

Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna

Vaik.Zsuzsanna@ymmfk.szie.hu

Budapest

2006. október 10.

Mit tanulunk ma?

- Szállítási feladat
- Megoldása

- Adott: Egy árucikk,
 $T_1, T_2, T_3, \dots, T_m$ termelőhely, melyekben rendre
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ a rendelkezésre álló mennyiség;
 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ fogyasztóhely, melyeknél rendre
 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ az igény.
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$
 c_{ij} : egységnyi árucikk szállításának költsége T_i -ből F_j -be (ez egy $m \times n$ -es költség mátrix lesz)
- Feladat: meghatározni, hogy melyik termelőhelyről melyik fogyasztóhelyre mennyit szállítsunk, hogy az igények és a kapacitások kielégítettek legyenek, és a szállítás költsége minimális legyen.

- Mi legyen a változó?

Jelölje x_{ij} azt az árumennyiséget, amelyet a T_i termelőhelyről az F_j fogyasztóhelyre szállítanak.

- Feltételek:

- A fogyasztási igényeket ki kell elégíteni. Ezáltal a kapacitás feltételek is maximálisan kihasználtak.
- a szállítás mennyiség nem lehet negatív

- Célfüggvény: minimalizálni szeretnénk a szállítás költségeit

Matematikai felírás

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum a_i = \sum b_j, c_{ij}, a_i, b_j > 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m.$$

- Ez egy lineáris programozási feladat, amely mindig megoldható!
=> szimplex algoritmus
- Megoldható, de nagy méretű lesz a szimplex tábla
- Speckó a struktúrája => trükkös szimplex
- KELL: költség mátrix és az aktuális bázishoz tartozó SZÁLLÍTÁSI TÁBLA: $m \times n$ -es mátrix megfelelő komponensében a megfelelő változó értéke

1.számú mintapélda:

A szállítási feladat költségmátrixa:

3	4	2	1
6	1	3	1
2	4	1	5

A megfelelő fogyasztóhelyek igényei rendre 7,2,2,6
és a termelőhelyek kapacitásai rendre 5,6,6.

1.számú mintapélda:

A szállítási feladat mátrixa:

3	4	2	1	5
6	1	3	1	6
2	4	1	5	6
7	2	2	6	

A megfelelő fogyasztóhelyek igényei rendre 7,2,2,6
és a termelőhelyek kapacitásai rendre 5,6,6.

1.számú mintapélda:

A szállítási feladat mátrixa:

3	4	2	1	5
6	1	3	1	6
2	4	1	5	6
7	2	2	6	

Ennek a feladatnak egy bázismegoldása:

			5
4	2		
3		2	1

Bázismegoldás:

$$x_{14} = 5, x_{21} = 4, x_{22} = 2, x_{31} = 3, x_{33} = 2, x_{34} = 1, x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{23} = x_{24} = x_{32} = 0$$

$$\text{A célfüggvény értéke: } 5 * 1 + 4 * 6 + 2 * 1 + 3 * 2 + 2 * 1 + 1 * 5 = 43$$

1.számú mintapélda:

A szállítási feladat mátrixa:

3	4	2	1	5
6	1	3	1	6
2	4	1	5	6
7	2	2	6	

Ennek a feladatnak egy bázismegoldása:

			5
4	2		
3		2	1

- LP bázismegoldása és a szállítási bázistábla egyértelműen meghatározzák egymást!
- algoritmusunk lényege:
szállítási bázistáblát transzformáljuk, amíg nem jutunk olyan szállítási bázistáblához, amelyhez tartozó bázismegoldás optimális

x-mátrix: $m \times n$ -es mátrix néhány eleme "beikszelve"

			X
X	X		X
X		X	X

hurok az x-mátrixban

			X
X	X		X
X		X	X

			X
X	X		
X		X	X

x-mátrix: $m \times n$ -es mátrix néhány eleme "beikszelve"

			X
X	X		X
X		X	X

hurok az x-mátrixban

			X
X	X		X
X		X	X

			X
X	X		
X		X	X

szállítási tábla BÁZISmegoldáshoz tartozik

\Leftrightarrow

x-mátrixa $m + n - 1$ db x-ből áll

hurokmentes

sőt: bármely másik elemet hozzávéve pontosan 1db hurkot tartalmaz

			5
4	2		
3		2	1

bázismegoldás

		1	4
4	2		
3		1	2

nem bázismegoldás!

szállítási bázistábla megoldása optimális

\Leftrightarrow

ha minden nem kijelölt elemhez tartozó hurok előjeles összege ≤ 0

előjeles összeg: a hurok elemeihez tartozó célfüggvényértékeit összeadjuk, a kezdőelemtől páratlan távolságra levőket negatív előjellel a páros távolságra levőket pozitív előjellel.

mj: ha már egy elem összegét egy hurokra kiszámoltuk, az később sem változik.

szállítási bázistábla megoldása optimális

\Leftrightarrow

ha minden nem kijelölt elemhez tartozó hurok előjeles összege ≤ 0

előjeles összeg: a hurok elemeihez tartozó célfüggvényértékeit összeadjuk, a kezdőelemtől páratlan távolságra levőket negatív előjellel a páros távolságra levőket pozitív előjellel.

mj: ha már egy elem összegét egy hurokra kiszámoltuk, az később sem változik.

3	4	2	1
6	1	3	1
2	4	1	5

	x		x
x	x		
x		x	x

			5
4	2		
3		2	1

pl, az (1,2) nem kijelölt elemhez tartozó előjeles összeg: $1-5+2-6+1-4=-11 < 0$;

szállítási bázistábla megoldása optimális

\Leftrightarrow

ha minden nem kijelölt elemhez tartozó hurok előjeles összege ≤ 0

előjeles összeg: a hurok elemeihez tartozó célfüggvényértékeit összeadjuk, a kezdőelemtől páratlan távolságra levőket negatív előjellel a páros távolságra levőket pozitív előjellel.

mj: ha már egy elem összegét egy hurokra kiszámoltuk, az később sem változik.

3	4	2	1
6	1	3	1
2	4	1	5

			x
x	x		x
x		x	x

			5
4	2		
3		2	1

pl, az (1,2) nem kijelölt elemhez tartozó előjeles összeg: $1-5+2-6+1-4=-11 < 0$;
a (2,4) nem kijelölt elemhez tartozó előjeles összeg: $5-2+6-1=8 > 0$

ha nem optimális

=>

bázisból kilépő elem meghatározása:
a páratlan távolságra lévőkhöz közül a minimális,
ha több is van, egyiket kiválasztom.
Ennek az értékét jelölje *Min*.

3	4	2	1
6	1	3	1
2	4	1	5

			x
x	x		x
x		x	x

			5
4	2		x
3		2	1

pl, a (2,4) nem kijelölt elemhez tartozó hurok mentén: -> páratlan távolságra lévőkhöz: 1,4 => minimális: 1

Új tábla:

- ami nincs hurokban: változatlan marad
- hurokbeli, páros távolságra: hozzáadom Min -t
- hurokbeli, páratlan távolságra: levonom Min -t.
- kilépő elem: ahol a minimum felvétetik

3	4	2	1
6	1	3	1
2	4	1	5

			x
x	x		x
x		x	x

			5
3	2		1
4		2	-

pl, a (2,4) nem kijelölt elemhez tartozó hurok mentén: -> páratlan távolságra lévő: 1,4 => minimális: $Min = 1$

Szállítási feladat megoldása:

1. induló szállítási-bázistábla előállítása
2. optimális? (minden hurokhoz tartozó összeg ≤ 0)
 - (a) igen: optimális megoldás és az optimum leolvasása
 - (b) nem: új szállítási tábla előállítása
(megfelelő elem mentén pozitív hurok értékeinek módosítása)

Induló szállítási-bázistábla előállítása: két -féle módszer:

- Észak-Nyugati módszer
- Minimális elem módszer

Észak-Nyugati módszer:

3	4	2	1	5
6	1	3	1	6
2	4	1	5	6
7	2	2	6	

Észak-Nyugati módszer:

?				5
				6
				6
7	2	2	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5
				6
				6
7	2	2	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5					
				6					6
				6					6
7	2	2	6		2	2	2	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5					
				6	?				6
				6					6
7	2	2	6		2	2	2	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5					
				6	2				6
				6					6
7	2	2	6		2	2	2	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5
				6
				6
7	2	2	6	

2				6
				6
2	2	2	6	

			4
			6
2	2	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5															
				6	2				6	?				4					
				6					6					6					
7	2	2	6		2	2	2	6		2	2	6							

Észak-Nyugati módszer:

5				5															
				6	2				6	2				4					
				6					6					6					
7	2	2	6		2	2	2	6		2	2	6							

Észak-Nyugati módszer:

5				5
				6
				6
7	2	2	6	

2				6
				6
2	2	2	6	

2			4
			6
2	2	6	

		2
		6
2	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5
				6
				6
7	2	2	6	

2				6
				6
2	2	2	6	

2			4
			6
2	2	6	

?		2
		6
2	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5
				6
				6
7	2	2	6	

2				6
				6
2	2	2	6	

2			4
			6
2	2	6	

2		2
		6
2	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5										
				6	2			6	2		4	2		2
				6				6			6			6
7	2	2	6		2	2	2	6	2	2	6		2	6
													0	6

Észak-Nyugati módszer:

5				5															
				6	2				6	2			4	2			2		
				6					6				6				?		6
7	2	2	6		2	2	2	6		2	2	6		2	6		0	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5															
				6	2				6	2			4	2			2		
				6					6				6				0		6
7	2	2	6		2	2	2	6		2	2	6		2	6		0	6	

Észak-Nyugati módszer:

5				5															
				6	2				6	2			4	2			2		
				6					6				6			0			6
7	2	2	6		2	2	2	6		2	2	6		2	6		0	6	
																			6

Észak-Nyugati módszer:

5				5															
				6	2				6	2			4	2			2		
				6					6				6			0		6	? 6
7	2	2	6		2	2	2	6		2	2	6		2	6		0	6	6

Észak-Nyugati módszer:

5				5																
				6	2				6	2			4	2			2			
				6					6					6	0			6	6	6
7	2	2	6		2	2	2	6		2	2	6		2	6		0	6		6

Észak-Nyugati módszer:

5				5	2				6	2			4	2		2	0		6	?	6
				6					6				6			6					
7	2	2	6		2	2	2	6		2	2	6		2	6		0	6		6	

=>

5			
2	2	2	
		0	6

155/7 a) Feladat

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

				4
				9
				3
7	3	2	4	

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

?				4
				9
				3
7	3	2	4	

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4
				9
				3
7	3	2	4	

				9
				3
3	3	2	4	

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4
				9
				3
7	3	2	4	

?				9
				3
3	3	2	4	

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4
				9
				3
7	3	2	4	

3				9
				3
3	3	2	4	

				6
				3
3	2	4		

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4
				9
				3
7	3	2	4	

3				9
				3
3	3	2	4	

?				6
				3
3	2	4		

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4
				9
				3
7	3	2	4	

3				9
				3
3	3	2	4	

3			6
			3
3	2	4	

		3
		3
2	4	

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4
				9
				3
7	3	2	4	

3				9
				3
3	3	2	4	

3				6
				3
3	2	4		

?				3
				3
2	4			

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4
				9
				3
7	3	2	4	

3				9
				3
3	3	2	4	

3			6
			3
3	2	4	

2		3
		3
2	4	

	1
	3
4	

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4
				9
				3
7	3	2	4	

3				9
				3
3	3	2	4	

3			6
			3
3	2	4	

2		3
		3
2	4	

?	1
	3
4	

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4													
				9	3				9	3			2		3	1	1
				3				3				3			3		3
7	3	2	4		3	3	2	4		3	2	4		2	4		4

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4															
				9	3				9	3			6	2		3	1	1	
				3				3				3				3		3	?
7	3	2	4		3	3	2	4		3	2	4		2	4		4		3

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4															
				9	3				9	3			6	2		3	1	1	
				3				3				3				3		3	
7	3	2	4		3	3	2	4		3	2	4		2	4		4		
																		3	3
																		3	

155/7 a) Feladat

1.Lépés: induló szállítási bázistábla meghatározása

4				4																														
				9	3				9	3				6	2				3	1	1													
				3					3					3					3		3						3	3						
7	3	2	4		3	3	2	4		3	2	4			2	4				4														

Induló szállítási tábla:

4			
3	3	2	1
			3

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

4	?		
3	3	2	1
			3

(1,2) nem kijelölt elemhez tartozó hurok

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

4	?		
3	3	2	1
			3

(1,2) nem kijelölt elemhez tartozó hurok $5-3+3-2=3>0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

4	?		
3	3	2	1
			3

(1,2) nem kijelölt elemhez tartozó hurok $5-3+3-2=3>0$

=> NEM OPTIMÁLIS.

páratlan távolságra lévő elemek minimuma: $\min(4,3)=3$.

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

4	?		
3	3	2	1
			3

(1,2) nem kijelölt elemhez tartozó hurok $5-3+3-2=3>0$

=> NEM OPTIMÁLIS.

páratlan távolságra lévő elemek minimuma: $\min(4,3)=3$.

megoldás módosítása:

4	?		
3	3	2	1
			3

→

1	3		
6	-	2	1
			3

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	?	
6		2	1
			3

(1,3) elem: $4-3+3-5=-1<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	?
6		2	1
			3

(1,4) elem: $4-3+3-5=-1<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	?	2	1
			3

(2,2) elem: $3-3+2-5=-3<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	-	2	1
?			3

(3,1) elem: $3-4+3-3=-1<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	-	2	1
-	?		3

(3,2) elem: $2-3+3-4+3-4=-3<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	-	2	1
-	-	?	3

(3,3) elem: $4-4+3-2=1>0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	-	2	1
-	-	+	3

(3,3) elem: $4-4+3-2=1>0$

NEM OPTIMÁLIS

páratlan távolságra lévő elemek minimuma: $\min(2,3)=2$.

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	-	2	1
-	-	+	3

(3,3) elem: $4 - 4 + 3 - 2 = 1 > 0$

NEM OPTIMÁLIS

páratlan távolságra lévő elemek minimuma: $\min(2,3)=2$.

1	3		
6		2	1
		+	3

→

1	3		
6		-	3
		2	1

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	?	
6			3
		2	1

(1,3) elem: $3-3+4-3+2-5=-2<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	?
6			3
		2	1

(1,4) elem: már egyszer kiszámoltuk: $4-3+3-5=-1<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	?		3
		2	1

(2,2) elem: már egyszer kiszámoltuk: $3-3+2-5=-3<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	-	?	3
		2	1

(2,3) elem: $4-3+2-4=-1<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	-	-	3
?		2	1

(3,1) elem: már egyszer kiszámoltuk: $3-4+3-3=-1<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	-	-	3
-	?	2	1

(3,2) elem: már egyszer kiszámoltuk: $2-3+3-4+3-4=-3<0$

155/7 a) Feladat

2.Lépés: Optimális megoldás? -> minden hurokra leellenőrizni az előjeles összeget

3	2	5	5	4
3	5	4	4	9
3	4	2	3	3
7	3	2	4	16

1	3	-	-
6	-	-	3
-	-	2	1

MINDEN NEM KIVÁLASZTOTT ELEMHEZ TARTOZÓ HUOKHOZ TARTOZÓ ELŐJELES ÖSSZEG NEGATÍV => OPTIMÁLISMEGOLDÁS!!!

$$x_{11} = 1, x_{12} = 3, x_{21} = 6, x_{24} = 3, x_{33} = 2, x_{34} = 1,$$

$$x_{13} = x_{14} = x_{22} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = 0$$

$$\text{Optimum} = 1 * 3 + 3 * 2 + 6 * 3 + 3 * 4 + 2 * 2 + 1 * 3 = 46$$

Köszönöm a figyelmet!

Vaik Zsuzsanna

Vaik.Zsuzsanna@ymmfk.szie.hu