Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna

Vaik.Zsuzsanna@ymmfk.szie.hu
Budapest
2006. október 31.

Mit tanulunk ma?

- Hozzárendelési feladat
- Megoldása

Példa: Tankönyv: 10. oldal
Részletesen: Tankönyv 79.-88. oldal

- Adott egy munkának n részfeladata, és adott n vállalkozó, amelyek minden egyes részfeladatra megmondják, mennyiért vállalnák el a feladatot.
- Találjunk minden egyes részfeladatra egy és csak egy vállalkozót úgy, hogy minden vállalkozó csak egy részfeladatot vállalhat el,
  és az összköltség minimális legyen.

Átfogalmazás:

- Adott $n \times n$-es költégmátrix.
- Válasszunk ki minden sorból és minden oszlopból pontosan egy elemet, úgy hogy az elemek összege minimális legyen.

- Mi legyen a változó?
  Legyen $x_{ij} = 1$, ha az $i$dik részfeladathoz a $j$dik vállalkozót rendeljük,
  Azaz, ha az $i$dik sor $j$dik elemét választottuk ki,
  legyen $x_{ij} = 0$ különben.
- Feltételek:
  - $x_{ij} \in \{0, 1\}$
  - Minden sorban egy elemet válasszunk ki:
    $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ minden $i = 1, \ldots n$;
  - Minden oszlopban egy elemet válasszunk ki:
    $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ minden $j = 1, \ldots n$;
- Célfüggvény:
  minimalizálni szeretnénk a hozzárendelés költségét, azaz

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Matematikai felírás

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$c_{ij} > 0, i, j = 1, \ldots, n$$

Hozzárendelési feladat módosítása:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$c_{ij} > 0, i, j = 1, \ldots, n$$

Ez egy szállítási feladat.
Aminek a bázismegoldása mindig egész! (80.oldal 3.1 Állítás)

Hozzárendelési feladat módosítása:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$c_{ij} > 0, i, j = 1, \dots, n$$

Ez egy szállítási feladat.
Aminek a bázismegoldása mindig egész! (80.oldal 3.1 Állítás)
Tehát ennek a feladatnak mindig létezik egész optimális megoldása, amely egyúttal optimális megoldása lesz a hozzárendelési feladatnak is!

Hozzárendelési feladat módosítása:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

$$c_{ij} > 0, i, j = 1, \ldots, n$$

Ez egy szállítási feladat.
Aminek a bázismegoldása mindig egész! (80.oldal 3.1 Állítás)
Tehát ennek a feladatnak mindig létezik egész optimális megoldása, amely egyúttal optimális megoldása lesz a hozzárendelési feladatnak is!
Azonban mégsem így oldjuk meg, mert a szállítási feladat szállítási bázistáblája túl sok nullát tartalmazna! Van rá egy másik megoldási módszer, az úgynevezett

Magyar módszer (Hungarian Method)!

Magyar Módszer

Néhány definíció

- $n \times n$-es mátrixban k db nulla független, ha közülük semelyik kettő nincs egy oszlopban, vagy sorban.

0		0	
	0	0	
0			0
0	0		

Magyar Módszer

Néhány definíció

- $n \times n$-es mátrixban k db nulla független, ha közülük semelyik kettő nincs egy oszlopban, vagy sorban.

0		0	
	0	0	
0			0
0	0		

függetlenek

0		0	
	0	0	
0			0
0	0		

nem függetlenek

Magyar Módszer

Néhány definíció

- $n \times n$-es mátrixban k db nulla független, ha közülük semelyik kettő nincs egy oszlopban, vagy sorban.

- Lefedővonal rendszer: sorok és oszlopok rendszere, amelyek tartalmazzák a mátrixban az összes 0-t.

0		0	
	0	0	
0			0
0	0		

Magyar Módszer

Néhány definíció

- $n \times n$-es mátrixban k db nulla független, ha közülük semelyik kettő nincs egy oszlopban, vagy sorban.

- Lefedővonal rendszer: sorok és oszlopok rendszere, amelyek tartalmazzák a mátrixban az összes 0-t.

0		0		←
	0	0		←
0			0	←
0	0			
↑	↑			

lefedővonalrendszer

0		0		←
	0	0		←
0			0	←
0	0			
	↑			

NEM lefedővonalrendszer

Megjegyzés: Ha a mátrix minden sora és minden oszlopa tartalmaz legalább egy 0-t, akkor a *maximális független zérus*ok száma egyenlő a *minimális lefedővonal rendszer* elemszámával. (83.old 3.7 Állítás)

Magyar Módszer

1. Költség mátrix módosítása
   - sor redukció: minden sort csökkentem a sorban levő minimális elemmel
   - oszlop redukció: minden oszlopot csökkentem az oszlopban levő minimális elemmel

   Ekkor elértük, hogy minden sorban és oszlopban van legalább egy 0.

2. Kiválasztunk maximális elemszámú független zérust. (Algoritmus 1)
   - Ha ezek száma egyenlő n => készen vagyunk, a megoldás OPTIMÁLIS :)
   - Ha ezek száma kisebb, mint n => 3. lépés.

3. Keresünk egy minimális lefedővonal rendszert, és ennek segítségével módosítunk.
   - a le nem fedett elemek minimumával csökkentem a le nem fedett elemeket,
   - és ugyanezzel a minimummal növelem a kétszer lefedett elemeket.

   Majd GOTO 2.

Algoritmus 1.

maximális független zérusok és a minimális lefedővonal rendszer meghatározására

1. 0-k osztályozása, A, B, C, D, E cimkézéssel.
2. Áll.: Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.
3. Így az A-beliek egy maximális független zérusrendszert adnak majd és, ha ezen zérusok száma nem n, akkor rögtön meg is adhatunk egy minimális lefedővonal rendszert:
4. B,D nullák **sorai**, és E **oszlopai**, valamint az így le nem fedett A-beliek **sorai vagy oszlopai** egy minimális lefedővonal rendszert adnak.
   (85.old 3.14 Állítás)

Algoritmus 1.

maximális független zérusok és a minimális lefedővonal rendszer meghatározására

1. 0-k osztályozása, A, B, C, D, E cimkézéssel.

- A: Minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t.
  az A-beliek függetlenek! számuk = n? ha igen, kész :), ha nem:
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A.
- C: a maradékból, valamely B sorában van, (de ezek szerint van Abeli az oszlopában és sorában is),
- D: a maradékból, B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind.
- a maradék:E.

Algoritmus 1.

maximális független zérusok és a minimális lefedővonal rendszer meghatározására

1. 0-k osztályozása, A, B, C, D, E cimkézéssel.
2. Áll.: Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.
   - Ilyen D-ből elindulunk független A-ba, majd D-be, majd A-ba ... stb, majd végül A-ból B-be.
   - Vegyük ki az így kapott A-belieket az A halmazból, és tegyük be az út során talált D-belieket és B-belit az A halmazba.
   - Majd az összes többi cimkét (B, C, D, E) osszuk újra.
3. Így az A-beliek egy maximális független zérusrendszert adnak, (amikor már nem létezik olyan D-beli aminek az oszlopában nincs A-beli, 85.old 3.13. Állítás), és ha ezen zérusok száma nem n, akkor rögtön meg is adhatunk egy minimális lefedővonal rendszert:
4. B,D nullák **sorai**, és E **oszlopai**, valamint az így le nem fedett A-beliek **sorai vagy oszlopai** egy minimális lefedővonal rendszert adnak. (85.old 3.14 Állítás)

2.számú mintapélda: (86.old)

A hozzárendelési feladat költségmátrixa:

3	7	7	5	4
4	7	8	7	16
2	4	8	5	5
2	5	15	4	14
2	3	4	2	3

2.számú mintapélda: (86.old)

1.lépés: költség mátrix módosítása

a) minden sort csökkentjük a minimális elemmel

3	7	7	5	4
4	7	8	7	16
2	4	8	5	5
2	5	15	4	14
2	3	4	2	3

2.számú mintapélda: (86.old)

1.lépés: költség mátrix módosítása

a) minden sort csökkentjük a minimális elemmel

b) minden oszlopot csökkentjük a minimális elemmel

3	7	7	5	4
4	7	8	7	16
2	4	8	5	5
2	5	15	4	14
2	3	4	2	3

0	4	4	2	1
0	3	4	3	12
0	2	6	3	3
0	3	13	2	12
0	1	2	0	1

2.számú mintapélda: (86.old)

1.lépés: költség mátrix módosítása

a) minden sort csökkentjük a minimális elemmel

b) minden oszlopot csökkentjük a minimális elemmel

3	7	7	5	4
4	7	8	7	16
2	4	8	5	5
2	5	15	4	14
2	3	4	2	3

0	4	4	2	1
0	3	4	3	12
0	2	6	3	3
0	3	13	2	12
0	1	2	0	1

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

A harmadikkal dolgozunk tovább!

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0				0
0				
0				
0				
0	0	0	0	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^A				0
0				
0				
0				
0	0^A	0	0	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^A				0^B
0				
0				
0				
0	0^A	0^B	0^B	0^B

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1
1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A
- C: a maradékból, valamely B sorában van, (de ezek szerint van Abeli az oszlopában és sorában is)

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^A				0^B
0				
0				
0				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^B

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1
1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A
- C: a maradékból, valamely B sorában van, (de ezek szerint van Abeli az oszlopában és sorában is)
- D: a maradékból, B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^A				0^B
0^D				
0				
0				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^B

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1
1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A
- C: a maradékból, valamely B sorában van, (de ezek szerint van Abeli az oszlopában és sorában is)
- D: a maradékból, B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^A				0^B
0^D				
0^D				
0^D				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^B

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A
- C: a maradékból, valamely B sorában van, (de ezek szerint van Abeli az oszlopában és sorában is)
- D: a maradékból, B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind.
- a maradék: E.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^A				0^B
0^D				
0^D				
0^D				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^B

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^A				0^B
0^D				
0^D				
0^D				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^B

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.

- Ilyen D-ből elindulunk független A-ba, majd D-be, majd A-ba ... stb, majd végül A-ból B-be.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^A				0^B
0^D				
0^D				
0^D				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^B

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.

- Ilyen D-ből elindulunk független A-ba, majd D-be, majd A-ba ... stb, majd végül A-ból B-be.
- Vegyük ki az így kapott A-belieket az A halmazból, és tegyük be az út során talált D-belieket és B-belit az A halmazba.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0				0^A
0^A				
0^D				
0^D				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^B

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.

- Ilyen D-ből elindulunk független A-ba, majd D-be, majd A-ba ... stb, majd végül A-ból B-be.
- Vegyük ki az így kapott A-belieket az A halmazból, és tegyük be az út során talált D-belieket és B-belit az A halmazba.
- Majd az összes többi cimkét (B, C, D, E) osszuk újra.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0				0^A
0^A				
0				
0				
0	0^A	0	0	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.

- Ilyen D-ből elindulunk független A-ba, majd D-be, majd A-ba ... stb, majd végül A-ból B-be.
- Vegyük ki az így kapott A-belieket az A halmazból, és tegyük be az út során talált D-belieket és B-belit az A halmazba.
- Majd az összes többi cimkét (B, C, D, E) osszuk újra. (B:A sorában van, de az oszlopában nincs A;C:B sorában van; D: B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind; E: maradék.)

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0				0^A
0^A				
0				
0				
0	0^A	0^B	0^B	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.

- Ilyen D-ből elindulunk független A-ba, majd D-be, majd A-ba ... stb, majd végül A-ból B-be.
- Vegyük ki az így kapott A-belieket az A halmazból, és tegyük be az út során talált D-belieket és B-belit az A halmazba.
- Majd az összes többi cimkét (B, C, D, E) osszuk újra.

(B:A sorában van, de az oszlopában nincs A; C:B sorában van; D: B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind; E: maradék.)

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0				0^A
0^A				
0				
0				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^C

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.

- Ilyen D-ből elindulunk független A-ba, majd D-be, majd A-ba ... stb, majd végül A-ból B-be.
- Vegyük ki az így kapott A-belieket az A halmazból, és tegyük be az út során talált D-belieket és B-belit az A halmazba.
- Majd az összes többi cimkét (B, C, D, E) osszuk újra.

(B:A sorában van, de az oszlopában nincs A; C:B sorában van; D: B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind; E: maradék.)

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0				0^A
0^A				
0				
0				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^C

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.

- Ilyen D-ből elindulunk független A-ba, majd D-be, majd A-ba ... stb, majd végül A-ból B-be.
- Vegyük ki az így kapott A-belieket az A halmazból, és tegyük be az út során talált D-belieket és B-belit az A halmazba.
- Majd az összes többi cimkét (B, C, D, E) osszuk újra.

  (B:A sorában van, de az oszlopában nincs A; C:B sorában van; D: B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind; E: maradék.)

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^E				0^A
0^A				
0^E				
0^E				
0^C	0^A	0^B	0^B	0^C

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát. 3) Mivel nemlétezik D-beli, ezért nemlétezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, tehát az A-beliek maximális függetlent alkotnak. Melyeknek száma 3.

Határozzuk meg a minimális, 3 elemű lefedővonal rendszert: B,D nullák **sorai**, és E **oszlopai**, valamint az így le nem fedett A-beliek **sorai vagy oszlopai** egy minimális lefedővonal rendszert adnak.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^E				0^A	
0^A					
0^E					
0^E					
0^C	0^A	0^B	0^B	0^C	$\leftarrow$

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát. 3) Mivel nemlétezik D-beli, ezért nemlétezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, tehát az A-beliek maximális függetlent alkotnak. Melyeknek száma 3.

Határozzuk meg a minimális, 3 elemű lefedővonal rendszert: B,D nullák **sorai**, és E **oszlopai**, valamint az így le nem fedett A-beliek **sorai vagy oszlopai** egy minimális lefedővonal rendszert adnak.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^E				0^A	
0^A					
0^E					
0^E					
0^C	0^A	0^B	0^B	0^C	$\leftarrow$
$\uparrow$					

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát. 3) Mivel nemlétezik D-beli, ezért nemlétezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, tehát az A-beliek maximális függetlent alkotnak. Melyeknek száma 3.

Határozzuk meg a minimális, 3 elemű lefedővonal rendszert: B,D nullák **sorai**, és E **oszlopai**, valamint az így le nem fedett A-beliek **sorai vagy oszlopai** egy minimális lefedővonal rendszert adnak.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^E				0^A	$\leftarrow$
0^A					
0^E					
0^E					
0^C	0^A	0^B	0^B	0^C	$\leftarrow$
$\uparrow$					

2.számú mintapélda: (86.old)

3. lépés: Így az A-beliek egy maximális független zérusrendszert adnak és ezen zérusok száma nem 5.

0	3	2	2	0
0	2	2	3	11
0	1	4	3	2
0	2	11	2	11
0	0	0	0	0

0^E				0^A	$\leftarrow$
0^A					
0^E					
0^E					
0^C	0^A	0^B	0^B	0^C	$\leftarrow$
$\uparrow$					

2.számú mintapélda: (86.old)

3.lépés: Így az A-beliek egy maximális független zérusrendszert adnak és ezen zérusok száma nem 5.
A minimális lefedővonal rendszer segítségével módosítunk.

- a le nem fedett elemek minimumával csökkentem a le nem fedett elemeket,
- és ugyanezzel a minimummal növelem a kétszer lefedett elemeket.

0	3	2	2	0	$\leftarrow$
0	2	2	3	11	
0	**1**	4	3	2	
0	2	11	2	11	
0	0	0	0	0	$\leftarrow$
$\uparrow$					

0^E				0^A	$\leftarrow$
0^A					
0^E					
0^E					
0^C	0^A	0^B	0^B	0^C	$\leftarrow$
$\uparrow$					

2.számú mintapélda: (86.old)

3.lépés: Így az A-beliek egy maximális független zérusrendszert adnak és ezen zérusok száma nem 5.
A minimális lefedővonal rendszer segítségével módosítunk.

- a le nem fedett elemek minimumával csökkentem a le nem fedett elemeket,
- és ugyanezzel a minimummal növelem a kétszer lefedett elemeket.

0	3	2	2	0	←
0	2	2	3	11	
0	**1**	4	3	2	
0	2	11	2	11	
0	0	0	0	0	←
↑					

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

GOTO 2.lépés

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0
0				
0	0			
0				
	0	0	0	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0^A
0^A				
0	0^A			
0				
	0	0^A	0	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0^A
0^A				
0	0^A			
0				
	0	0^A	0^B	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A
- C: a maradékból, valamely B sorában van, (de ezek szerint van Abeli az oszlopában és sorában is)

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0^A
0^A				
0	0^A			
0				
	0^C	0^A	0^B	0^C

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A
- C: a maradékból, valamely B sorában van, (de ezek szerint van Abeli az oszlopában és sorában is)
- D: a maradékból, B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind.

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0^A
0^A				
0	0^A			
0				
	0^C	0^A	0^B	0^C

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t
- B: a maradékból, valamely A sorában van, de az oszlopában nincs A
- C: a maradékból, valamely B sorában van, (de ezek szerint van Abeli az oszlopában és sorában is)
- D: a maradékból, B-ből vízszintesen elindulva A-hoz majd onnan függőlegesen D-hez. Vagy innen vízszintesen A-hoz majd függőlegesen új D-hez. Sőt az így D-be kerülők oszlopában lévőket mind.
- a maradék: E.

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0^A
0^A				
0^E	0^A			
0^E				
	0^C	0^A	0^B	0^C

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát.

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0^A
0^A				
0^E	0^A			
0^E				
	0^C	0^A	0^B	0^C

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása 2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát. DE: Nincs D-beli :)

3) Mivel nemlétezik D-beli, ezért nemlétezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, tehát az A-beliek maximális függetlent alkotnak. Melyeknek száma 4.

Határozzuk meg a minimális, 4 elemű lefedővonal rendszert: B,D nullák **sorai**, és E **oszlopai**, valamint az így le nem fedett A-beliek **sorai vagy oszlopai** egy minimális lefedővonal rendszert adnak.

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0^A
0^A				
0^E	0^A			
0^E				
	0^C	0^A	0^B	0^C

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása 2) Ha létezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, akkor növeljük a függetlenek számát. DE: Nincs D-beli :)

3) Mivel nemlétezik D-beli, ezért nemlétezik olyan D-beli, amelynek sorában nincs A-beli, tehát az A-beliek maximális függetlent alkotnak. Melyeknek száma 4.

Határozzuk meg a minimális, 4 elemű lefedővonal rendszert: B,D nullák **sorai**, és E **oszlopai**, valamint az így le nem fedett A-beliek **sorai vagy oszlopai** egy minimális lefedővonal rendszert adnak.

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0^A	$\leftarrow$
0^A					
0^E	0^A				
0^E					
	0^C	0^A	0^B	0^C	$\leftarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$				

2.számú mintapélda: (86.old)

3.lépés: Így az A-beliek egy maximális független zérusrendszert adnak és ezen zérusok száma nem 5.

1	3	2	2	0
0	1	1	2	10
0	0	3	2	1
0	1	10	1	10
1	0	0	0	0

				0^A	$\leftarrow$
0^A					
0^E	0^A				
0^E					
	0^C	0^A	0^B	0^C	$\leftarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$				

2.számú mintapélda: (86.old)

3.lépés: Így az A-beliek egy maximális független zérusrendszert adnak és ezen zérusok száma nem 5.
A minimális lefedővonal rendszer segítségével módosítunk.

- a le nem fedett elemek minimumával csökkentem a le nem fedett elemeket,
- és ugyanezzel a minimummal növelem a kétszer lefedett elemeket.

1	3	2	2	0	$\leftarrow$
0	1	1	2	10	
0	0	3	2	1	
0	1	10	1	10	
1	0	0	0	0	$\leftarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$				

				0^A	$\leftarrow$
0^A					
0^E	0^A				
0^E					
	0^C	0^A	0^B	0^C	$\leftarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$				

2.számú mintapélda: (86.old)

3.lépés: Így az A-beliek egy maximális független zérusrendszert adnak és ezen zérusok száma nem 5.
A minimális lefedővonal rendszer segítségével módosítunk.

- a le nem fedett elemek minimumával csökkentem a le nem fedett elemeket,
- és ugyanezzel a minimummal növelem a kétszer lefedett elemeket.

1	3	2	2	0	$\leftarrow$
0	1	1	2	10	
0	0	3	2	1	
0	1	10	1	10	
1	0	0	0	0	$\leftarrow$
$\uparrow$	$\uparrow$				

2	4	2	2	0
0	1	0	1	9
0	0	2	1	0
0	1	9	0	9
2	1	0	0	0

GOTO 2.lépés

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

2	4	2	2	0
0	1	0	1	9
0	0	2	1	0
0	1	9	0	9
2	1	0	0	0

				0
0		0		
0	0			0
0			0	
		0	0	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t

2	4	2	2	0
0	1	0	1	9
0	0	2	1	0
0	1	9	0	9
2	1	0	0	0

				0^A
0^A		0		
0	0^A			0
0			0^A	
		0^A	0	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t

Mivel az A független 0-k száma 5, ami egyben maximális is, nem folytatjuk tovább az osztályozást, készen vagyunk!

2	4	2	2	0
0	1	0	1	9
0	0	2	1	0
0	1	9	0	9
2	1	0	0	0

				0^A
0^A		0		
0	0^A			0
0			0^A	
		0^A	0	0

2.számú mintapélda: (86.old)

2.lépés: Maximális elemszámú független zérusok kiválasztása - Algoritmus 1

1) 0-k osztályozása

- A: minden sorból a balról az első 0, aminek az oszlopából még nem választottunk 0-t

Mivel az A független 0-k száma 5, ami egyben maximális is, nem folytatjuk tovább az osztályozást, készen vagyunk!

Ugyanezen hozzárendelés lesz optimális az eredeti mátrixban!

2	4	2	2	0
0	1	0	1	9
0	0	2	1	0
0	1	9	0	9
2	1	0	0	0

3	7	7	5	4
4	7	8	7	16
2	4	8	5	5
2	5	15	4	14
2	3	4	2	3

Optimális megoldás: $x_{15} = x_{21} = x_{32} = x_{44} = x_{53} = 1$, $x_{ij} = 0$ különben.

Optimum értéke: 4+4+4+4+4=20.

Köszönöm
a
figyelmet!

Vaik Zsuzsanna

Vaik.Zsuzsanna@ymmfk.szie.hu