definíció alapján lássa be, hogy az $f$ függvény deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, és adja meg $f'(a)$-t. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

**F71.** Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de $f$ *nem differenciálható* $(0,0)$-ban.

**F72.** Igazolja, hogy a következő függvények nem deriválhatók a megadott pontokban

(a) $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & , (x-1)^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , (x-1)^2+y^2 = 0 \end{cases}$ , $f'(1,0)$;

(b) $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$, $f'(0,0)$.

**F73.** Bizonyítsa be, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 > 0 \\ 0, & \text{ha } x = y = 0 \end{cases}$$

függvény a $(0,0)$ pont egy környezetében mindkét változója szerint parciálisan deriválható, a $\partial_1 f$ és a $\partial_2 f$ függvények *nem folytonosak* a $(0,0)$ pontban, de az $f$ függvény *differenciálható* a $(0,0)$ pontban.

**F74.** Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Igazolja, hogy a $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ és a $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0).$$

Mutassa meg azt is, hogy $f$ nem differenciálható kétszer a $(0,0)$ pontban.

**F75.** (a) Számolja ki az $(1,2,3)$ pontban az

$$f(x,y,z) := x^2y + x\sqrt{1+z} \qquad (x,y,z \in \mathbb{R},\ z > -1)$$

függvény $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ irány menti derváltját.

(b) Határozza meg az

$$f(x,y) := 1 - \Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\Big) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ a,b > 0\big)$$

függvény iránymenti deriváltját az $\big(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\big)$ pontban az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis belső normálisának irányában.

**F76.** Milyen $\mathbf{e}$ irányban lesz a $\partial_{\mathbf{e}} f(1,2)$ iránymeni derivált a legnagyobb, ha

$$f(x,y) := e^{y-2x} \sin \pi xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}\big)?$$

**F77.** Legyen

$$\begin{aligned} A &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 < 1 \ \text{ vagy } \ x^2 + (y+1)^2 < 1\big\}, \\ B &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\}. \end{aligned}$$

Bizonyítsa be, hogy a

$$\chi_{A\cup B}(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } (x,y) \in A \cup B \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big(A \cup B\big) \end{cases}$$

függvény (az $A \cup B$ halmaz *karakterisztikus függvénye*) minden irányban deriválható a $(0,0)$ pontban, de nem deriválható (totálisan) a $(0,0)$ pontban.

**F78.** Írja fel az

$$f(x,y) := 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényt $(x-1)^k(y+2)^\ell$ $(k,\ell \in \mathbb{N})$ típusú szorzatok lineáris kombinációjaként.

**F79.** Adjon közelítő formulát az $(1+x)^m(1+y)^n$ $(n,m \in \mathbb{N})$ kifejezésre az $(x_0,y_0) = (0,0)$ pont egy környezetében, és becsülje meg a hibát.

**F80.** Mutassa meg, hogy az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény az értelmezési tartománya bármely pontja körül lokálisan invertálható; és határozza meg a lokális inverzek deriváltját a $b := f(a)$ pontban, ha

(a) $f(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big); \quad a := (2,3);$

(b) $f(x,y) := \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}, \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2); \quad a := (1,1);$

(c) $f(x,y) := \begin{pmatrix} x \cos \dfrac{y}{x} \\ x \sin \dfrac{y}{x} \end{pmatrix}, \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R}); \quad a := (1,0);$

(d) $f(x,y) := \begin{pmatrix} e^x + x \sin y \\ e^x - x \cos y \end{pmatrix}, \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2); \quad a := (1,1).$

**F81.** Lássa be, hogy az $f(x, y) := (x^3, y^3)$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény invertálható az origó egy környezetében (sőt az egész síkon is!), de az $f'(0, 0)$ mátrix nem invertálható. Deriválható-e az inverz az origóban?

**F82.** Megoldható-e az

$$\begin{aligned} 3x^2 - yz &= 0 \\ 3x^2 - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer az $y, z$ ismeretlenekre az $x$ függvényében az $x = 1$ pont egy környezetében?

**F83.** Bizonyítsa be, hogy a

$$\begin{aligned} 3x + y - z - u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer

(a) megoldható az $x, y, u$ ismeretlenekre a $z$ függvényében;

(b) megoldható az $x, z, u$ ismeretlenekre a $y$ függvényében;

(c) megoldható az $y, z, u$ ismeretlenekre az $x$ függvényében;

(d) nem oldható meg az $x, y, z$ ismeretlenekre az $u$ függvényében.

**F84.** (a) Igazolja, hogy létezik olyan folytonosan differenciálható $y \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely a $0$ pont egy környezetében van értelmezve, és eleget tesz az

$$e^{x+y(x)} - 2\cos y(x) + 1 = 0$$

egyenlőségnek. Számítsa ki $y'(0)$-t.

(b) Lássa be, hogy az $y_0 := 0$ pontnak létezik olyan $k(0)$ környezte, hogy minden $y \in k(0)$ esetén az

$$\ln\sqrt{x + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

egyenletnek pontosan egy megoldása van.

(c) Mutassa meg, hogy a $(-1, 2)$ pont egy környezetében az

$$y^2 + 5x = xe^{x(y-2)}$$

egyenlettel megadott síkbeli halmaz egy folytonosan differenciálható $\varphi : k(-1) \to \mathbb{R}$ függvény képe. Írja fel a szóban forgó görbe $(-1, 2)$ pontbeli érintőjét.

# Többváltozós függvények szélsőértékei

**F85.** Hol vannak lokális szélsőértékei az

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + y^2) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

függvénynek?

**F86.** Számítsa ki az $f$ függvény lokális szélsőértékeit, ha

(a) $f(x, y) := (1 + e^y)\cos x - ye^y$ $(x, y \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x, y) := x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$.

**F87.** Legyen $f(x, y) := x^4+y^2$, $g(x, y) := x^3+y^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Igazolja, hogy mindkét függvény teljesíti a szélsőérték létezésére vonatkozó másodrendű szükséges feltételt a $(0, 0)$ pontban. Indokolja meg, hogy $f$-nek minimuma van, míg $g$-nek nincs szélsőértéke a $(0, 0)$ pontban.

**F88.** Vizsgálja meg az alábbi függvényeket lokális szélsőérték szempontjából:

(a) $f(x, y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}\big)$;

(b) $f(x, y) := x^3y^2(4 - x - y)$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}\big)$;

(c) $f(x, y) := x^4y^2(4 - x - y)$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}\big)$.

**F89.** Keresse meg a következő függvények abszolút szélsőértékhelyeit a megadott halmazokon:

(a) $f(x, y) := y(2x - 3)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq x^2\}$;

(b) $f(x, y) := x^2 - y^2$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x, y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(c) $f(x, y) := x^3 - 3x^2 - y^2$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq -1, \ x - 1 \leq y \leq 4\}$;

(d) $f(\alpha, \beta, \gamma) := \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, ahol $\alpha, \beta, \gamma$ egy háromszög szögei.

**F90.** Határozza meg az $f$ függvény feltételes szélsőértékeit a $g = 0$ feltételre vonatkozóan:

(a) $f(x, y) := xy$, $g(x, y) := x + y - 1$ $(x, y \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x, y) := \cos^2 x + \cos^2 y$, $g(x, y) := x - y - \frac{\pi}{4}$ $(x, y \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x, y) := xy + yz$, $g_1(x, y) := x^2 + y^2 - 2$, $g_1(x, y) = y + z - 2$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$, $g = (g_1, g_2)$;

(d) $f(x, y) := xyz$, $g_1(x, y) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $g_2(x, y) := x + y + z$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$, $g = (g_1, g_2)$;

(e) $f(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \ldots, n)$, $g(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$ $(x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R})$.

**F91.** Az $x^2+y^2+z^2 = 9$ gömbfelületnek mely pontjai vannak a legnagyobb távolságra az

(a) $(1, 5, -10)$;

(b) $(1, 2, 2)$;

(c) $(-2, 1, 0)$

ponttól?

# Többszörös integrálok

# Vonalintegrálok