

Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna

Vaik.Zsuzsanna@ymmfk.szie.hu

ajánlott jegyzet:

Szilágyi Péter: Operációkutatás

Operációkutatás

- Követelmények:
- **Aláírás** feltétele: foglalkozásokon való részvétel + a félév végi ZH megírása minimum 5%os végeredménnyel
- **Érdemjegy**:

5% - 39%	elégtelen
40% - 54%	elégséges
55% - 69%	közepes
70% - 84%	jó
85% - 100%	jeles

Lineáris Programozás - Bevezető

- lineáris egyenlőtlenségrendszer – megoldások száma
- célfüggvény
- optimális megoldás, optimum érték

Lineáris Programozás – Bevezető

- Lineáris Programozási feladat (LP)

Meghatározandó egy adott lineáris célfüggvény optimuma egy adott lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldásainak halmazán, és keresünk egy hozzá tartozó optimális megoldást is.

Amennyiben az egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása, ill. nincs optimális megoldása, vagy a célfüggvény nem korlátos, akkor azt is meg kell tudnunk állapítani.

Lineáris Programozás – Bevezető

- LP feladat általános alakja:

$$\min / \max (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d)$$

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in I_1$$

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I_2$$

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_2} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in I_3$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J_1$$

$$I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I = \{1, 2, \dots, m\}, \quad J_1 \cup J_2 = J = \{1, 2, \dots, n\}$$

Lineáris Programozás – Bevezető

- 1.2. Állítás: Bármely LP feladat esetén az alábbi három eset közül pontosan az egyik áll fenn.
 - az LP feladatnak nincs megengedett megoldása
 - az LP feladatnak van ugyan megengedett megoldása, de nincs optimális megoldása.
 - az LP feladatnak van optimális megoldása
 - egyetlen optimális megoldás van
 - végtelen sok optimális megoldás van

LP – Megoldási módszerek

Grafikus megoldás – 2 változó esetén

- A síkon ábrázoljuk a megengedett megoldások halmazát. Ha ez a halmaz üres, akkor az eredeti feladatnak nincs megengedett megoldása.
- Ábrázoljuk a célfüggvény egy szintvonalát, majd meghatározzuk a célfüggvény legnagyobb növekedési/csökkenési irányát.
- A célfüggvény szintvonalát párhuzamosan eltoljuk a megfelelő irányba, amíg még van közös pontja a megengedett megoldások halmazával. Megállapítjuk mely két egyenes metszéspontja.
- Kiszámítjuk az optimális megoldást, majd az optimum értékét.

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- speciális „normál” feladat:
 - a cél a maximalizálás
 - a célfüggvényben nincs konstans tag
 - az összes feltétel \leq alakú
 - minden változóra van nem-negativitási (≥ 0) kikötés
 - a jobboldal-vektor nem-negatív vektor

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- normálfeladat és lényegében azonos átírása

$$\max(-x_1 - 2x_2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$\max(-x_1 - 2x_2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- normálfeladat és lényegében azonos átírása

$$\max \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} + \underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{y} \geq \underline{0}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \underline{x}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{b}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m \quad \underline{b} \geq \underline{0}$$

$$\max \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} + \underline{y} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

$$\underline{y} \geq \underline{0}$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \underline{x}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{b}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m \quad \underline{b} \geq \underline{0}$$

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

$$\max \underline{c}^T \underline{x}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$

- Kanonikus alakú LP feladat:
- Egyenletrendszer megoldása
- Egyenletrendszer megengedett megoldása
- Egyenletrendszer **bázismegoldása**
 - 1.4. Áll. Ha az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, az **A** mátrix oszlopvektorainak bármely bázisa egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó bázismegoldást.

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- Normál feladat „triviális” bázismegoldása

$$\underline{x} = \underline{0}, \underline{y} = \underline{b}$$

megengedett megoldás is egyben

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- Vázlatosan:
 - Kiindulunk az egységvektorok által alkotott bázisból, illetve az ehez tartozó megengedett bázismegoldásból. /induló bázis, bázismegoldás/
 - Elkészítjük eme bázishoz tartozó ún. szimplex táblát (amely a bázishoz tartozó bázistábla kibővítése).
 - Leellenőrizzük a szimplex-táblán az **optimalitás** egy elégséges feltételének teljesülését, ha ok :)
 - ha nem: leellenőrizzük a **nemkorlátosság** egy elégséges feltételének teljesülését, ha ok, leáll.
 - ha nem: **szimplex transzformáció**
(bázistranszformációhoz hasonló művelet)

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- Oldjuk meg szimplex transzformációval a következő feladatot!

$$\max 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \leq 6 \\ 2x_1 & +2x_2 & & \leq 8 \\ 2x_1 & & +2x_3 & \leq 12 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- 1. lépés: normál feladat-e?

$$\max 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \leq 6 \\ 2x_1 & +2x_2 & & \leq 8 \\ 2x_1 & & +2x_3 & \leq 12 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- 2. lépés: alakítsuk át egyenletrendszeré!

$$\begin{array}{r} \max 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 8 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_6 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

3. lépés: Bázistábla, Szimplextábla felírása

	a1	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a4</u>	1	2	2	1	0	0	6
<u>a5</u>	2	2	0	0	1	0	8
<u>a6</u>	2	0	2	0	0	1	12

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

3. lépés: Bázistáblából Szimplextábla

		3	2	1	0	0	0	
		a1	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
0	<u>a4</u>	1	2	2	1	0	0	6
0	<u>a5</u>	2	2	0	0	1	0	8
0	<u>a6</u>	2	0	2	0	0	1	12
		-3	-2	-1	0	0	0	0

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- Leállási kritériumok:
 - a célfüggvény sorában csupa nem negatív elem áll \Rightarrow optimális megoldás, optimum 😊
 - létezik olyan negatív elem a célfüggvény sorában, amely elem oszlopában nincs pozitív elem \Rightarrow nem korlátos a feladat

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

- Ha nem teljesülnek a leállási kritériumok \Rightarrow
- SZIMPLEX LÉPÉS:
 - I.) Generáló elem oszlopát kiválasztani:
célfüggvény sorában **negatív** szám
 - II.) Generáló elem választása
 - a) generáló elem **MINDIG POZITÍV**, $g > 0$!!!
 - b) ezek közül az, melyre a $\frac{b_i}{g_i}$ hányados **minimális**
(minimális hányados szabály)

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a4</u>	1	2	2	1	0	0	6
<u>a5</u>	2	2	0	0	1	0	8
<u>a6</u>	2	0	2	0	0	1	12
	-3	-2	-1	0	0	0	0
	↑						

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>	
<u>a4</u>	1	2	2	1	0	0	6	$6/1=6$
<u>a5</u>	2	2	0	0	1	0	8	$8/2=4$
<u>a6</u>	2	0	2	0	0	1	12	$12/2=\infty$
	-3	-2	-1	0	0	0	0	
	↑							

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>	
<u>a4</u>	1	2	2	1	0	0	6	$6/1=6$
<u>a5</u>	2	2	0	0	1	0	8	$8/2=4$
<u>a6</u>	2	0	2	0	0	1	12	$12/2=\infty$
	-3	-2	-1	0	0	0	0	
	↑							

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés, transzformáció

1) generáló elem sorát elosztom a generáló elemmel

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a4</u>	1	2	2	1	0	0	6
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	2	0	2	0	0	1	12
	-3	-2	-1	0	0	0	0
	↑						

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés, transzformáció
2) generáló elem oszlopát „kinullázom”

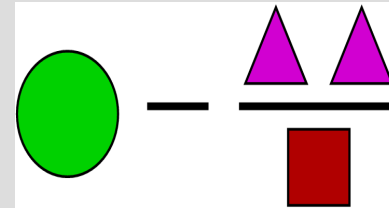
	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a4</u>	0	2	2	1	0	0	6
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	0	2	0	0	1	12
	0	-2	-1	0	0	0	0
	↑						

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés, transzformáció

2) többi elemre a szokásos
bázistranszformációs szabály



	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a4</u>	1	1	2	1	0	0	6
<u>a1</u>	2	2	0	0	1	0	8
<u>a6</u>	2	0	2	0	0	1	12
	-3	-2	-1	0	0	0	0
	↑						

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés, transzformáció a célfüggvény sorát is!

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a4</u>	0	1	2	1	-0,5	0	2
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	-2	2	0	-1	1	4
	0	1	-1	0	1,5	0	12
	↑						

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex

Optimális a tábla?

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a4</u>	0	1	2	1	-0,5	0	2
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	-2	2	0	-1	1	4
	0	1	-1	0	1,5	0	12

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex

Optimális a tábla?

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a4</u>	0	1	2	1	-0,5	0	2
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	-2	2	0	-1	1	4
	0	1	-1	0	1,5	0	12

↑

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex

generáló elem választás – min hányados sz.

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>	
<u>a4</u>	0	1	2	1	-0,5	0	2	2/2=1
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4	-
<u>a6</u>	0	-2	2	0	-1	1	4	4/2=2
	0	1	-1	0	1,5	0	12	
			↑					

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés, transzformáció

1) generáló elem sorát elosztom a generáló elemmel

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a3</u>	0	0,5	1	0,5	-0,25	0	1
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	-2	2	0	-1	1	4
	0	1	-1	0	1,5	0	12

↑

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés, transzformáció
2) generáló elem oszlopát „kinullázom”

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a3</u>	0	0,5	1	0,5	-0,25	0	1
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	-2	0	0	-1	1	4
	0	1	0	0	1,5	0	12

↑

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

4. lépés: Szimplex lépés, transzformáció

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a3</u>	0	0,5	1	0,5	-0,25	0	1
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	-3	0	-1	-0,5	1	2
	0	1,5	0	0,5	1,25	0	13

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

Optimális a tábla?

	a1	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a3</u>	0	0,5	1	0,5	-0,25	0	1
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	-3	0	-1	-0,5	1	2
	0	1,5	0	0,5	1,25	0	13

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

Optimális a tábla?

IGEN!

A célfüggvény sora mindenhol nem negatív!

	a1	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a3</u>	0	0,5	1	0,5	-0,25	0	1
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	-3	0	-1	-0,5	1	2
	0	1,5	0	0,5	1,25	0	13

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

Az optimális megoldás és optimum leolvasása!

	<u>a1</u>	<u>a2</u>	<u>a3</u>	<u>a4</u>	<u>a5</u>	<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a3</u>	0	0,5	1	0,5	-0,25	0	1
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4
<u>a6</u>	0	-3	0	-1	-0,5	1	2
	0	1,5	0	0,5	1,25	0	13

LP – Megoldási módszerek

Normál feladat és a szimplex módszer

Az optimális megoldás és optimum leolvasása!

	<u>a1</u>	$x_3 = 1, x_1 = 4, x_6 = 2$ $x_2 = x_4 = x_5 = 0$					<u>a6</u>	<u>b</u>
<u>a3</u>	0					0	1	
<u>a1</u>	1	1	0	0	0,5	0	4	
<u>a6</u>	0	0	0	1	0,5	1	2	
	0	OPTIMUM=13 (=3*4+1)						13

Operációkutatás

Köszönöm a figyelmet!

Vaik.Zsuzsanna@ymmfk.szie.hu

